一様電場内を運動する相対論的粒子に対する散乱

神楽坂解析セミナー 2017/4/22
川本昌紀 (東京理科大学)
Email: mkawa@rs.tus.ac.jp

Abstract

問題としては，次の方程式を考察する．

$$\begin{cases} (i\partial_t + q_E)^2\psi(t,x) = L(0,p)\psi(t,x), \\ \psi(0,x) = \psi_0, \quad \{(i\partial_t + q_E)(\psi(t,x))\}|_{t=0} = \psi_1, \end{cases} \tag{1}$$
$$L(0,p) = c^2p^2 + (mc^2)^2, \quad q_E = qE\cdot x + V,$$

ここで $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$ は粒子の位置, $p = (p_1, ..., p_n) = -i(\partial x_1, ..., \partial x_n) = -i\nabla$ は粒子の運動量, $m > 0$ は粒子の質量, $q \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ は粒子の電荷を表す．$E \in \mathbf{R}^n\backslash\{0\}$ が空間一様な電場の強さを表している．V は (電場) ポテンシャルと呼ばれ，以下を満たすものとする：
V は実数値関数 $V(x)$ をかける掛け算作用素で，任意の多重指数 α, $|\alpha| \le 2$, ある $\delta > 0$ に対して，十分小さな定数 $\varepsilon_{V,\alpha} > 0$ が存在して，$V(x) \in C^2(\mathbf{R})$ は

$$|\partial_x^\alpha V(x)| \le \varepsilon_{V,\alpha}(1 + |x|)^{-2-\delta} \tag{2}$$

を満たす.

ポテンシャル V が恒等的に 0 i.e., $V(x) \equiv 0$ の場合には，Veselić (J. Operator Theory,(1991)) により，以下のエネルギー安定性が成り立つ.

Theorem 1 (Veselić)**.** ポテンシャルが $V \equiv 0$ を満たしていると仮定する．この時，任意の初期値 $\psi_{0,0} \in H^{1/2}(\mathbf{R}^n)$, $\psi_{0,1} \in H^{-1/2}(\mathbf{R}^n)$ と $t \in \mathbf{R}$ に対して，初期値，t に依らない定数 $0 < \gamma_1(q_E) < \gamma_2(q_E)$ が存在して，

$$\begin{aligned} \gamma_1(q_E)\left(\|\psi_0\|^2_{H^{1/2}(\mathbf{R}^n)} + \|\psi_1\|^2_{H^{-1/2}(\mathbf{R}^n)}\right) &\le \|\psi(t,x)\|^2_{H^{1/2}(\mathbf{R}^n_x)} + \|((i\partial_t + q_E)\psi)(t,x)\|^2_{H^{-1/2}(\mathbf{R}^n_x)} \\ &\le \gamma_2(q_E)\left(\|\psi_0\|^2_{H^{1/2}(\mathbf{R}^n)} + \|\psi_1\|^2_{H^{-1/2}(\mathbf{R}^n)}\right) \end{aligned}$$

が成立する.

Main Theorems

1.[時間に依存した電場への拡張]
まずは，継続して $V = 0$ を仮定する．$q_E = qE\cdot x$ は空間一様な定電場と呼ばれ，粒子をベクトル $qE/|qE|$ 方向へ加速 (減速) させる．この一様電場の中で時間に依存しているものも扱われるべき対象である．この時間に依存した電場 $E(t)$ の中で，特別な時間依存電場で (1) の解が $q_E = qE(t)\cdot x$ として Theorem 1 と同様の結果を示した．ここで特別な電場とは，例えば，一次元の場合には，

$E(t) = E$ (定電場)
$E(t) = E(1 + |t|)^{-\rho}$, $0 < \rho \le 1$ (時間減衰する電場)
$E(t) = P(t)^2$, $P(t)$ は任意の滑らかな周期関数

のような電場が含まれる.

2.[ポテンシャルを含む場合への拡張]
$V \neq 0$ を仮定する． $V(x)$ が (2) を満たす場合に (1) の解が,

$$\gamma_1(q_E)\left(\|\psi_0\|^2_{H^{1/2}(\mathbf{R}^n)} + \|\psi_1\|^2_{H^{-1/2}(\mathbf{R}^n)}\right) \le \|\psi(t,x)\|^2_{H^{1/2}(\mathbf{R}^n_x)} + \|((\mathbf{i}\partial_\mathbf{t} + \mathbf{qE}\cdot\mathbf{x})\psi)(t,x)\|^2_{H^{-1/2}(\mathbf{R}^n_x)}$$
$$\le \gamma_2(q_E)\left(\|\psi_0\|^2_{H^{1/2}(\mathbf{R}^n)} + \|\psi_1\|^2_{H^{-1/2}(\mathbf{R}^n)}\right)$$

を満たすことを示した．ここで，電場は定電場のみを扱っている．

3.[散乱理論]
エネルギー安定性を証明するために，まず，以下の散乱を示した：
(1) 式において，$q_E = qE\cdot x + V$ の解を $\psi(t,x)$, 初期値を ψ_0, ψ_1 (そのままの表記) と表記し，$q_E = qE\cdot x$ の場合の解を $\psi_0(t,x)$, 初期値を $\psi_{0,0}$, $\psi_{0,1}$ と表記する． この時，任意の初期値 $\psi_{0,0}$, $\psi_{0,1}$ に対して

$$\lim_{t\to\pm\infty}\left(\|\psi(t,x)-\psi_0(t,x)\|^2_{H^{1/2}(\mathbf{R}^n_x)} + \|(i\partial_t + qE\cdot x)(\psi(t,x)-\psi_0(t,x))\|^2_{H^{-1/2}(\mathbf{R}^n_x)}\right) = 0. \qquad (3)$$

となるような ψ_0, ψ_1 が存在する (existence of wave operators) ことを示し，さらに，任意の初期値 ψ_0, ψ_1 に対して，(3) が成立すような $\psi_{0,0}$, $\psi_{0,1}$ が存在する (asymptotic completeness) ことを示した．