Singular solutions and bifurcation diagrams of elliptic equations with exponential nonlinearity [1]

菊池　弘明　(津田塾大学)

次の非線形固有値問題について考える.

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \exp[u^p] & \text{in } B_1, \\ u = 0 & \text{on } \partial B_1. \end{cases} \tag{1}$$

ここで, $B_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < 1\right\}$, $d \geq 2, \lambda > 0$であり, $p \geq 1$とする.

(1) について直ちに分かることは, 最大値原理より, 解は任意の $x \in B_1$ に対して, $u(x) > 0$ となる. つまり, (1) の非自明解は全て正値解となる. また, Gidas-Ni-Nirenberg (1979) より, 正値解は球対称で, 動径方向に関して単調減少になる.

この方程式は, $p = 1$ のときは, Liouville-Gelfand 問題などとよばれており, 様々な結果が知られている. ここでは, $p \geq 1$ という一般の場合において, 特異解の存在と正則解の分岐について調べることが目的である. ここで, 特異解とは, $\lim_{|x|\to 0} u(x) = \infty$ となるような (1) の解のことをいい, それに対して, $\|u\|_{L^\infty} < \infty$ となるような (1) の解を正則解という.

まず, 3次元以上について考える. $p = 1$ については, $\lambda_{1,\infty} = 2(d-2)$ のとき, (1) は明示的に書ける特異解 $W_1(x) = -2\log|x|$ が存在することが分かる. しかし, $p > 1$ のときには, 特異解が存在すること自体が自明でない. $p > 1$ のときには次のような漸近形を持つ特異解を得た.

定理 1. *$d \geq 3, p \geq 1$ とする. ある $\lambda_{p,\infty} > 0$ が存在して, $\lambda = \lambda_{p,\infty}$ のとき, 次を満たす (1) の特異解 W_p をもつ.*

$$W_p(x) = \left[-2\log|x| - (1-\frac{1}{p})\log(-\log|x|)\right]^{\frac{1}{p}} + o\left((\log|x|)^{-1+\frac{1}{p}}\right) \qquad as\ |x| \to 0.$$

次に, 定理 1 で得た特異解と正則解の関係に関する結果を述べる. Dancer [1] により, (1) の正則解の大域的な分岐 $\mathcal{C}$ が存在する.

$$\mathcal{C} = \left\{(\lambda(\gamma), u(x,\gamma)) \mid \gamma = \|u\|_{L^\infty},\ 0 < \gamma < \infty\right\}.$$

このとき, 以下が得られた.

定理 2. *$d \geq 3, p \geq 1$ とする. $(\lambda_{p,\infty}, W_p)$ を定理 1 で得た特異解とし, $(\lambda(\gamma), u(x,\gamma)) \in \mathcal{C}$ とする. すると, 次が成り立つ.*

$$(\lambda(\gamma), u(x,\gamma)) \to (\lambda_{p,\infty}, W_p(x)) \quad in\ \mathbb{R} \times C^1_{loc}(B_1 \setminus \{0\})\ as\ \gamma \to \infty.$$

さらに, 正則解の大域的な分岐 $\mathcal{C}$ の形状に関する結果を述べる. まず, $p = 1$ のときは, Joseph and Lundgren [2] により, $\mathcal{C}$ は $3 \leq d \leq 9$ ならば, $\lambda = \lambda_{1,\infty}(= 2(d-2))$ を軸にして, 無限個の折れ曲がりを持ち, $d \geq 10$ のときは折れ曲がりしないことが示された. そこで, 今回は, $p = 1$ の場合の結果を一般化した $p \geq 1$ の場合においても同様に, $\mathcal{C}$ は $3 \leq d \leq 9$ ならば, $\lambda = \lambda_{p,\infty}$ を軸に無限個折れ曲がりを持つことを示すことが出来た. 具体的には, 次のような結果を得た.

---

[1] この講演は Juncheng Wei 氏 (University of British Columbia) との共同研究に基づくものである

定理 3. $3 \le d \le 9, p \ge 1$ とする．$\lambda_{p,\infty} > 0$ を定理 *1*で得られたものとする．すると，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，$|\lambda - \lambda_{p,\infty}| > 0$ が十分小さければ，(1) は少なくとも k 個の相異なる解を持つ．特に，$\lambda = \lambda_{p,\infty}$ のとき，(1) は無限個の解をもつ．

Dancer [1] も，単位球 B_1 を含む一般の空間領域に対して，$\mathcal{C}$ は無限個の折れ曲がりを持つことを示した．しかし，[1] においては，特異解を得ておらず，定理 3 のほうが分岐の構造に関しては明確であると思われる．

$d \ge 10$ の場合，大域的な分岐 $\mathcal{C}$ がどのようになっているのかは不明であるが，それに関連する特異解 W_p のモース指数 m_∞ についての結果を得ることが出来た．　ここで，モース指数 m_∞ は以下で定義される．

$$m_\infty = \max\Big\{ \dim X \mid X \subset H_0^1(B_1) \text{ is a subspace such that}$$
$$\big\langle (-\Delta - pW_p^{p-1}e^{W_p^p})v, v \big\rangle < 0 \text{ for } v \in X \setminus \{0\} \Big\}.$$

$3 \le d \le 9, p \ge 1$ ならば，$m_\infty = \infty$ であることが分かる．何故モース指数と分岐の形状が関連しているかというと，もし，$m_\infty = \infty$ であるならば，定理 2 を用いることにより，大域的な分岐 $\mathcal{C}$ は無限個折れ曲がりを持つことが証明できるからである．これに対して，$d \ge 11$ の場合は，次を得ることが出来た．

定理 4. $d \ge 11, p \ge 1$ とする．W_p を定理 *1*で得た (1) の特異解とする．すると，$m_\infty < \infty$．

以後では，2 次元についての結果を述べる．2 次元においては，$p > 1$ ならば，特異解が存在することが分かった．

定理 5. $d = 2, p > 1$ とする．ある $\lambda_{p,\infty} > 0$ が存在して，$\lambda = \lambda_{p,\infty}$ のとき，次を満たす (1) の特異解 W_p をもつ

$$W_p(x) = \left[-2\log|x| - (2 - \frac{1}{p})\log(-\log|x|) \right]^{\frac{1}{p}} + o\left((\log|x|)^{-1+\frac{1}{p}} \right) \quad \textit{as } |x| \to 0.$$

さらに，この特異解のモース指数については次が成り立つ．

定理 6. $d = 2, p > 1$ とする．W_p を定理 *5*で得た (1) の特異解とする．すると，$m_\infty = \infty$．

$d = 2$ においては，$1 \le p \le 2$ ならば，定理 2 のような結果は得られないことが知られている．具体的には，Atkinson and Peletier (1986) は $(\lambda(\gamma), u(x,\gamma)) \in \mathcal{C}$ において $\lim_{\gamma\to\infty} \lambda(\gamma) = 0$ となることを証明した．それに対して，McLeod and McLeod (1988) により，$p > 2$ ならば，ある定数 $C > 0$ が存在して，$\liminf_{\gamma\to\infty} \lambda(\gamma) \ge C$ となる．講演では，$d = 2$ においては，$p = 2$ を境に何故状況が異なるのかを形式的に説明したい．

参考文献

[1] E. N. Dancer, *Some bifurcation results for rapidly growing nonlinearities*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **33** (2013), 153–161.

[2] D. D. Joseph and T. S. Lundgren, *Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources*, Arch. Rational Mech. Anal. **49** (1972/73), 241–269.

[3] H. Kikuchi and J. Wei, *Bifurcation diagram of solutions to elliptic equation with exponential nonlinearity in higher dimensions*, to appear in Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.