STRICHARTZ ESTIMATES FOR SCHRÖDINGER EQUATIONS WITH SLOWLY DECAYING POTENTIALS

水谷 治哉　(大阪大学大学院理学研究科)

$H = -\Delta + V(x)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の Schrödinger 作用素とする．Schrödinger 方程式

$$(i\partial_t - H)u(t,x) = F(t,x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^{1+n}; \quad u|_{t=0} = u_0 \tag{1.1}$$

に対する時間大域的 Strichartz 評価について, $V(x)$ の無限遠方における減衰が $|x|^{-2}$ よりも緩やかな場合 (slowly decaying)

$$|V(x)| \sim |x|^{-\mu} \quad (0 < \mu < 2,\ |x| \to \infty)$$

を考察する．ここで $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $F \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ のとき, 解 u は Duhamel の公式

$$u(t) = e^{-itH}u_0 - i\Gamma_H F(t), \quad \Gamma_H F(t) := \int_0^t e^{-i(t-s)H}F(s)ds$$

で与えられる．まず $H = -\Delta$ のとき, 次の Strichartz 評価はよく知られている：

$$||e^{it\Delta}u_0||_{L^p_t L^q_x} \lesssim ||u_0||_{L^2_x}, \quad ||\Gamma_{-\Delta}F||_{L^p_t L^q_x} \lesssim ||F||_{L^{\tilde{p}'}_t L^{\tilde{q}'}_x}. \tag{1.2}$$

ここで $L^p_t L^q_x = L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{R}^n))$, (p,q), $(\tilde{p},\tilde{q})$ はどちらも次を満たす許容対である：

$$p, q \geq 2, \quad 2/p = n(1/2 - 1/q), \quad (p,q,n) \neq (2,\infty,2). \tag{1.3}$$

実数値ポテンシャル $V(x)$ を摂動した場合にも, 次の条件 (very short-range)

$$|V(x)| \lesssim \langle x \rangle^{-\mu} \quad (\mu > 2)$$

とゼロエネルギーに対する正則性のもとで, $n = 2$ を除いて, 散乱状態 $P_{\mathrm{ac}}(H)u$ の Strichartz 評価が示されている．また V が逆 2 乗ベキ $|x|^{-2}$ の場合にも多数の研究がある．以上の結果は (1.2) と Duhamel の公式及び滑らかな摂動の理論を用いて $|V|^{1/2}e^{-itH}$ の $L^2_t L^2_x$ 評価に帰着させることで証明される (例えば [7, 5] 及びその参考文献を参照せよ)．一方で V が slowly decaying の場合, 重み付き $L^2_t L^2_x$ 評価の研究はいくつかあるが ([6, 3] など), $\rho < 1$ のとき $\langle x \rangle^{-\rho}$ が Δ-smooth ではないため ($\langle x \rangle^{-\rho} e^{it\Delta} : L^2_x \not\to L^2_t L^2_x$), このような単純な手法を用いた Strichartz 評価の証明は期待できない．さらに, 次の反例が知られている．

例 ([4])**.** $n \geq 2$, $V \in C^3(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $0 \leq \mu < 2$ として, $|x| \gg 1$ のとき V は $-\mu$ 次斉次 $V(r\theta) = r^{-\mu}V(\theta)$ で, $V|_{S^{n-1}}$ は非退化な最小点を持ち, その点における最小値が 0 とする．このとき, 任意の許容対に対して, 時間大域的 Strichartz 評価は (一般には) 成立しない．

ここで球対称関数はこの仮定をみたさないことに注意する．特に, クーロンポテンシャルを含む斉次ポテンシャル $a|x|^{-\mu}$ ($0 < \mu < 2$, a は定数) の場合に Strichartz 評価が成立するかどうかは数理物理への応用において重要と思われる．

今回はその第一歩として, ポテンシャルが正値の場合に通常の Strichartz 評価が成り立つことを紹介する．以下, $n \geq 2$, $0 < \mu < 2$ と仮定する．

定理 1 (ポテンシャルが滑らかな場合)**.** $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ は次の 3 条件を満たすとする：

$$|\partial_x^\alpha V(x)| \le C_\alpha \langle x\rangle^{-\mu-|\alpha|}, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,$$
$$V(x) \ge C_1\langle x\rangle^{-\mu}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$
$$-x\cdot\nabla_x V(x) \ge C_2\langle x\rangle^{-\mu}, \quad |x| \ge \exists R > 0.$$

ここで $C_\alpha, C_1, C_2 > 0$. このとき, (1.3) を満たす任意の許容対 (p,q) に対して,

$$||e^{-itH}u_0||_{L_t^pL_x^q} \lesssim ||u_0||_{L_x^2}.$$

さらに $p=\tilde{p}=2$ のときを除いて非斉次項 $\Gamma_H F$ に対する Strichartz 評価も成り立つ.

この仮定を満たす V の典型例は $a\langle x\rangle^{-\mu}$ $(a>0)$. 証明には変数係数 Schrödinger 方程式に対する手法 [2, 1] を用いる. 主な道具は H の作用素解析を用いた Littlewood-Paley 分解, e^{-itH} に対する磯崎-北田型超局所パラメトリックスと超局所的な伝播評価, 重み付き $L_t^2L_x^2$ 評価など. 次に, $-\mu$ 次斉次正値ポテンシャルに対して, 以下が得られる.

系 2. $V(x)=a|x|^{-\mu}$, $a>0$, $(p,q),(\tilde{p},\tilde{q})$ は許容対であって端点でない $(p,\tilde{p}>2)$ とする. このとき (1.1) の解に対して, 以下が成り立つ：

$$||u||_{L_t^pL_x^q} \lesssim ||u_0||_{L_x^2} + ||F||_{L_t^{\tilde{p}'}L_x^{\tilde{q}'}}.$$

注意. 系 **2** について, V の局所特異性に対する仮定はもう少し一般化することができる. 例えば, $n\ge 3$ のとき V が次の 2 条件を満たせば十分である：

- 定理 **1** の仮定をみたす V_1 と台がコンパクトな V_2 があって $V=V_1+V_2$.
- $(x\cdot\nabla)^\ell V \in L^{n/2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ $(\ell=0,1,2)$. さらに, 任意の $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\langle(-2\Delta - x\cdot\nabla V)f,f\rangle \gtrsim ||\nabla f||_{L^2}^2$$
$$|\langle(2V + x\cdot\nabla V)f,f\rangle| \lesssim ||\langle H\rangle^{1/2}f||_{L^2}^2,$$
$$|\langle(2x\cdot\nabla V + (x\cdot\nabla)^2V)f,f\rangle| \lesssim \langle(-2\Delta - x\cdot\nabla V)f,f\rangle.$$

例えば, $\mu\in(0,2)$, $\nu\in[0,2]$ のとき $V(x)=|x|^{-\nu}\langle x\rangle^{\nu-\mu}$ はこれらの仮定を満たす.

References

[1] J.- M. Bouclet, H. Mizutani, *Global in time Strichartz inequalities on asymptotically flat manifolds with temperate trapping*, preprint. arxiv.org/abs/1602.06287

[2] J. -M. Bouclet, N. Tzvetkov, *On global Strichartz estimates for non trapping metrics*, J. Funct. Analysis, **254** (2008), 1661–1682.

[3] S. Fournais, E. Skibsted, *Zero energy asymptotics of the resolvent for a class of slowly decaying potentials*, Math. Z. 248 (2004) 593–633.

[4] M. Goldberg, L. Vega, N. Visciglia, *Counterexamples of Strichartz inequalities for Schrödinger equations with repulsive potentials*, Int. Math. Res. Not. (2006), Art. ID 13927

[5] H. Mizutani, *Remarks on endpoint Strichartz estimates for Schrödinger equations with the critical inverse-square potential*, J. Differential Equations **263** (2017), 3832–3853

[6] S. Nakamura, *Low energy asymptotics for Schrödinger operators with slowly decreasing potentials*, Commun. Math. Phys. **161** (1994), 63–76

[7] I. Rodnianski, W. Schlag, *Time decay for solutions of Schrödinger equations with rough and time-dependent potentials*, Invent. Math. **155** (2004), 451–513