# MODIFIED KORTEWEG-DE VRIES EQUATION
# の解の漸近的振る舞いについて

林　仲夫

Science University of Tokyo
e-mail: nhayashi@rs.kagu.sut.ac.jp

**Abstract.**　次の Modified Korteweg-de Vries equation の解の漸近的振る舞いについて P.I. Naumkin との共同研究によって得られた結果について報告する。

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{3}u_{xxx} + \partial_x u^3 = 0, & t, x \in \mathbf{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{MKdV}$$

結果を述べる前に過去に得られた一般化された Korteweg-de Vries equation

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{3}u_{xxx} + \partial_x |u|^{\rho-1}u = 0 \quad \rho > 1, & t, x \in \mathbf{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{gKdV}$$

についての結果を簡単に紹介する。時間局所解については多くの人によって研究されている。例えば [1] およびその参考文献を参照。ここでは解の漸近的振る舞えについて考えるのでこの方面の結果について紹介する。次の問題を考える。

**問題.**　次命題が成立する *Banach* 空間 $Y$ は存在するか？
*If*

$$u_0 \in Y, \quad \|u_0\|_Y = \epsilon$$

*where* $\epsilon$ *is sufficiently small, then there exists a unique* $u_+ \in L^2$ *such that*

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t) - \mathcal{U}(t)u_+\|_{L^2} = 0, \tag{1.1}$$

*where* $u$ *is the solution of (gKdV) and* $\mathcal{U}(t)f = \mathcal{F}^{-1}e^{\frac{it}{3}\xi^3}\hat{f}$. また解の時間減衰についてはどのようなことがいえるか。

---

神楽坂セミナー, 1999, 7,24

Key Words: Modified Korteweg - de Vries Equation, Large Time Asymptotics

**Th 1.1, [2].** $\rho > 5$ , $Y = L^1 \cap H^{1,0}$ とする。ここで

$$H^{m,s} = \{f \in L^2; \|(1-\partial_x^2)^{m/2}(1+x^2)^{s/2}f\|_{L^2} < \infty\}$$

このとき *(1.1)* は成立する。さらに次の時間減衰が得られる。

$$\|u(t)\|_\infty \le C(1+t)^{-1/3}.$$

**Th 1.1** の証明方法. $L^\infty - L^1$ time decay estimates

$$\|\mathcal{U}(t)f\|_\infty \le C|t|^{-\frac{1}{3}}\|f\|_1.$$

非線型項 $|u|^{\rho-1}u$ の $\rho$ が小さい場合について考えたい。

この W. Strauss 仕事は S.Klainerman [3],S. Klainerman and G. Ponce [4], J. Shatah [5] and W. Strauss [6] らによって次のように改良された.

**Th 1.2.** $\rho > (5+\sqrt{21})/2 \approx 4.79$ , $Y = L^{2\rho/(2\rho-1)} \cap H^{1,0}$ とする。このとき *(1.1)* は成立する。さらに次の時間減衰が得られる。

$$\|u(t)\|_{2\rho} \le C|t|^{-\frac{1}{3}(1-\frac{2}{2\rho})}.$$

**Th 1.2** の証明方法. $L^p - L^{\bar{p}}$ time decay estimates

$$\|\mathcal{U}(t)f\|_p \le C|t|^{-\frac{1}{3}(1-\frac{2}{p})}\|f\|_{\bar{p}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{\bar{p}} = 1.$$

G. Ponce and L. Vega [7] は $\rho$ の値を $\rho > (9+\sqrt{73})/4 \approx 4.39$ に改良した.

**Th 1.3.** $\rho > (9+\sqrt{73})/4 \approx 4.39$, $Y = L^1 \cap H^{1,0}$ とする。このとき *(1.1)* が成立。さらに次の時間減衰が得られる。

$$\|u(t)\|_p \le C|t|^{-\frac{1}{3}(1-\frac{2}{p})}, \quad \|D^{1/2}u(t)\|_\infty \le C|t|^{-1/2}, \quad D^{1/2} = (-\partial_x^2)^{1/4}.$$

**Th 1.3** の証明方法. $L^\infty$ time decay estimates of $1/2$ derivatives

$$\|D^{1/2}\mathcal{U}(t)f\|_\infty \le C|t|^{-\frac{1}{2}}\|f\|_1 \tag{a}$$

F.M. Christ and M.I. Weinstein [8] はさらに彼らの結果を改良して次の結果を得た。

**Th 1.4.** *$\rho > (23-\sqrt{57})/4 \approx 3.86$, $Y = L^1 \cap H^{1,0}$ とする。このとき (1.1) と次の時間減衰が成立する。*

$$\|u(t)\|_\infty \le C|t|^{-\frac{1}{3}(1-\frac{2}{p})}, \quad \|D^{1/2}u(t)\|_\infty \le C|t|^{-1/2},$$
$$\|u(t)\|_p \le C|t|^{-\frac{1}{3}(1-\frac{1}{p})} \quad p > 4.$$

**Th 1.4 の証明方法.** $L^\infty$ time decay estimates of 1/2 derivatives (a) and $L^p(p>4)-L^1$ time decay

$$\|\mathcal{U}(t)f\|_p \le C|t|^{-\frac{1}{3}(1-\frac{1}{p})}\|f\|_1, \quad p > 4.$$

参考文献 [9] において我々は上の結果を次のように改良した。

**Th 1.5.** *$\rho > 3$, $Y = H^{1,1}$ とする。このとき (1.1) と次の時間減衰が成立する。*

$$\|u(t)\|_p \le |t|^{-\frac{1}{3}(1-\frac{1}{p})}, \quad p > 4, \quad \|uu_x(t)\|_\infty \le \frac{1}{|t|^{\frac{2}{3}}(1+|t|)^{\frac{1}{3}}},$$

**Th 1.5 の証明方法.** New function space was introduced

$$X = \{f \in C(\mathbf{R}^+; L^2); |||f|||_X = \sup_{t\in[0,\infty)} \|f(t)\|_X < \infty\},$$

where

$$\|f(t)\|_X = \|u(t)\|_{1,0} + \|\partial_x \mathcal{J}u(t)\| + \|D^{\frac{1}{2}-\epsilon}\mathcal{J}u(t)\|, \quad D^{\frac{1}{2}-\epsilon} = (-\partial_x^2)^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\epsilon)}$$

このように $\rho > 3$ の場合は命題を成立させる Banach 空間 $Y$ が存在する。ところで $\rho = 3$ の時は (1.1) が成立するような $Y$ が存在しないことが [10] によってわかっている。

参考文献 [11] で我々は次の結果を得た。

**Theorem 1.1.** *$u_0 \in H^{1,1}$ are real, $\int u_0(x) = 0$ and the norm $\|u_0\|_{1,1} = \epsilon$ is sufficiently small. Then there exists a unique global solution $u \in C\left(\mathbf{R}; H^{1,1}\right)$ of the Cauchy problem for the modified KdV equation (MKdV) such that*

$$\sqrt[3]{t^2}\sqrt[3]{1+|t|}\|u(t)u_x(t)\|_\infty \le C\epsilon \quad \textit{and} \quad (1+|t|)^{\frac{1}{2}(1-\frac{2}{\beta})}\|u(t)\|_\beta \le C\epsilon \quad (4 < \beta < \infty)$$

*for all $t \in \mathbf{R}$.*

**Theorem 1.2.** *Let $u$ be the solution of the Cauchy problem (MKdV) obtained in Theorem 1.1. Then there exist a unique function $W \in L^\infty$ such that*

$$\left\|\mathcal{F}\left(U(-t)u\right)(t) - W\exp\left(-3i\pi|W|^2\log t\right)\right\|_\infty \le C\epsilon t^{-\lambda},$$

*where $0 < \lambda < \frac{1}{21} - C\epsilon$*

## References

1. C.E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg - de Vries equation via contraction principle*, Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), 527-620.
2. W. Strauss, *Dispersion of low-energy waves for two conservative equations*, Arch. Rat. Mech. Anal. **55** (1974), 86-92.
3. S.Klainerman, *Long time behavior of solutions to nonlinear evolution equations*, Arch. Rat. Mech. Anal. **78** (1982), 73-89.
4. S.Klainerman and G. Ponce, *Global small amplitude solutions to nonlinear evolution equations*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 133-141.
5. J. Shatah, *Global existence of small solutions to nonlinear evolution equations*, J. Diff. Eq. **46** (1982), 409-425.
6. W.A. Strauss, *Nonlinear scattering theory at low energy*, J. Funct. Anal. **41** (1981), 110-133.
7. G. Ponce and L. Vega, *Nonlinear small data scattering for the generalized Korteweg - de Vries equation*, J. Funct. Anal. **90** (1990), 445-457.
8. F.M. Christ and M.I. Weinstein, *Dispersion of small amplitude solutions of the generalized Korteweg-de Vries equation*, J. Funct. Anal. **100** (1991), 87-109.
9. N. Hayashi and P.I. Naumkin, *Large time asymptotics of solutions to the generalized Korteweg - de Vries equation*, J. Funct. Anal. **159** (1998), 110-136.
10. M.A. Rammaha, *On the asymptotic behavior of solutions of generalized Korteweg - de Vries equation*, J. Math. Anal. Appl. **140** (1989), 228-240.
11. N. Hayashi and P.I. Naumkin, *Large time behavior of solutions for the modified Korteweg - de Vries equation*, IMRN (1999 no. 8), 395-418.