

\$L^2\$ well-posedness on Cauchy problem of 3rd order Schrödinger-type equations

古財 俊秀 (東京理科大・理)

ここでは 3 階の偏微分作用素を持つ発展方程式の Cauchy 問題を考える.

$$(1) \quad \begin{cases} (\partial_t + a^w(x, D))u = f \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

次の条件を仮定する.

- (A0) $a = ia_3 + a_2 + a_1 + a_0$, $a_j \in S_{1,0}^j$ ($0 \leq j \leq 3$) a_3 は実表象.
- (A1) $e(x, \xi) \geq \delta \langle \xi \rangle$ for $\exists \delta > 0$ かつ $\{e, a_3\}, \{e, a_2\} \in S_{1,0}^1$ であるような $e \in S_{1,0}^1$ が存在する.
- (A2) $H_{a_3+Ima_2}p + Re(a_2 + a_1) \geq -C$ となるような実表象 $p \in S_{1,0}^1$ と $C > 0$ が存在する.
- (A3) $H_{a_3+Ima_2}p + Re(a_2 + a_1) \geq -K \log \langle \xi \rangle - K'(\log \langle \xi \rangle)^2 - K''(\log \langle \xi \rangle)^4 - K'''(\log \langle \xi \rangle)^5 - C$ となるような実表象 $p \in S(\log \langle \xi \rangle, |dx|^2 + \langle \xi \rangle^{-2} |d\xi|^2)$ と $K, K', K'', K''', C > 0$ が存在する.

そのとき次の定理が成り立つ.

定理 1.1 $s \in \mathbf{R}$ とし, (A0), (A1), (A2) を仮定する. そのとき $\forall u_0 \in H^s, \forall f \in L^1([0, T]; H^s)$ に対して, (1) の解 $u \in C^1([0, T]; H^s)$ が存在して,

$$\|u(t)\|_s \leq C_1(\|u(0)\|_s + \int_0^t \|f(\tau)\|_s d\tau), \quad (0 \leq t \leq T)$$

が成り立ち, 解は $C^1([0, T]; H^{-\infty})$ で一意である. さらに $f \in L^2([0, T]; H^s)$ ならば $u \in L^2([0, T]; X^s)$ は次を満足する.

$$\int_0^t \|u(\tau)\|_{X^s}^2 d\tau \leq C_2(\|u(0)\|^2 + \int_0^t \|f(\tau)\|_s^2 d\tau).$$

ここで X^s は次の norm を持つ Hilbert 空間とする.

$$\|u\|_{X^s}^2 = ((H_{a_3+Ima_2}p + Re(a_2 + a_1))^w(x, D)\langle D \rangle^s u, \langle D \rangle^s u) + C_s \|u\|_s^2.$$

ここで C_s は十分大きな定数とする.

定理 1.2 $s \in \mathbf{R}$ とし, (A0), (A1), (A3) を仮定する. そのとき $\forall u_0 \in H^s, \forall f \in L^1([0, T]; H^s)$ に対して, (1) の解 $u \in C^1([0, T]; H^{s-\gamma})$ が存在して,

$$\|u(t)\|_{s-\gamma} \leq C_1(\|u(0)\| + \int_0^t \|f(\tau)\|_s d\tau), \quad (0 \leq t \leq T)$$

が成り立ち, $C^1([0, T]; H^{-\infty})$ で一意である. ここに $\gamma, C_1 > 0$ で γ は s に無関係な定数である.