複素 Ginzburg-Landau 方程式の周辺

横田　智巳　（東京理科大)

本講演では, 岡沢　登 先生との共同研究 [**8**] に基づき, 複素 Ginzburg-Landau 方程式の大域的強解の一意存在定理およびその一般化について解説する.

1. 序

複素 Ginzburg-Landau 方程式は, 今から約 20 年前に Newell-Whitehead [**7**] によって Navier-Stokes 方程式から導き出され, 最近では物理的にも重要な方程式として盛んに研究されている (Cross-Hohenberg [**2**] 参照). まず, 次の複素 Ginzburg-Landau 方程式の初期値境界値問題を考える.

$$
\text{(CGL)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - (\lambda + i\alpha)\Delta u + (\kappa + i\beta)|u|^{p-1}u - \gamma u = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \end{cases}
$$

ここで, Ω は $\mathbb{R}^N$ の領域で, その境界 $\partial\Omega$ は C^2 級で有界（もしくは $\Omega = \mathbb{R}^N$）とし, $p \geq 1$, $\lambda > 0,\ \kappa > 0,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ は定数, $i = \sqrt{-1}$, u は複素数値の未知関数とする.

(CGL) に対する大域解の存在について幾つか研究がなされているので、簡単に紹介しておく. C^1-solution については Bu [**1**], Doering-Gibbon-Levermore [**3**], Temam [**10**], Unai [**11**], Yang [**13**] と多くの研究があるが, いずれも次元 N や指数 p に非常に強い制限が付く. 他方, mild solution については Ginibre-Velo [**4, 5**] によって組織的に研究されている. 彼らの研究は, かなり一般的な状況下でされていて非線形項も $|u|^{p-1}u$ のかわりに $g(|u|^2)u$ で置き換えられている. これらの結果に対して、Unai-Okazawa [**12**] は極大単調作用素の簡単な摂動定理を応用して, 条件

$$
|\beta| \leq \frac{2\sqrt{p}}{p-1}\kappa, \quad \lambda\kappa + \alpha\beta > 0
$$

のもとで global strong solution (大域的強解) の一意存在を示した.

我々の目的は, Unai-Okazawa [**12**] にある１つの不等式を改良して条件

$$
\lambda\kappa + \alpha\beta > 0
$$

をはずすことである. また, 一般の複素 Hilbert 空間における極大単調作用素の摂動定理を開発し, もう少し一般的な線形項, 非線形項をもつ (CGL) についても考察する.

2. (CGL) の大域的強解

この節では, (CGL) の大域的強解の一意存在についてその証明の概略と得られた結果を述べる.

"複素" Hilbert 空間 $X := L^2(\Omega;\mathbb{C})$ [内積, ノルムをそれぞれ $(\cdot,\cdot)$, $\|\cdot\|$ とあらわす] において, 次のような作用素を導入する:

$$
\begin{aligned}
Su &:= -\Delta u \quad \text{for} \quad u \in D(S) := H^2(\Omega;\mathbb{C}) \cap H_0^1(\Omega;\mathbb{C}),\\
Bu &:= |u|^{p-1}u \quad \text{for} \quad u \in D(B) := \{u \in X;\ |u|^{p-1}u \in X\}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = L^2(\Omega;\mathbb{C}) \cap L^{2p}(\Omega;\mathbb{C}),\\
Au &:= (\lambda + i\alpha)Su + (\kappa + i\beta)Bu - \gamma u \quad \text{for} \quad u \in D(A) := D(S) \cap D(B).
\end{aligned}
$$

ここで, $H^2(\Omega;\mathbb{C})$, $H_0^1(\Omega;\mathbb{C})$ は L^2 タイプの Sobolev 空間で, $\lambda,\ \kappa,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ とする. このとき (CGL) は次のような抽象的 (非線形) 発展方程式の初期値問題とみなされる:

$$
\text{(IVP)} \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}
$$

ところで, よく知られているように S は X における非負自己共役作用素であるから,

$$
(1) \qquad \lambda > 0 \ \Rightarrow\ (\lambda + i\alpha)S \text{ は } X \text{ で極大単調}
$$

がわかる. 他方, Liskevich-Perelmuter [**6**] によって示された不等式

$$
(2) \quad |\mathrm{Im}(|z|^{p-1}z - |w|^{p-1}w)\overline{(z-w)}| \le \frac{p-1}{2\sqrt{p}}\mathrm{Re}(|z|^{p-1}z - |w|^{p-1}w)\overline{(z-w)}, \ \ z, w \in \mathbb{C}
$$

を用いると,

$$
(3) \qquad |\beta| \le \frac{2\sqrt{p}}{p-1}\kappa \ \Rightarrow\ (\kappa + i\beta)B \text{ は } X \text{ で極大単調}
$$

も容易に示される. (1), (3) より (IVP) に非線形半群理論が使えそうである. 実際, もし仮に $A + \gamma = (\lambda + i\alpha)S + (\kappa + i\beta)B$ が X で極大単調であることがいえたとすると, Kato によって示された次の補題 (例えば Showalter [**9**, p. 180] 参照) が使える.

補題. A は X における非線形作用素, $\gamma \in \mathbb{R}$ とし, $A + \gamma$ が X で極大単調であるとする. このとき, 任意の初期値 $u_0 \in D(A)$ に対して (IVP) の大域的強解が一意的に存在する. ここで大域的強解とは次の (a)~(c) をみたす関数 $u(t)$ である:

(a) $u(t) \in D(A)\ \ \forall\, t > 0$.

(b) $u(\cdot)$ は $[0, T]$ 上 Lipschitz 連続である: $u(\cdot) \in C^{0,1}([0,T];X)\ \ \forall\, T > 0$.

(c) $u(\cdot)$ は $[0, \infty)$ 上 a.e. で強微分可能で (IVP) をみたす.

したがって $A+\gamma=(\lambda+i\alpha)S+(\kappa+i\beta)B$ の極大単調性を示せばよいことになる. これを示すのに Unai-Okazawa [**12**] では不等式

$$\operatorname{Re}(Su, B_\varepsilon u) \geq 0, \quad u \in D(S),\ \varepsilon > 0 \tag{4}$$

(B_ε は B の吉田近似) を用いるため, 付加条件 $\lambda\kappa+\alpha\beta>0$ を仮定しなければならなかった. これに対して, 我々は不等式 (4) をより精密にした次の不等式を示した:

$$|\operatorname{Im}(Su, B_\varepsilon u)| \leq \frac{p-1}{2\sqrt{p}}\operatorname{Re}(Su, B_\varepsilon u), \quad u \in D(S),\ \varepsilon > 0. \tag{5}$$

ここで得られた定数 $\dfrac{p-1}{2\sqrt{p}}$ は (2) とは独立に決定されるのだが, 同じになることに注意する. さて, (5) は $(\lambda+i\alpha)S$ の極大単調性と $(\kappa+i\beta)B$ の極大単調性を結びつける役割をしてくれて, これにより今度は付加条件 $\lambda\kappa+\alpha\beta>0$ を仮定せずに

$$\lambda > 0,\ |\beta| \leq \frac{2\sqrt{p}}{p-1}\kappa \ \Rightarrow\ A+\gamma=(\lambda+i\alpha)S+(\kappa+i\beta)B \text{ は } X \text{ で極大単調} \tag{6}$$

であることを示すことができ, 次の結果を得た.

定理 1. *$\lambda > 0$, $|\beta| \leq \dfrac{2\sqrt{p}}{p-1}\kappa$ とする. このとき, 任意の初期値 $u_0 \in D(A)$ に対して (CGL) の大域的強解 $u(t) := u(x,t)$ が一意的に存在し,*

$$\begin{gathered}
u(\cdot) \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega;\mathbb{C})) \cap L^\infty(0,T;L^{2p}(\Omega;\mathbb{C})),\\
u(\cdot) \in C^{0,1/2}([0,T];H_0^1(\Omega;\mathbb{C})) \cap C^{0,1/(p+1)}([0,T];L^{p+1}(\Omega;\mathbb{C})),\\
\|u(t)\|_{H^1} \leq e^{\gamma t}\|u_0\|_{H^1},\\
\|u(t)-v(t)\|_{L^2} \leq e^{\gamma t}\|u_0-v_0\|_{L^2},\\
\|\nabla u(t)-\nabla v(t)\|_{L^2}^2 \leq c_1 e^{2\gamma t}\|u_0-v_0\|_{L^2},\\
\|u(t)-v(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1} \leq 2^{p-1}c_2 e^{2\gamma t}\|u_0-v_0\|_{L^2}
\end{gathered}$$

をみたす. ここで, $v(t)$ は初期値 $v_0 \in D(A)$ に対する (CGL) の解である. また, c_1, c_2 は $\gamma_+ := \max\{0,\gamma\}$ を用いて次のように与えられる:

$$\begin{aligned}
c_1 &:= \lambda^{-1}(\|Au_0\| + \gamma_+\|u_0\| + \|Av_0\| + \gamma_+\|v_0\|),\\
c_2 &:= \kappa^{-1}\bigl(\lambda + \sqrt{\lambda^2+\alpha^2}\bigr)c_2.
\end{aligned}$$

3. 非線形極大単調作用素の摂動

前の節で説明した極大単調性に基づく証明方法は, 一般の “複素” Hilbert 空間 X において次のような摂動定理としてまとめることができる. この定理は [**8**] で得られていた摂動定理よりも仮定が弱められているので, 応用上便利である.

定理 2. S を X における非負自己共役作用素, B を X における非線形極大単調作用素とし, $D(S)\cap D(B)\neq\phi$ とする. さらに, 次の 2 条件を仮定する.

(I) $\exists\, k_1>0$;

$$|\mathrm{Im}(Bu-Bv,u-v)|\le k_1\mathrm{Re}(Bu-Bv,u-v),\quad u,v\in D(B).$$

(II) $\exists\, k_2>0,\ \exists\, a,\,b,\,c\ge 0$;

$$|\mathrm{Im}(Su,B_\varepsilon u)|\le k_2\mathrm{Re}(Su,B_\varepsilon u)+a\|Su\|^2+b\|B_\varepsilon u\|^2+c\|u\|^2,\quad u\in D(S),\ \varepsilon>0.$$

このとき $(\lambda+i\alpha)S+(\kappa+i\beta)B$ は X で極大単調である. ただし, $\lambda,\kappa,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ は

$$a+\frac{b(\lambda^2+\alpha^2)}{\kappa^2+\beta^2}<\frac{k_1\lambda}{\kappa},$$
$$|\beta|\le k_0^{-1}\kappa\quad(k_0:=\max\{k_1,k_2\})$$

をみたすものとする.

先ほど示せると言った (6) は, 定理 2 で $k_1=k_2,\ a=b=c=0$ としたものを使って得られる.

4. 一般化

定理 2 を用いると非線形項 $|u|^{p-1}u$ の変わりに $g(x,|u|^2)u$ を扱うことができる. ただし, $g\in C(\overline{\Omega}\times[0,\infty);\mathbb{R})\cap C^1(\overline{\Omega}\times(0,\infty);\mathbb{R})$ とし, 非負定数 $c_1,\,c_2,\,\sigma$ が存在し

$$|\nabla_x g(x,s)|\le c_1 g(x,s)+c_2, \tag{7}$$

$$0\le s\frac{\partial g}{\partial s}(x,s)\le\sigma g(x,s)\quad\forall(x,s)\in\Omega\times(0,\infty) \tag{8}$$

とする. このような関数の例として

$$g(x,s)=(|x|^2+1)s^{(p-1)/2}+|x|^2\quad(p\ge1)$$

があげられる ($c_1=c_2=1,\ \sigma=(p-1)/2$). さて, (7), (8) を仮定すると定理 2 の条件 (I) および (II) は $k_1=k_2=\dfrac{\sigma}{\sqrt{1+2\sigma}},\ a\sim\delta,\ b\sim\delta,\ c=O(\delta^{-3})$ $(\delta\downarrow0)$ としてみたされることが示せる. したがって, 定理 2 により, 条件

$$\lambda>0,\quad|\beta|\le\frac{\sqrt{1+2\sigma}}{\sigma}\kappa \tag{9}$$

を仮定すれば, $|u|^{p-1}u$ を $g(x,|u|^2)u$ で置き換えた (CGL) の大域的強解の存在と一意性が得られる. しかも, 条件 (9) は (7) における定数 $c_1,\,c_2$ に依存しない, すなわち, g の x 依存性の影響を受けないということがわかる.

また, 線形項 $-\Delta u$ を $-\sum\partial_k[a_{jk}(x)\partial_j u]$ にまで一般化しても, a_{jk} に適当な条件を仮定すれば, 条件 (9) は不変であることがわかるが長くなるので省略する.

参考文献

[1] C. Bu, On the Cauchy problem for the $1+2$ complex Ginzburg-Landau equation. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* **36** (1994), 313–324.

[2] M. C. Cross and P. C. Hohenberg, Pattern formation outside of equilibrium, *Rev. Modern Phys.* **65** (1993), 851–1089.

[3] C. R. Doering, J. D. Gibbon and C. D. Levermore, Weak and strong solutions of the complex Ginzburg-Landau equation. *Physica D* **71** (1994), 285–318.

[4] J. Ginibre and G. Velo, The Cauchy problem in local spaces for the complex Ginzburg-Landau equation. I. Compactness methods. *Physica D* **95** (1996), 191–228.

[5] J. Ginibre and G. Velo, The Cauchy problem in local spaces for the complex Ginzburg-Landau equation. II. Contraction methods. *Commun. Math. Phys.* **187** (1997), 45–79.

[6] V. A. Liskevich and M. A. Perelmuter, Analyticy of submarkovian semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995), 1097–1104.

[7] A. C. Newell and J. A. Whitehead, Finite bandwidth, finite amplitude convection, *J. Fluid Mech.* **38** (1969), 279–303.

[8] N. Okazawa and T. Yokota, Perturbation theorems for m-accretive operators applied to the nonlinear Schrödinger and complex Ginzburg-Landau equations, preprint (1998).

[9] R. E. Showalter, "Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations," Math. Surv. Mono. vol.49, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[10] R. Temam, "Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics," Applied Math. Sci.,vol.68, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1988; 2nd ed., 1997.

[11] A. Unai, A remark on time-dependent Ginzburg-Landau equations, *SUT J. Math.* **33** (1997), 115–119.

[12] A. Unai and N. Okazawa, Perturbations of nonlinear m-sectorial operators and time-dependent Ginzburg-Landau equations, *Dynamical Systems and Differential Equations* (Springfield, 1996), 259–266, Added Volumes to Discrete Continuous Dynamical Systems, vol.II, Southwest Missouri State Univ., Springfield, 1998.

[13] Y. Yang, On the Ginzburg-Landau wave equation, *Bull. London Math. Soc.* **22** (1990), 167–170.