# 木田雅成「連分数」近代科学社 訂正および変更

2024 年 8 月 4 日

## 初版第二刷の訂正

**p.iv の謝辞** 『角皆宏』を追加.

**定理 6.18 の証明の最後の部分 (p.59)** 最小の $n$ をとると，$\alpha_n$ が繰り返し現れることの証明が自明でないという指摘を受けました．証明を次のように変更します．

『定理 6.15 から大きい $n$ をとると，$\alpha_n = [a_n; a_{n+1}, \ldots] \in R_2(D)$. ~~これをみたす最小の $n$ をあらためて $n$ とすると，~~同じ定理からすべての $m \geq n$ に対して $\alpha_m \in R_2(D)$．ところが命題 6.13 から $R_2(D)$ は有限集合だから，これらの中に一致するものがなくてはいけない．つまり $n$ より大きい $m, \ell\,(m < \ell)$ であって $\alpha_m = \alpha_\ell$ をみたすものが存在する．このとき

$$\alpha_m = [a_m; a_{m+1}, \ldots, a_{\ell-1}, \alpha_\ell] = [a_m; a_{m+1}, \ldots, a_{\ell-1}, \alpha_m].$$

これは，$\alpha = [a_0; a_1, \ldots, \overline{a_m, \ldots, a_{\ell-1}}]$ を示す．

最後に $\alpha \in R_2$ であれば，純循環連分数に展開されることを証明することが残っている．まず $\alpha = [a; \beta] = a + \frac{1}{\beta}$ とすると，共役をとって，$-\frac{1}{\beta'} = a + (-\alpha')$ が成り立つ．ここで $0 < -\alpha' < 1$ に注意すると $-\frac{1}{\beta'} = [a; -\frac{1}{\alpha'}]$．よって $\lfloor \alpha \rfloor = \lfloor -\frac{1}{\beta'} \rfloor$ が成り立つ．

さて上のように $\alpha_n = [a_n; a_{n+1}, \ldots]$ とおくと，任意の $n$ について $\alpha_n \in R_2$ が成立し，$\alpha_m = \alpha_\ell$ をみたす番号 $m, \ell\,(m < \ell)$ が存在する．このとき，

$$\alpha_{m-1} = [a_{m-1}; \alpha_m],\ \alpha_{\ell-1} = [a_{\ell-1}; \alpha_\ell] = [a_{\ell-1}; \alpha_m]$$

となるが，上で証明した式から，

$$a_{m-1} = \lfloor -\frac{1}{\alpha_m{}'} \rfloor = \lfloor -\frac{1}{\alpha_\ell{}'} \rfloor = a_{\ell-1}.$$

これから，$\alpha_{\ell-1} = \alpha_{m-1}$．これを続けると，$\alpha = \alpha_0 = \alpha_{\ell-m}$ となって純循環連分数に展開されることがわかる．』

**p.68 問 7.2** 次のように訂正．『$\alpha$ に対して (7.6) で定義される写像を $\Psi_\alpha$，また $\beta$ に対する写像を $\Psi_\beta$ と表すとき，

$$U\Psi_\alpha(x,y)U^{-1} = \Psi_\beta(x,y)$$

を示せ．』

**p.70 定理 7.6 の証明の後半** 以下のように変更．

『~~次に~~簡約 2 次無理数 $\alpha$ に対して， $A\alpha = \alpha$ をみたす $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ は

$$A = \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x-by}{2} & -cy \\ ay & \frac{x+by}{2} \end{bmatrix}$$

と表される．$x, y > 0$ のときに，$A$ が必ず $\alpha$ の連分数展開からえられることを示そう．$\xi = u\alpha + v$ とおくと，$x, y > 0$ により，(7.5) から $\xi > 1$ である．$\alpha$ は簡約無理数だから（中略）$|\xi'| < 1$ となる．ここで $u = ay > 0$ であるから，

$$u > \xi' = u\alpha' + v > -u + v.$$

』

**p.73 下から 6 行目** 『逆元は $\pm\varepsilon^{-n}$ だから』に訂正．

**p.146, l.11** $[\![a_0+1; \underbrace{2,\ldots,2}_{a_1-1\text{ 個}}, a_2+2, \ldots, \underbrace{2,\ldots,2}_{a_{k-1}-1\text{ 個}}, a_k+2, \overline{2}]\!] = [a_0; a_1, \ldots, a_k]$

**p.153, l.12**

$$\begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ b_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1u_1 & 1 \\ b_1u_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2u_2 & 1 \\ b_1u_2u_1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \to \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ b_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1u_1 & 1 \\ b_1u_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2u_1 & 1 \\ b_2u_2u_1 & 0 \end{bmatrix}$$

# 初版第一刷の訂正

**p.4 問 1.1 (iii)** $C(a) \cap C(b) = \emptyset \to C(a) \cap C(b) \neq \emptyset$

**p.9 l.1** 右側の行列の $(1,1)$ 成分：77 → 89

**p.10 l.1** 「(2.4) 両辺の行列式」 → 「(2.4) の両辺の行列式」

**p.21, 系 3.13** 「数列 $(q_n)$ は単調増加列で」→ 「数列 $(q_n)$ は $n \geq 1$ に対して単調増加列で」

**p.21, 系 3.13, 証明の 2 行目** 「$n = 0, 1$ のとき成り立つ」→ 「$n = 1$ のとき成り立つ」

**p.22, 下から l.8** 不等号を次のように訂正.

$$[a_{k+1}; a_{k+2}, \ldots, a_n] > \lfloor [a_{k+1}; a_{k+2}, \ldots, a_n] \rfloor = a_{k+1} \geq 1$$

**p.26, 下から l.6**

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto \lim_{n \to \infty} [a_0; a_1, \ldots, a_n]$$

**p.30, 系 4.6** 最初に「$k \geq 1$ のとき,」を挿入.

**p.31, 命題 4.7 の証明の 7 行目** 「したがって $n = 1$」→ 「したがって $n = 0$」

**p.31, 命題 4.7 の証明の 10 行目** 左側の等号を $<$ にする．つまり

$$0 < \frac{p_1}{q_1} - \alpha < \frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{1 + a_2} \leq \frac{1}{2}$$

**p.32 命題 4.8 とその証明を次のように変更**

**命題.** $p_n/q_n$ $(n > 1)$ を無理数 $\alpha$ の近似分数とする．

$$\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}, \quad 0 < q \leq q_n$$

をみたす任意の有理数 $p/q$ に対して

$$|q\alpha - p| \geq |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| > |q_n\alpha - p_n|$$

が成立する．特に,

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right|$$

が成り立つ.

*Proof.* 系 4.6 から

$$|q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| > \frac{1}{q_{n+1}} > |q_n\alpha - p_n|.$$

これで最初の式の右側の不等号が示された．左側の不等式を示そう．

$c$, $d$ を変数とする連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

を考える．(3.3) から係数行列の行列式が $(-1)^{n+1}$ なので，整数解 $c, d$ をもつ．これを解くと，

$$c = (-1)^{n+1}(pq_{n-1} - p_{n-1}q), \ d = (-1)^{n+1}(p_nq - q_np).$$

命題の仮定から $d \neq 0$ である．また $c = 0$ ならば，連立一次方程式から

$$|q\alpha - p| = |d(q_{n-1}\alpha - p_{n-1})| \geq |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|$$

が成り立つ．

よって以下では $c \neq 0$ とする．仮定 $q_n > q = cq_n + dq_{n-1}$ から $(c-1)q_n + dq_{n-1} < 0$．ここで $q > 0$ により，$c$, $d$ がともに負であることはないから，これから $c$, $d$ は異符号であることがわかる．一方 $q_n\alpha - p_n$ と $q_{n-1}\alpha - p_{n-1}$ も異符号である．したがって $c(q_n\alpha - p_n)$ と $d(q_{n-1}\alpha - p_{n-1})$ は同符号である．これから，

$$\begin{aligned} |q\alpha - p| &= |c(q_n\alpha - p_n)| + |d(q_{n-1}\alpha - p_{n-1})| \\ &> |d(q_{n-1}\alpha - p_{n-1})| \geq |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|. \end{aligned}$$

以上により，いずれの場合でも

$$|q\alpha - p| \geq |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|$$

が成り立つ．

最後の主張は $q \leq q_n$ を考えれば

$$\begin{aligned} \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| &= \frac{1}{q}|q\alpha - p| > \frac{1}{q}|q_n\alpha - p_n| \\ &= \frac{q_n}{q}\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \end{aligned}$$

によりわかる． □

**p.33 証明のあとの 2 行目** このままでも間違いではないが「$0 < q \leq Q$」に修正.

**p.34 補注 4.10, l.3** 「その手前の近似分数の」 → 「近似分数 $p_n/q_n$ による」

**p.36 3 つ目の●** 「西暦が 400 で 」→「ただし西暦が 400 で」

**p.40 下から l.2** 「$ad - bc$ の曖昧さが」→ 「$ad - bc$ の符号の曖昧さが」

**p.42 側注 17** この側注を次のように変更する.「連分数 $[1; 2, \overline{1, 2}]$ のように循環節が最初から始まる場合は, セミコロンを省略して $[\overline{1, 2}]$ と書くことにする.」

**p.43 l.12** 「$= p_k/q_k$ で, $c > 0$ より」→「$= p_k/q_k$ が成り立つが, $c > 0$ より」

**p.52 下から l.9** $\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \alpha' \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \alpha' \end{vmatrix}^2$

**p.54 命題 6.13 の証明の 1 行目** 「$\alpha$ が $ax^2 + bx + c$ の根であるとすると」→「$\alpha$ は $ax^2 + bx + c$ の根となるので」

**p.70 l.7** 「$n = 1$ で最小で正ににになり, 基本解に対応する」→「$n = 1$ で最小になる. 以降で (7.2) の解は上のように $\alpha$ の連分数展開を使ってすべて得られることを示すので, この $n = 1$ のときの解が基本解に対応する」

**p.72 定理 7.8 の証明の 4 行目** 「$\xi < 0, \eta < 0$ のみたすもの」→「$\xi < 0, \eta < 0$ をみたすもの」

**p.83 定理 8.11 の証明** 3 行目に次を挿入.「また $\mathrm{Tr}(\varepsilon) = x \in \mathbb{Z}$ であるから, 補題 8.4 より $\varepsilon$ は代数的整数になり, さらに, 命題 8.10. . . .」

**p.85 命題 8.15** 命題の最後に次を挿入.「ここで, 例えば (8,3) の $(a_1, \ldots, a_{t-1}) = (a_{t-1}, \ldots, a_1)$ は 2 つの有限数列 $(a_1, \ldots, a_{t-1})$ と $(a_{t-1}, \ldots, a_1)$ が一致することを示す.」

**p.85 補題 8.16 (i)** 「$b = 0$ ならば, 行列」

**p.86 補題 8.16 (ii)** 「$a \neq 0$ ならば, 行列」

**p.94** 問 8.6 の前に次の一文を挿入する.「Fermat の 2 平方和定理にはいろいろな証明が知られているが，この証明では $p = x^2 + y^2$ の解が連分数展開から具体的に求められるのがおもしろい.」

**p.95 2 つ目の●** 「判別式 $D$ の」→「正の判別式 $D$ の」

**p.130 定義 13.2** 「定数多項式に等しいとき」→「定数多項式に等しくなるならば,」

**p.130 式 (13.3)** 分母の大きなカッコをとる.

**p.131 l.5,6,8** これらの行の 3 つの式から等号をとる.

**p.131 定理 13.5** 定理 13.5 の下に以下を挿入.「Roth の定理から $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^{2+\varepsilon}}$ をみたす有理数 $p/q$ は有限個になることがわかるので,」

**p.131 下から 3 行目** 「分母の 2 を」→「分母の指数に現れる 2 を」

**p.131 (13.4) の右辺** $\frac{c}{q^{\frac{n}{2}+\varepsilon}} \to \frac{c}{q^{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}}$

**p.132 証明** 証明の初めに「$a_n$ を正と仮定してよい.」を挿入.

**p.133, l.9** 実際に Thue 方程式が完全に解けるときには解の個数の上限がわかるわけですが，理論的にわかる部分を考慮して「解の個数の上限」を「解の個数の具体的な上界」に変更します.

**著者紹介** 「線形代数学講義 (培風館，2013 年)」→「線形代数学講義［増訂版］(培風館，2023 年)」

足立恒雄先生，中島匠一先生，青木美穂先生，角皆宏先生をはじめ，誤植，間違い等を指摘くださったみなさまに感謝いたします.