平成 30 年 1 月 15 日版

この節を追加する際には VI 章の章末問題で次を用意しておく．

VI.21　$W_1, \ldots, W_r$ を V の部分空間とする．$W_1, \ldots, W_r$ の和空間を

$$W_1 + \cdots + W_r = \{\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_r \mid \boldsymbol{v}_i \in W_i \ (1 \leq i \leq r)\}$$

で定義する．$V = W_1 + \cdots + W_r$ が成り立っているとき，V の元が $W_1, \ldots, W_r$ の元の和として一意的にあらわされるとき，V は $W_1, \ldots, W_r$ の**直和**であるといい，

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$$

とあらわす．このとき次が同値であることを示せ．

(i) $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$

(ii) 任意の i に対して $W_i \cap (W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots W_r) = \{\mathbf{0}\}$

(iii) $\dim V = \dim W_1 + \cdots + \dim W_r$

VI.22　f を n 次元ベクトル空間の 1 次変換とする．f の表現行列として対角行列がとれるための必要十分条件が f の相異なる固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ とするとき，

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$$

であることを示せ．ここで V_{λ_i} は λ_i に対する f の固有空間である．

VI.21 章末問題 V.19 と同様にやればよい．

VI.22 定理 24.6 と章末問題 VI.21(iii) による．

31　複素内積空間

この節では複素数体 $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間である複素ベクトル空間 V の内積を考える．実ベクトル空間の場合と類似の理論を構成するためには内積の正値性がかかせない．そのために実ベクトル空間の内積を拡張したような定義が必要になる．

複素数の性質

複素数の性質をもう一度復習する．複素数 $z \in \mathbb{C}$ は実数 s, t を使って，

$$z = s + ti \ (s, t \in \mathbb{R})$$

と表されるような数である．ここで $i=\sqrt{-1}$ である．s を z の**実部**，t を z の**虚部**とよび，$s=\mathrm{Re}(z)$, $t=\mathrm{Im}(z)$ と表す．$z=s+ti\in\mathbb{C}$ に対して，z の**共役複素数**を

$$\overline{z}=s-ti$$

で定義する．このとき $z,w\in\mathbb{C}$ に対して，次の性質が成り立つ．

$$\overline{\overline{z}}=z,\ \overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w},\ \overline{zw}=\overline{z}\,\overline{w},\ \overline{\frac{1}{z}}=\frac{1}{\overline{z}}\,(z\neq 0).$$

また $z\in\mathbb{C}$ が実数になる条件は $z=\overline{z}$ である．$z=s+ti\in\mathbb{C}$ の絶対値 $|z|$ は

$$|z|=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{s^2+t^2}$$

で定義される．特に，$|z|=|\overline{z}|$ が成り立つ．

以下では複素数を成分とする行列 $A=\begin{bmatrix}a_{ij}\end{bmatrix}$ に対して，

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}\overline{a_{ij}}\end{bmatrix}$$

と書く．

$\mathbb{C}^n$ の標準内積

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^n \text{ に対して}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}={}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{b}}=a_1\overline{b_1}+\cdots+a_n\overline{b_n}$$

と定義する．これを $\mathbb{C}^n$ の**エルミート内積**という．内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ は一般には複素数になる．この内積は次の性質をみたす．

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{C}^n, k \in \mathbb{C}$ に対して,

半双線形性 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$

$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$

$(k\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$

$\boldsymbol{a} \cdot (k\boldsymbol{b}) = \overline{k}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$

エルミート性 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}}$

正値性 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \geq 0$. 等号は $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ のときのみ成り立つ.

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の成分がすべて実数で，$k \in \mathbb{R}$ であれば，上の性質は $\mathbb{R}^n$ の標準内積の性質と完全に一致することに注意する.

$\mathbb{C}^n$ にこの内積をいれて考えるとき, n 次元**ユニタリ空間**とよぶ.

$\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^n$ のノルム $\|\boldsymbol{a}\|$ はこの標準内積を使って,

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$$

で定義される.

問 31.1　$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} i \\ 1-i \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 0 \\ -i \end{bmatrix}$ に対して次を計算せよ.

(i) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$　(ii) $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$　(iii) $\|\boldsymbol{a}\|$

エルミート内積のもつ性質によって，複素ベクトル空間の一般の内積を定義する.

定義 31.1. V を複素ベクトル空間とする．任意の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対して，以下の性質をみたす複素数 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を対応させる写像を V の**内積**という.

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V, k \in \mathbb{C}$ に対して,

半双線形性 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$

$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$

$(k\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

$(\boldsymbol{a}, k\boldsymbol{b}) = \overline{k}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

エルミート性 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}$

正値性 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$ は非負の実数で, 0 になるのは $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ のときのみ.

内積をもつ複素ベクトル空間を**複素内積空間**という.

複素内積空間にも，長さ（ノルム）や，直交の概念を定義することができる.

定義 31.2. V を内積空間とする.

(i) $\boldsymbol{a} \in V$ に対して

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$$

を $\boldsymbol{a}$ の**ノルム**という．この場合も，ノルムは実数であることに注意する.

(ii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ が $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ をみたすとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**直交**するという.

問 31.2 $\left\langle \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{C}^3$ の直交補空間の基底を求めよ.

次の定理 26.5 で与えた不等式はこの場合も成立する.

定理 31.3 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を内積空間 V の任意の元とするとき,

(i) $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \leq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$ (コーシー・シュワルツの不等式)

(ii) $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$ (三角不等式)

証明. 定理 26.5 の証明は今の場合いくらか修正が必要である．(i) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ のときは両辺 0 で不等式が成立する．$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ とする．半線形性から，任意の $s, t \in \mathbb{C}$ に対

して

$$0 \leq (s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}, s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\|^2|s|^2 + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})s\bar{t} + \overline{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}t\bar{s} + \|\boldsymbol{b}\|^2|t|^2$$

が成り立つ．ここで $s = \|\boldsymbol{b}\|^2, t = -(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ とおくと，右辺は

$$\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^4 - 2|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^2 = \|\boldsymbol{b}\|^2\left(\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - |(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^2\right).$$

移項して平方根をとれば求める不等式が得られる．

(ii) は

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 &= \|\boldsymbol{a}\|^2 + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + \overline{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})} + \|\boldsymbol{b}\|^2 \\ &\leq \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| + \|\boldsymbol{b}\|^2\end{aligned}$$

コーシー・シュワルツの不等式から

$$\begin{aligned}&\leq \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| + \|\boldsymbol{b}\|^2 \\ &= (\|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|)^2\end{aligned}$$

により得られる．　□

複素内積空間 V の基底 $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ が

$$(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}$$

をみたすとき**正規直交基底**であるという．

複素内積空間 V の正規直交基底 $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ をとると，V の元と，この基底に関する座標を対応させることにより，V はユニタリ空間 $\mathbb{C}^n$ と同一視される．

命題 31.4　$\mathscr{U} = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ が複素内積空間 V の正規直交基底ならば

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n, \quad \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + b_n\boldsymbol{u}_n \in V$$

に対して，

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = a_1\overline{b_1} + \cdots + a_n\overline{b_n}.$$

命題の主張の右辺は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の正規直交基底 $\mathscr{U}$ に関する座標 $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ のエルミート内積になっている．

証明. 内積の半双線形性から

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n, b_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + b_n\boldsymbol{u}_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i\overline{b_j}(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j).$$

$(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}$ だから，上の和は $i = j$ のところだけが残って，

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i\overline{b_i}.$$

□

グラム・シュミットの直交化法が複素内積空間でもなりたって，0 でない複素内積空間は正規直交基底をもつ.

その証明の基礎となる次の 2 つの命題も成立する.

命題 31.5 W を内積空間 V の部分空間とする．W は V の内積で内積空間になる．$(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r)$ を W の直交基底とする．このとき，$\boldsymbol{a} \in V$ の W への正射影を

$$P_W(\boldsymbol{a}) = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_1)}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_r)}{\|\boldsymbol{u}_r\|^2}\boldsymbol{u}_r$$

と定義する．このとき，$P_W(\boldsymbol{a}) \in W$ であり，$\boldsymbol{a} - P_W(\boldsymbol{a})$ は W の任意のベクトルと直交する.

証明. 命題 27.6 の証明は少し変更が必要である．$P_W(\boldsymbol{a}) \in W$ は明らか．W の任意のベクトルを $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + b_r\boldsymbol{u}_r$ とする．このとき，

$$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - P_W(\boldsymbol{a})) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{b}, P_W(\boldsymbol{a})).$$

右辺の第 1 項は

$$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = (b_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + b_r\boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{a}) = b_1(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{a}) + \cdots + b_r(\boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{a}).$$

また第 2 項は命題 31.4 を使うと

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{b}, P_W(\boldsymbol{a})) &= \left(b_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + b_r\boldsymbol{u}_r, \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_1)}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_r)}{\|\boldsymbol{u}_r\|^2}\boldsymbol{u}_r\right)\\ &= b_1\overline{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_1)} + \cdots + b_r\overline{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_r)}\\ &= b_1(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{a}) + \cdots + b_r(\boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{a}).\end{aligned}$$

以上から $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - P_W(\boldsymbol{a})) = 0$ が得られる. □

命題 31.6　$\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \in V$ が互いに直交するならば 1 次独立である．

証明．証明は命題 27.7 と全く同様である．　□

これらの命題のもとでグラム・シュミットの直交化法は定理 27.5 と同じ証明で成り立つ．

問 31.3　3 次元ユニタリ空間の基底

$$\left(\begin{bmatrix}1\\0\\i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-5\\-2\end{bmatrix}\right)$$

からグラム・シュミットの直交化法により正規直交基底を作れ．

32　ユニタリ行列と正規行列

ユニタリ変換とユニタリ行列

複素内積空間 V の 1 次変換を考えるときには，その V の内積を保つものを考えるのが自然である．すなわち f を V の 1 次変換とするとき，すべての $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ について

$$(f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b})) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \tag{32.1}$$

が成り立つものを考える．このような 1 次変換を**ユニタリ変換**という．

問 32.1　f を複素内積空間 V のユニタリ変換とする．$(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ が V の正規直交基底ならば $(f(\boldsymbol{u}_1), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n))$ も V の正規直交基底になることを示せ．

$\mathscr{U} = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ を複素内積空間 V の正規直交基底とする．

V の 1 次変換 f の $\mathscr{U}$ に関する表現行列を A とする．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ とし，それらの $\mathscr{U}$ に関する座標を

$$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{a}]_{\mathscr{U}}, \quad \boldsymbol{y} = [\boldsymbol{b}]_{\mathscr{U}}$$

とすれば，

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)\boldsymbol{y}$$

が成り立つ．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を f で送ると，

$$f(\boldsymbol{a}) = (f(\boldsymbol{u}_1), \dots, f(\boldsymbol{u}_n))\boldsymbol{x}, \quad f(\boldsymbol{b}) = (f(\boldsymbol{u}_1), \dots, f(\boldsymbol{u}_n))\boldsymbol{y}.$$

表現行列 A の定義から

$$f(\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)A\boldsymbol{x}, \quad f(\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)A\boldsymbol{y}.$$

したがって，f がユニタリ変換であるための条件 (32.1) は，命題 31.4 により，標準内積を使って，

$$A\boldsymbol{x} \cdot A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$$

と書ける．これは

$$^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}\, ^{\mathrm{t}}A\overline{A}\overline{\boldsymbol{y}} = {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{y}}$$

と同値である．したがって，次の命題を得る．

命題 32.1　ユニタリ変換の正規直交基底に関する表現行列 A は

$$^{\mathrm{t}}A\overline{A} = E$$

をみたす．この条件をみたす行列を**ユニタリ行列**という．

V の 1 次変換 f に対して，

$$(f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, f^*(\boldsymbol{b}))$$

がすべての $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して成り立つような 1 次変換 f^* を f の**随伴変換**という．V の基底をとって，f のその基底に関する表現行列を A，また f^* の同じ基底に関する表現行列を B とすると，上と同じ記号のもとで，

$$A\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot B\boldsymbol{y}$$

が成り立つ．すなわち，

$$^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}A\overline{y} = {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}\overline{B}\,\overline{y}.$$

これが任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ について成り立つから $B = {}^{\mathrm{t}}\overline{A}$ となる．$A^* = {}^{\mathrm{t}}\overline{A}$ を A の**随伴行列**という．よって随伴変換は表現行列が随伴行列になるような 1 次変換である．

この記号を使うと A がユニタリ行列であるための条件は

$$A^*A = E$$

とも書ける．逆にユニタリ行列が $\mathbb{C}^n$ のユニタリ変換を定めることも簡単にわかる．

命題 32.2　n 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$ について次は同値.

(i) A はユニタリ行列

(ii) $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ が n 次元ユニタリ空間の正規直交基底

(iii) すべての $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ について，$\|A\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$

証明. (i) $\Longleftrightarrow$ (ii). ユニタリ行列の定義 ${}^{\mathrm{t}}A\overline{A} = E$ から

$$\begin{bmatrix} {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{a}_1} & \cdots & \overline{\boldsymbol{a}_n} \end{bmatrix} = E.$$

左辺の (i,j) 成分は ${}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a}_i\overline{\boldsymbol{a}_j}$ だから，この等式は $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \delta_{ij}$ と同値.

(i) $\Longrightarrow$ (iii). ユニタリ行列ならば，${}^{\mathrm{t}}A\overline{A} = E$ だから，$\|A\boldsymbol{x}\|^2 = A\boldsymbol{x} \cdot A\boldsymbol{x} = {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}{}^{\mathrm{t}}A\overline{A}\overline{\boldsymbol{x}} = {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{x}} = \|\boldsymbol{x}\|^2$. 両辺の正の平方根をとると，(iii) が得られる.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ に対して，仮定より，

$$\|A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\|^2 - \|A\boldsymbol{x}\|^2 - \|A\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}\|^2 - \|\boldsymbol{y}\|^2.$$

一方，

$$\begin{aligned} \|A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\|^2 - \|A\boldsymbol{x}\|^2 - \|A\boldsymbol{y}\|^2 &= (A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) \cdot (A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) - A\boldsymbol{x} \cdot A\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{y} \cdot A\boldsymbol{y} \\ &= {}^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}){}^{\mathrm{t}}A\overline{A}\,\overline{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})} - {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}{}^{\mathrm{t}}A\overline{A}\boldsymbol{x} - {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{y}{}^{\mathrm{t}}A\overline{A}\boldsymbol{y} \\ &= {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}{}^{\mathrm{t}}A\overline{A}\overline{\boldsymbol{y}} + {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{y}{}^{\mathrm{t}}A\overline{A}\overline{\boldsymbol{x}}. \end{aligned}$$

まとめると，

$${}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}{}^{\mathrm{t}}A\overline{A}\overline{\boldsymbol{y}} + {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{y}{}^{\mathrm{t}}A\overline{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}\|^2 - \|\boldsymbol{y}\|^2.$$

${}^{\mathrm{t}}A\overline{A}$ の (s,t) 成分を b_{st} とすると，この式で

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_s, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_t \text{ とおくと} b_{st} + b_{ts} &= \|\boldsymbol{e}_s + \boldsymbol{e}_t\|^2 - \|\boldsymbol{e}_t\|^2 - \|\boldsymbol{e}_s\|^2 = 2\delta_{st}, \\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_s, \boldsymbol{y} = i\boldsymbol{e}_t \text{ とおくと} -ib_{st} + ib_{ts} &= \|\boldsymbol{e}_s + i\boldsymbol{e}_t\|^2 - \|\boldsymbol{e}_s\|^2 - \|i\boldsymbol{e}_t\|^2 = 0. \end{aligned}$$

ここで，${}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}A\overline{A}) = {}^{\mathrm{t}}\overline{A}A = \overline{{}^{\mathrm{t}}A\overline{A}}$ だから，$b_{ts} = \overline{b_{st}}$．したがって，

$$b_{st} + \overline{b_{st}} = 2\delta_{st}, \qquad -ib_{st} + i\overline{b_{st}} = 0$$

をえる．この 2 式から $b_{st} = \delta_{st}$ がわかるので ${}^{t}A\overline{A} = E$． □

問 32.2　複素内積空間の 2 つの正規直交基底の間の基底変換行列はユニタリ行列であることを示せ．

ユニタリ行列による対角化

正規直交基底をうまくとることにより複素内積空間の 1 次変換の表現行列を対角化する問題を考える．行列の言葉でいえば，n 次正方行列 A に対してユニタリ行列 U をとって

$$U^*AU$$

を対角行列にできるかどうかという問題である．

議論は実行列のときよりも複雑になるが，理論的な見通しはよくなって，実対称行列の対角化についてもすっきりとした議論が可能になる．

$U^*AU = D$ が対角行列であるとすると，$D\overline{D} = D\overline{D}$ だから，

$$AA^* = (UDU^*)(U\overline{D}U^*) = UD\overline{D}U^* = U\overline{D}DU^* = (U\overline{D}U^*)(UDU^*) = A^*A$$

が成り立つ．

定義 32.3. $AA^* = A^*A$ をみたす行列 A を**正規行列**という．

問 32.3　A を正方行列とする．$A^* = A$ をみたす行列を **エルミート行列**という．$A^* = -A$ をみたす行列を**歪エルミート行列**という．エルミート行列，歪エルミート行列，ユニタリ行列すべて正規行列であることを示せ．

ユニタリ行列で対角化できるならば正規行列であることがわかったが，実はこの逆が成り立つ．

定理 32.4　n 次正方行列 A がユニタリ行列によって対角化できるための必要十分条件は A が正規行列になることである．

証明．A を正規行列とし，これがユニタリ行列で対角化できることを n に関する帰納法で証明する．

α を A の固有値とし，V_α を α に対応する固有空間とする．任意の $\boldsymbol{b} \in V_\alpha$ に対して，$A(A^*\boldsymbol{b}) = A^*(A\boldsymbol{b}) = \alpha A^*\boldsymbol{b}$ だから，$A^*\boldsymbol{b} \in V_\alpha$ となる．そこで，$\boldsymbol{a} \in {V_\alpha}^\perp$ とすると，

$$A\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot A^*\boldsymbol{b} = 0.$$

これは $A\boldsymbol{a} \in {V_\alpha}^\perp$ を示す．すなわち ${V_\alpha}^\perp$ は A で ${V_\alpha}^\perp$ 自身に写される．そこで $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m)$ を V_α の正規直交基底とし，$(\boldsymbol{u}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ を ${V_\alpha}^\perp$ の正規直交基底とすると，$(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ は V の正規直交基底になって，

$$(A\boldsymbol{u}_1, \ldots, A\boldsymbol{u}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)\begin{bmatrix} \alpha E_m & O \\ O & A_1 \end{bmatrix}$$

が成り立つ．$U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix}$ とおくと，U はユニタリ行列で，

$$U^*AU = \begin{bmatrix} \alpha E_m & O \\ O & A_1 \end{bmatrix}.$$

ここで

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \alpha\overline{\alpha}E_m & O \\ O & A_1{A_1}^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha E_m & O \\ O & A_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{\alpha}E_m & O \\ O & {A_1}^* \end{bmatrix} = (U^*AU)(U^*A^*U) \\ &= U^*AA^*U = U^*AA^*U = \cdots = \begin{bmatrix} \alpha\overline{\alpha}E_m & O \\ O & {A_1}^*A_1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

により，${A_1}^*A_1 = A_1{A_1}^*$．よって A_1 は $n-m$ 次の正規行列である．帰納法の仮定により，ユニタリ行列 U_1 があって，${U_1}^*A_1U_1 = D_1$ が対角行列にできる．$X = U\begin{bmatrix} E_m & O \\ O & U_1 \end{bmatrix}$ とおくと，

$$X^*AX = \begin{bmatrix} \alpha E_m & O \\ O & D_1 \end{bmatrix}$$

が対角行列になる．　$\square$

A の相異なる固有値を $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ とするとき，A が対角化可能であれば，$\mathbb{C}^n$ には A の固有ベクトルだけからなる基底がとれる (定理 24.6)．直和の言葉（演習問題 VI.21, VI.22）で書くと，

$$\mathbb{C}^n = V_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus V_{\alpha_k}$$

となっている．

A が正規行列であれば，ユニタリ行列で対角化できることから，固有ベクトルだけからなる正規直交基底がとれる．したがって，上の直和において，各固有空間は正規直交基底からなる基底をもつ．一般の固有ベクトルは固有空間の基底の 1 次結合になっているので，内積の半線形性から次の命題 29.2 の一般化がえられる．

系 32.5　正規行列の相異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交する．

定理 32.6 (正規行列のスペクトル分解)　A を n 次の正規行列とする．$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ を A の相異なる固有値とする．このとき行列 $P_1, \ldots, P_r$ で

$$P_i{}^2 = P_i = P_i{}^* \ (1 \leq i \leq r),\ P_i P_j = O \ (i \neq j),\ E = P_1 + \cdots + P_r$$

をみたすもの一意的にきまり，

$$A = \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_r P_r$$

と分解される．これを A の**スペクトル分解**とよぶ．

証明. A は正規行列だから，対角化可能で

$$\mathbb{C}^n = V_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus V_{\alpha_r}$$

と分解される．直和の定義から $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_r \ (\boldsymbol{x}_i \in V_{\alpha_i})$$

と一意的に表される．$i = 1, \ldots, r$ に対して，P_i を $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}_i$ で定義される線形写像とする．その標準行列も同じ記号 P_i であらわす．

$$P_i{}^2 \boldsymbol{x} = P_i(P_i \boldsymbol{x}) = P_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_i$$

だから，$P_i{}^2 = P_i$ が成り立つ．また $\mathbb{C}^n \ni \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_1 + \cdots + \boldsymbol{y}_k \ \boldsymbol{y}_i \in V_{\alpha_i}$ とかいて，系 32.5 を使うと，

$$P_i \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot P_i{}^* \boldsymbol{y},$$

$$P_i \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_i \cdot (\boldsymbol{y}_1 + \cdots + \boldsymbol{y}_k) = \boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}_i.$$

これがすべての $\boldsymbol{x}$ について成り立つので，$P_i{}^* \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_i = P_i \boldsymbol{y}$．よって $P_i = P_i{}^*$ が成り立つ．さらに，$i \neq j$ なら，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$P_i P_j \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = P_j \boldsymbol{x} \cdot P_i \boldsymbol{y} = 0.$$

よって $P_iP_j = O$ である．また任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ に対して，$\boldsymbol{x} = P_1\boldsymbol{x} + \cdots + P_r\boldsymbol{x}$ だから，$P_1 + \cdots + P_r = E$. さらに，

$$\begin{aligned}(\alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_r P_r)\boldsymbol{x} &= \alpha_1 P_1\boldsymbol{x} + \cdots + \alpha_r P_r\boldsymbol{x} \\ &= A(P_1\boldsymbol{x}) + \cdots + A(P_r\boldsymbol{x}) = A(P_1\boldsymbol{x} + \cdots + P_r\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

だから $A = \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_r P_r$ がわかる．

最後に $A = \alpha_1 P_1{}' + \cdots + \alpha_r P_r{}'$ をもう一つのスペクトル分解とする．$W_i = \mathrm{Im} P_i{}'$ とすると，$\boldsymbol{y} = P_i{}'\boldsymbol{x} \in W_i$ ならば，

$$A\boldsymbol{y} = (\alpha_1 P_1{}' + \cdots + \alpha_r P_r{}')P_i{}'\boldsymbol{x} = \alpha_i P_i{}'\boldsymbol{x} = \alpha_i \boldsymbol{y}$$

により，$\boldsymbol{y} \in V_{\alpha_i}$. すなわち，$W_i \subset V_{\alpha_i}$. $\mathbb{C}^n = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ だから，次元の関係より，$W_i = V_{\alpha_i}$. このとき $P_i{}'$ は W_i への正射影でなくてはならないから，$P_i{}' = P_i$. よってスペクトル分解は一意的である．　□

系 32.5 から正規行列をユニタリ行列で対角化するためには，各固有空間の基底をグラム・シュミットの直交化法で対角化しておけば，全空間の正規直交基底が求まる．

例題 32.7　行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & i \\ -1 & 0 & -1 \\ i & 1 & 0 \end{bmatrix}$ が正規行列であることを示し，ユニタリ行列で対角化せよ．また，A のスペクトル分解を求めよ．

解.　$A^* = -A$ より，$AA^* = -A^2 = A^*A$ が成り立つので，A は正規行列．したがってユニタリ行列で対角化可能．

$$F_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -i \\ 1 & \lambda & 1 \\ -i & -1 & \lambda \end{vmatrix} = t^3 + 3t + 2i = (t - 2i)(t + i)^2.$$

$\lambda = 2i$ のとき，

$$2iE - A = \begin{bmatrix} 2i & -1 & -1 \\ 1 & -2i & 1 \\ -i & -1 & -2i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって解は t をパラメータとして $\begin{bmatrix} t \\ it \\ t \end{bmatrix}$. したがって $\lambda = 2i$ に対応する固有ベクト

ルとして $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$ がとれる．

$\lambda = -i$ のとき，

$$-iE - A = \begin{bmatrix} -i & -1 & -i \\ 1 & -i & 1 \\ -i & -1 & -i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって s, t をパラメータとして解は $\begin{bmatrix} is - t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$．したがって 1 次独立な固有ベクトルとして $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ がとれる．$(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ を直交化すると，

$$\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{i}{2}\boldsymbol{a}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -i \\ 2 \end{bmatrix}$$

を得る．

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ を正規化すると，正規直交基底

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -i \\ 2 \end{bmatrix}$$

となる．$U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix}$ とおくと，これはユニタリ行列で

$$U^* A U = \begin{bmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}.$$

次に A のスペクトル分解を求める．まず正射影の行列を求めるには，定義通り計算してもよいが，標準基底 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ の正射影が求まればよいから，まず $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)P$ をみたす正方行列を $P = \begin{bmatrix} p_{ij} \end{bmatrix}$ を求める．$U =$

$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix}$ がユニタリ行列であることから,

$$P = U^{-1} = U^* = \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{t}}\overline{\boldsymbol{u}_1} \\ {}^{\mathrm{t}}\overline{\boldsymbol{u}_2} \\ {}^{\mathrm{t}}\overline{\boldsymbol{u}_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

が求める行列である．このとき,

$$V_{2i} \text{ への正射影 } P_1 = \begin{bmatrix} p_{11}\boldsymbol{u}_1 & p_{12}\boldsymbol{u}_1 & p_{13}\boldsymbol{u}_1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{u}_1 {}^{\mathrm{t}}\overline{\boldsymbol{u}_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{i}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} & -\frac{i}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{i}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{6} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} V_{-i} \text{ への正射影 } P_2 &= \begin{bmatrix} p_{21}\boldsymbol{u}_2 + p_{31}\boldsymbol{u}_3 & p_{22}\boldsymbol{u}_2 + p_{32}\boldsymbol{u}_3 & p_{23}\boldsymbol{u}_3 + p_{33}\boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{t}}\overline{\boldsymbol{u}_2} & {}^{\mathrm{t}}\overline{\boldsymbol{u}_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{i}{6} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} & \frac{i}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{i}{2\sqrt{3}} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

もちろんこの行列は $P_1 + P_2 = E$ から求めた方が簡単である．

以上から A のスペクトル分解は

$$A = 2i \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{i}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} & -\frac{i}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{i}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{i}{6} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} & \frac{i}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{i}{2\sqrt{3}} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}.$$

問 32.4　行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ をユニタリ行列で対角化せよ．またそのスペクトル分解を求めよ．

補注 32.8　相異なる固有値が α, β の 2 個だけのときは，スペクトル分解は次のようにして簡単に求められる．条件

$$P_1 + P_2 = E, \quad A = \alpha P_1 + \beta P_2$$

より,

$$A - \alpha E = \alpha P_1 + \beta P_2 - \alpha P_1 - \alpha P_2 = (\beta - \alpha) P_2.$$

同様に $A - \beta E = (\alpha - \beta) P_1$. この 2 式から

$$P_1 = (\beta - \alpha)^{-1}(A - \alpha E), \quad P_2 = (\alpha - \beta)^{-1}(A - \beta E).$$

問 32.5　A を正規行列とし，α を A の固有値，$\boldsymbol{x}$ を対応する固有ベクトルとするとき，$A^*\boldsymbol{x} = \overline{\alpha}\boldsymbol{x}$ を示せ．

実対称行列の対角化再論

命題 32.9　正規行列 A に対して次が成立する．

(i) A がエルミート行列 $\iff$ A の固有値はすべて実数．

(ii) A がユニタリ行列 $\iff$ A の固有値はすべて絶対値が 1 の複素数．

証明．A は正規行列だから，ユニタリ行列 U によって対角化される．

$$U^*AU = \begin{bmatrix} \lambda_2 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

ここで $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ は A の固有値である．右辺の行列を D とおく．

A がエルミート行列ならば，

$$(U^*AU)^* = U^*A^*U = U^*AU$$

により $D = U^*AU$ もエルミート行列．すなわち $D^* = \overline{D} = D$. これは任意の λ_i が実数であることを示す．逆に，任意の固有値が実数ならば，$D^* = D$. このとき，$A = UDU^* = UD^*U^* = (UDU^*)^* = A^*$ となり A はエルミート行列である．

次に A がユニタリ行列であるとする．このとき D もユニタリ行列になる．すなわち $D^*D = E$. これは $|\lambda_i|^2 = \overline{\lambda_i}\lambda_i = 1$ を示す．したがって $|\lambda_i| = 1$. 逆は練習問題とする．□

A を実の正規行列とする．A はユニタリ行列 U で対角化できるが，U が実の行列（すなわち直交行列）にとれるための条件を考える．

定理 32.10　A を実の正規行列とする．このとき

A が直交行列で対角化可能 $\iff$ A が対称行列

証明．A が直交行列 P によって対角化可能とする．D を対角行列として

$$P^{-1}AP = D.$$

$P^{-1} = {}^{\mathrm{t}}P$, ${}^{\mathrm{t}}D = D$ を使うと，

$${}^{\mathrm{t}}A = {}^{\mathrm{t}}(PDP^{-1}) = {}^{\mathrm{t}}(PD\,{}^{\mathrm{t}}P) = {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}P)\,{}^{\mathrm{t}}D\,{}^{\mathrm{t}}P = PD\,{}^{\mathrm{t}}P = PDP^{-1} = A.$$

よって A は対称行列である．

逆に A が対称行列であるとする．A はエルミート行列になるから A の固有値はすべて実数である．よって，一次方程式の理論から固有ベクトルとして実ベクトルが

とれる．これから正規直交基底をつくれば，実ベクトルだけからなる正規直交基底になる．これをならべて直交行列を作れば，これによって A は対角化される． □

演習問題 VII

[B]

VII.15 $W_1, \dots W_r$ を複素内積空間 V の部分空間とし，

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$$

であるとする．$V \ni \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_r$ $(\boldsymbol{x}_i \in W_i)$ と表すとき，φ_i $(1 \leq i \leq r)$ を

$$\varphi_i \ : \ V \longrightarrow V, \ \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}_i$$

で定義する．これを V の W_i への**射影**とよぶ．

(i) φ_i が V の 1 次変換であることを示せ．

(ii) φ_i が

$$\varphi_i{}^2 = \varphi_i, \quad \varphi_i{}^* = \varphi_i$$

をみたすことを示せ．逆にこれをみたす V の 1 次変換に対して，V の部分空間 W が存在して，W への射影になることを示せ．

(iii) $i \neq j$ のとき，次を示せ．

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \text{ が任意の } \boldsymbol{x} \in W_i, \boldsymbol{y} \in W_j \text{ に対して成り立つ} \iff \varphi_i \circ \varphi_j = 0.$$

略解

31.1 (i) $1 + 3i$ (ii) $1 - 3i$ (iii) $\sqrt{7}$

31.2 $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ とすると，$\begin{bmatrix} {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a} \\ {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{b} \end{bmatrix} \overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$．複素共役をとると，$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}^* \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$．この連立一次方程式の解空間の基底を求めると，$\begin{bmatrix} -i \\ -1+i \\ 1 \end{bmatrix}$．

31.3

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}, \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

32.1 $(f(\boldsymbol{u}_i), f(\boldsymbol{u}_j)) = (\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}$

32.2 $(\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_n),(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n)$ を 2 組の正規直交基底とし, $(\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_n)=(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n)P$ で基底変換行列 P を決める．P の第 i 列 $\boldsymbol{p}_i$ は $\boldsymbol{u}_i$ の正規直交基底 $(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n)$ に関する座標である．よって命題 31.4 より $\delta_{ij}=(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j)=\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{p}_j$. これは $(\boldsymbol{p}_1,\ldots,\boldsymbol{p}_n)$ が正規直交基底であることを示す.

32.3 やさしいので省略.

32.4

$$U=\begin{pmatrix}\frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}, U^*AU=\begin{pmatrix}\sqrt{-3} & 0 & 0\\ 0 & -\sqrt{-3} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$$A=\sqrt{-3}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{2\sqrt{3}}\\ -\frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}}\\ -\frac{i}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}-\sqrt{-3}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{i}{6} & -\frac{i}{2\sqrt{3}}\\ \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}}\\ \frac{i}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{6}.\end{pmatrix}.$$

ちなみに固有値 0 の固有空間への正射影は $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3}\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

32.5 A のスペクトル分解を

$$A=\alpha_1P_1+\cdots+\alpha_rP_r$$

とする．$\alpha_1=\alpha$ としておく．両辺の随伴をとると，

$$A^*=\overline{\alpha_1}P_1+\cdots+\overline{\alpha_r}P_r.$$

このとき $\boldsymbol{x}$ が α_1 に対応する固有ベクトルだから，$P_i\boldsymbol{x}=0$ $(i=2,\ldots,r)$. よって，

$$A^*\boldsymbol{x}=\overline{\alpha_1}P_1\boldsymbol{x}=\overline{\alpha}\boldsymbol{x}.$$

スペクトル分解を使わなくても証明できる．$\boldsymbol{x}\in V_\alpha$ なら，$A(A^*\boldsymbol{x})=A^*(A\boldsymbol{x})=\alpha A^*\boldsymbol{x}$. これは $A^*\boldsymbol{x}\in V_\alpha$ を示す．V_α の正規直交基底を $(\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_s)$ とすると，

$$(A^*\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j)=(\boldsymbol{u}_i,A\boldsymbol{u}_j)=\overline{\alpha}(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j)=\overline{\alpha}\delta_{ij}.$$

したがって，$A^*\boldsymbol{u}_i=\overline{\alpha}\boldsymbol{u}_i$. 任意の $\boldsymbol{x}\in V_\alpha$ は $\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_s$ の 1 次結合だから，$A^*\boldsymbol{x}=\overline{\alpha}\boldsymbol{x}$ が成り立つ.

VII.15 (ii) $\varphi_i(\varphi_i(\boldsymbol{x}))=\varphi_i(\boldsymbol{x}_i)=\boldsymbol{x}_i=\varphi_i(\boldsymbol{x})$.

直和分解 $V=W_i\oplus {W_i}^\perp$ を考えると，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_i+(\boldsymbol{x}_1+\cdots+\boldsymbol{x}_{i-1}+\boldsymbol{x}_{i+1}+\cdots+\boldsymbol{x}_r)$ において，$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}_1+\cdots+\boldsymbol{x}_{i-1}+\boldsymbol{x}_{i+1}+\cdots+\boldsymbol{x}_r\in {W_i}^\perp$. $W\ni\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_i+\boldsymbol{y}'$ も同様な分解とする．したがって，

$$(\varphi_i(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_i+\boldsymbol{y}')=(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_i)=(\boldsymbol{x},\varphi_i(\boldsymbol{y})),$$

$$(\varphi_i(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},{\varphi_i}^*(\boldsymbol{y})).$$

まとめると，$(\boldsymbol{x}, \varphi_i(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \varphi_i(\boldsymbol{y}))$ が任意の $\boldsymbol{x} \in V$ について成り立つ．すなわち，$(\boldsymbol{x}, \varphi_i(\boldsymbol{y}) - {\varphi_i}^*(\boldsymbol{y})) = 0$. したがって，$\varphi_i(\boldsymbol{y}) - {\varphi_i}^*(\boldsymbol{y}) \in V^{\perp} = \{\boldsymbol{0}\}$.

逆に φ が $\varphi^2 = \varphi, \varphi^* = \varphi$ をみたす V の 1 次変換だとする．$W = \mathrm{Im}\varphi$ とおく．$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ $(\boldsymbol{x}_1 \in W, \boldsymbol{x}_2 \in W^{\perp})$ と書くと，$\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}_1) + \varphi(\boldsymbol{x}_2)$. $\boldsymbol{x}_1 \in W = \mathrm{Im}\varphi$ より，$\boldsymbol{x}_1 = \varphi(\boldsymbol{y})$ と書ける．

$$\varphi(\boldsymbol{x}_1) = \varphi(\varphi(\boldsymbol{y})) = \varphi(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}_1.$$

また，$\boldsymbol{y}$ を V の任意の元とすると，$\varphi(\boldsymbol{y}) \in W$ に注意すれば，

$$(\varphi(\boldsymbol{x}_2), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_2, \varphi(\boldsymbol{y})) = 0.$$

したがって，$\varphi(\boldsymbol{x}_2) = 0$. 以上をまとめると，

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_1$$

となり，φ は W への射影になる．

(iii) $\Longrightarrow$ は直和だから明らか．逆をしめす．$\boldsymbol{x} \in W_i, \boldsymbol{y} \in W_j$ とする．$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\varphi_i(\boldsymbol{x}), \varphi_j(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \varphi \circ \varphi_j(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = 0.$