木田雅成「線形代数学講義[増補版]」培風館
訂正および変更

2024年12月9日

増補版第2刷以降の訂正

p.122 5行目 「A が正則だから，任意の $\boldsymbol{x}$ に対して $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ は」→「A が正則だから，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ は」

p.143 問20.3 (Vii) 結論は「g は単射」

p.159 問23.2 $\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^3$ に.

p.161 最下行 $R(A) \to C(A)$

p.229 問1.3の答え $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \to \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.
問題は「ひとつ求めよ」なので，間違いではないが，わからない人がいるようなので訂正.

第10刷以降の訂正

p.42 例題7.4 行基本変形の四行目　矢印の上の式 ② $+ (-1)$③ $\to$ ② $+ (-1) \times$ ③

p.156 例23.1 真ん中あたりの行基本変形の最後の行列の $(1,4)$ **成分** $0 \to 2$

p.202 定理30.1の証明の1行目 $\boldsymbol{v} - P_W(\boldsymbol{w}) \to \boldsymbol{v} - P_W(\boldsymbol{v})$

p.202 定理30.1の証明の2行目 $\boldsymbol{v} - P_W(\boldsymbol{w}) \to \boldsymbol{v} - P_W(\boldsymbol{v})$

p.205 例30.5の2行目 $(f(x), 1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \ dx = 0 \to (f(x), 1) = \int_{-\pi}^{\pi} x \ dx = 0$

p.229 VI.5 の解答 $f^{-1}(\boldsymbol{c}) = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

第 8 刷以降の訂正

p.128 命題 18.8 (ii) の証明 命題 18.1 → 命題 18.5

2020 年第 8 刷の訂正箇所

p.108 問 15.4 「判定性せよ」→「判定せよ」

p.159 問 23.4 (ii) $f(\boldsymbol{b}) \to f(\boldsymbol{a})$

p.222 17.3 の解答 $|A| = 2 \to |A| = 4$

2019 年第 7 刷の訂正箇所

p.39 「簡約化の手順」の一行目 「与えられた行列を」→「与えられた零行列でない行列を」

p.41 定義 7.2 最後に,「ただし零行列の階数は 0 とする.」を追加.

p.131 下から 7 行目の式 $c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

p.140 下から 6 行目 「$g \circ f : A \longrightarrow B$」$\longrightarrow$ 「$g \circ f : A \longrightarrow C$」

p.149 定理 22.3 ここだけ写像の間の矢印が短い. $f : V \to W$ を $f : V \longrightarrow W$ に変更.

p.214 6.4 の解答 一番最初に O (零行列) を追加.

2016 年第 5 刷，2017 年第 6 刷

これらのものには変更点がありませんでした.

2015年第4刷の訂正箇所

おかげさまで第4刷がでました．第3刷の訂正箇所はすべて直っています．これからもよろしくお願いします．

p.59 系 9.2 (ii) の証明 まちがいではありませんが，次のように簡単化します．
(ii) 次に $AB = E$ とする．(i) を A, B の役割を交換して使うと B が正則であることがわかり，さらに A は B の逆行列になる．すなわち $A = B^{-1}$．命題 4.5 より A は正則になって $A^{-1} = (B^{-1})^{-1} = B$.

p.73 下から2行目 「定義式 (12.1)」$\longrightarrow$「定義式 (10.1)」

p.124 l.9 「$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ だけを含む線形関係式」$\longrightarrow$「$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ だけを含む1次関係式」

p.125 l.10 $u_i(x)$ の式の最右辺. $\displaystyle\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} \frac{x-c_j}{c_i-c_j} \longrightarrow \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \frac{x-c_j}{c_i-c_j}$

p.127 命題 18.6 証明 l.3 「定理 18.5」$\longrightarrow$「命題 18.5」

p.204 l.10 最後のデータを $(3.0, 2.8)$ から $(3.0, 2.9)$ に.

2015年第3刷の訂正箇所

おかげさまで第3刷がでました．これからもよろしくお願いします．第2刷の訂正箇所は p.57(命題 8.15), p.105 のもの以外は直っています.

p.5 命題 1.2 の証明のあとの1行目 「コーシー・シュワルツの不等式から」$\longrightarrow$「コーシー・シュワルツの不等式から，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ がともに $\boldsymbol{0}$ でないとき,」

p.37, 例 6.1 の2行上 「拡大行列行列」$\longrightarrow$「拡大係数行列」

p.39, 下から1行目 「を適用して」$\longrightarrow$「に適用して」

p.57 命題 8.15 l.3 1次行列 $\longrightarrow$ 1次独立

p.57 簡約行列の一意性の証明の ll.8-10 「さらに $j \neq i_1, \dots, i_r$ で $i_s < j < i_{s+1}$ なら

$$\boldsymbol{a}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{a}_{i_s}, \boldsymbol{a}_j \text{は 1 次従属.}$$

$j < i_1$ の場合は条件から $\boldsymbol{a}_j = \mathbf{0}$ である.」
$\longrightarrow$ 「さらに $j \neq i_1, \dots, i_r$ で $i_s < j < i_{s+1}$ なら

$$\boldsymbol{a}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{a}_{i_s}, \boldsymbol{a}_j \text{は 1 次従属.}$$

ただし，$j < i_1$ に対して $\boldsymbol{a}_j = \mathbf{0}$ であるとする.」

p.58 細かいことだが，3 行目の式の係数のプライムの位置を 5 行目の式のものにあわす.

p.59 下から 9 行目 「B を行ベクトルに分割して」$\longrightarrow$「B を列ベクトルに分割して」

p.64 III.9 「実数 a の値」$\longrightarrow$「a の値」

p.79 例 11.10 l.4 $\mathrm{sgn}(1,2) \longrightarrow \mathrm{sgn}(2,1)$

p.87 (13.2) 行列式の中の $(2,1)$ 成分：$-a_{12} \longrightarrow -a_{21}$

p.92 l9 行目 「右辺」$\longrightarrow$「両辺」

p.105 命題 15.2 の下 3 行目，4 行目（2 箇所） $W \neq 0 \longrightarrow W \neq \emptyset$（空集合）

p.197 例題 29.3 下から 5 行目 $\mathbf{b}_2$ の式 $\dfrac{(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)}{\|\mathbf{b}_1\|^2}\mathbf{b}_1 \longrightarrow \dfrac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1}{\|\mathbf{b}_1\|^2}\mathbf{b}_1$

p.210 I.2 (vii) 解答 $\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

2014 年第 2 刷の訂正箇所

おかげさまで第 2 刷がでました．第 1 刷での訂正は一カ所をのぞいてすべて直っています.

p.26 命題 4.5 A, B が正則行列のとき，$\longrightarrow$ A, B をサイズの等しい正則行列とするとき，

p.32 行列の分割 いくつかの行列をいくつか結合して $\longrightarrow$ いくつかの行列を結合して

p.38 定義 6.2 の直後 「条件 (iv) 以外の 3 条件をみたす」$\longrightarrow$「(i),(ii),(iii) の 3 条件をみたす」

p.57 以下のように変更．大きく変更する箇所は青にしてあります．

簡約行列の一意性

定理 7.1 で述べたように，与えられた行列から簡約行列は一意的に決まる．ここでその証明を与える．

まず，つぎの命題を証明する．

命題．*8.15* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ を n 次列ベクトルとし，P を n 次の正則行列とする．このとき，

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \text{が 1 次独立} \iff P\boldsymbol{a}_1, \ldots, P\boldsymbol{a}_r \text{が 1 次独立.}$$

証明．$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が 1 次独立 とする．$c_1 P\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r P\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$ とすると，両辺左から P^{-1} をかけて，$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$ が得られる．$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の 1 次独立性から，$c_1 = \cdots = c_r = 0$．逆に $P\boldsymbol{a}_1, \ldots, P\boldsymbol{a}_r$ が 1 次独立 とする．このとき $c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$ ならば，左から P をかけて，$c_1 P\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r P\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$ となるので，仮定から $c_1 = \cdots = c_r = 0$ が得られる． □

簡約行列の一意性の証明．行列 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$ の簡約行列 (のひとつ) を

$$B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

とする．$PA = B$ をみたす正則行列 P が存在する (命題 7.7)．P は基本行列の積である．

$\{1, 2, \ldots, n\}$ の部分集合 $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ を $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ で，かつ次の条件をみたすように選ぶ．

$$\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_r} \text{は 1 次独立.}$$

さらに $j \neq i_1, \dots, i_r$ で $i_s < j < i_{s+1}$ なら

$$\boldsymbol{a}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{a}_{i_s}, \boldsymbol{a}_j \text{は 1 次従属.}$$

$j < i_1$ の場合は条件から $\boldsymbol{a}_j = \mathbf{0}$ である．また $i_{r+1} = n+1$ としておく．このような集合 $\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ は $\boldsymbol{a}_1$ から順番に 1 次独立なベクトルを選んでいくことにより，一意的に決まる．

P は正則行列だから，命題 8.15 により $\boldsymbol{b}_i = P\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, \dots, n)$ は $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, \dots, n)$ と同じ条件をみたす．すなわち，

$$\boldsymbol{b}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{b}_{i_r} \text{は 1 次独立.}$$

$j \neq i_1, \dots, i_r$ で $i_s < j < i_{s+1}$ なら

$$\boldsymbol{b}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{b}_{i_r}, \boldsymbol{b}_j \text{は 1 次従属.}$$

B は簡約行列で，簡約行列はその定義から，主成分を含む列は基本ベクトルで，主成分を含まない列は，その列より左にある主成分を含む列の 1 次結合になることに注意すると，$\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{i_1} & \cdots & \boldsymbol{b}_{i_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \dots & \boldsymbol{e}_r \end{bmatrix}$ であることがわかる．

さて，$i_s < j < i_{s+1}$ とする．$\boldsymbol{a}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{a}_{i_s}, \boldsymbol{a}_j$ は 1 次従属であるから，非自明な 1 次関係式

$$c_1\boldsymbol{a}_{i_1} + \cdots + c_s\boldsymbol{a}_{i_s} + b\boldsymbol{a}_j = \mathbf{0}$$

がある．ここで $b = 0$ なら $\boldsymbol{a}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ の 1 次独立性から，$c_1 = \cdots = c_s = 0$ となってしまうから，$b \neq 0$. よってこの関係式は，$b\boldsymbol{a}_j$ を移項して，$-b$ で全体をわることにより，

$$c_1{}'\boldsymbol{a}_{i_1} + \cdots + c_s{}'\boldsymbol{a}_{i_s} = \boldsymbol{a}_j$$

の形にできる．この両辺に左から P をかけると

$$c_1{}'\boldsymbol{b}_{i_1} + \cdots + c_s{}'\boldsymbol{b}_{i_s} = \boldsymbol{b}_j.$$

これは，連立 1 次方程式

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{i_1} & \cdots & \boldsymbol{b}_{i_s} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_j$$

が解をもつことを示す．さらに，$\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{i_1} & \cdots & \boldsymbol{b}_{i_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \dots & \boldsymbol{e}_r \end{bmatrix}$ だから，係数行列の階数と変数の個数は等しいので解はただひとつである．したがって $\boldsymbol{b}_j$ は $\boldsymbol{b}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{b}_{i_s}$ からただひとつ決まる．これが証明したいことであった． □

p.70 例題 10.7 解の 3 行目 左から 2 番目の行列の $(2,1)$ 成分は -2 ではなく 2.

p.71 証明 5 行目 「上で与えた $|A|$ の式」$\longrightarrow$「$|A|$ の定義式」

p.105 命題 15.2 のあとに次を追加.「(ii), (iii) の下では, (i) は $W \neq \emptyset$ であることと同値である. 実際, $\mathbf{0} \in W$ なら $W \neq \emptyset$ は明らか. 逆に $\boldsymbol{a} \in W$ とすると, (iii) から $-\boldsymbol{a} \in W$ で, (ii) から $\mathbf{0} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) \in W$ となる.」

p.115 5 行目 $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^r$

p.115 6 行目 $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix}$

p.116 下から 2 行目 右辺の $O \longrightarrow (\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})$.

p.117 4 行目右辺 $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)A\boldsymbol{x}$

p.117 10 行目右辺 $(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_m)\boldsymbol{x}$

p.118 例題 17.5 問題の意図としては「$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \in W$ であることはみとめて, それが基底であることを示しなさい」ということでした. わかりにくかったようなので p.119 の解の一行目に次を追加.「$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ が W の元であることを確かめることは読者にゆだねる. 以下では $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ が基底であることを確かめる.」

p.127 命題 18.6 の証明 (i) を以下のように変更.「(i) $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r$ は基底なので 1 次独立であるが, V のベクトルとみても 1 次独立である. したがって, 定理 18.5 より, その個数は $\dim V$ を超えない.」

p.134 下から 5 行目 $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_r \longrightarrow \boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_t$

p.153 系 22.11 2 行目 「$n = \mathrm{rank} A = n$ 」$\to$「$\mathrm{rank} A = n$」

p.158 問 23.3 2 行目 $\mathscr{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \to \mathscr{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$

p.176, 問題 VI.1 (vii) 「$f : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_4, g(x) \mapsto g(x^2)$」 → 「$f : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2, g(x) \mapsto 2g'(x) - g(x)$」に変更.（VI.2 の (vii) に対応する解答は変更の必要なし.）

pp.188-189 例題 27.9 の解 標準内積の記号を使うべきところが，一般の内積の記号になっています.

解 2 行目 $(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1) = 9 \to \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 = 9$

解 4 行目 $-\dfrac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)}{\|\boldsymbol{b}_1\|^2}\boldsymbol{b}_1 \to -\dfrac{\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{b}_1\|^2}\boldsymbol{b}_1$

p.189 2 行目 $(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1) = 3 \to \boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{b}_1 = 3, (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2) = 3 \to \boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{b}_2 = 3,$

p.189 4 行目 $-\dfrac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)}{\|\boldsymbol{b}_1\|^2}\boldsymbol{b}_1 \to -\dfrac{\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{b}_1\|^2}\boldsymbol{b}_1, -\dfrac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)}{\|\boldsymbol{b}_2\|^2}\boldsymbol{b}_2 \to -\dfrac{\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{b}_2}{\|\boldsymbol{b}_2\|^2}\boldsymbol{b}_2$

奥付 博士課程終了 $\longrightarrow$ 博士課程修了

2013 年 3 月初版の訂正箇所

p.2 図 1.1 上側の A', B' をそれぞれ A, B に変更.

p.76 下から 2 行目 この定理の (i), (ii) を列ベクトルに関する行列式の多重線形性といい，(iii) を列ベクトルに関する交代性という.

p.80 一方で行列式の定義から

$$(-1)^{j-1}|A| = \begin{vmatrix} a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

p.96 IV.1 以下の行列の行列式を計算せよ.

p.99 IV.16 「このとき A^{-1} の成分もすべて」を「このとき A が正則でかつ A^{-1} の成分もすべて」に変更

p.105, l.4 線形代数である $\longrightarrow$ 線形代数学である

p.118 命題 17.4 「$(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n) \in \mathbb{R}^n$ とおく.」を「$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n \in \mathbb{R}^n$ とする.」に変更.（両側の括弧をとる).

p.137 章末問題 V.13 「$(f_1(x) = 1 - x,\ f_2(x) = 1 + x,\ f_3(x) = 1 + x + x^2, f_4(x) = 1+x^2) \in \mathbb{R}[x]_2$」を「$f_1(x) = 1-x,\ f_2(x) = 1+x,\ f_3(x) = 1 + x + x^2, f_4(x) = 1 + x^2 \in \mathbb{R}[x]_2$」に．（両側の括弧をとる）．

p.178 章末問題 VI.8 「行列と基底の組を次のように与える．」と「行列 A, B と $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ の基底を次のように与える．」に変更．2 行めの $\subset \mathbb{R}^2$, 3 行めの $\subset \mathbb{R}^3$ をとる．「このそれぞれについて，以下の問に答えよ」を「A, B のそれぞれが定める線形変換について，以下の問に答えよ．」に変更．

p.196 命題 29.2 の証明 間違いではないが見通しが悪いので次のように内積で書き直すのがよいだろう．

$$A\boldsymbol{p}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{p}_1$$

の両辺と $\boldsymbol{p}_2$ の内積をとると，

$$A\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 = \lambda_1 \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2.$$

左辺は

$$\boldsymbol{p}_1 \cdot {}^{\mathrm{t}}A\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1 \cdot A\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1 \cdot \lambda_2 \boldsymbol{p}_2 = \lambda_2(\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2)$$

となるから，

$$\lambda_2(\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2) = \lambda(\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2).$$

これから $(\lambda_1 - \lambda_2)(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = 0$. 仮定より $\lambda_1 \neq \lambda_2$ だから，$(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = 0$.

p.201 図のキャプションをとる．

奥付 博士課程終了 $\longrightarrow$ 博士課程修了

奥付 現在　東京理科大学理学部数学科教授

間違いを教えてくださった方々（敬称略．感謝いたします）：大野真裕，井上浩一，眞田克典，石丸滉，功刀直子，加川貴章．