

待ち行列と私の研究

—理論研究の可能性—

宮沢政清

待ち行列理論の研究は 1900 年代初めに電話交換機処理能力を評価するために Erlang (アーラン) によって始められました。以後通信や計算機ネットワークの発展にともないその性能評価や運用のための理論として発展を遂げてきました。待ち行列システムやそのネットワークは数学的には確率過程 (時間と共に変化するランダムな現象を表す確率モデル) を使ってモデル化されます。したがって、待ち行列理論は確率過程の応用研究と見ることもできます。しかし、数学と違う点は待ち行列理論の目的が応用にあることです。この目的のために役立つなければ評価されませんが、評価には長い時間がかかるのが普通です。そこで、過去を振り返ってみるのもよいかと思い私自身の体験に基づいて待ち行列理論の過去を振り返りながら、現在と未来について考えてみました。

キーワード：待ち行列理論, 点過程, ネットワーク, 定常分布, 構造可逆性, 漸近特性, 拡散近似

1. はじめに

私が初めて待ち行列理論に出会ったのは、学部 4 年で研究室 (東工大の森村研) に配属されたときです。森村先生が待ち行列の研究会を主催されていたことなどから待ち行列に触れることが多かったのですが、私は待ち行列モデルそのものより、それを表すマルコフ連鎖やランダムウォークなどの確率過程に興味をもっていました。しかし、数学に自信が無く、卒業研究では応用分野が広そうに見えた待ち行列を研究テーマに選びました。応用ならば私にも何か役立つことができるかもしれないという消極的選択でした。以来 40 年以上にわたり待ち行列理論の研究を続けています。よく続けてこられたと我ながらあきれています。しかし、解きたい問題が山積し研究課題は尽きることがありません。この間の待ち行列理論の発展にふれながら、私が格闘してきた問題について解説いたします。

2. 最初の疑問

私は要領が悪く一つのことを考えだすと途中で止めることができません。例えば、初めて待ち行列理論に出会ったとき、この理論は本当に役立つのかという疑問をいただきました。この疑問は今も変わりません。

待ち行列理論は混雑現象を数理的に解明し、システムの設計や運営に役立つことを目指す理論です。私が

最初に興味を持った問題は「混雑現象である待ち客の到着過程やその仕事量 (サービス時間) のどんな特性に大きく影響されるのか」でした。私が研究を始めた 1970 年代初めには待ち行列の標準的なモデルとして、客がポアソン過程に従って到着 (ポアソン到着と呼ぶ) し、サービス時間が指数分布に従い、 s 個の窓口がある $M/M/s$ モデル、その関連モデルである $M/G/1$, $GI/M/s$, $GI/G/1$ が広く認識され、解析的に研究し尽くされていました。ここに最初の GI は到着間隔が独立で同一の分布に従う (再生過程と呼ぶ) 到着があり、2 番目の G はサービス時間が独立で同一の分布に従うことを表します。3 番目の数字は窓口数を表します。特に断りがなければ先着順のサービスが仮定されます。このようなモデルの一般形である s 個の窓口でサービスを行う $GI/G/s$ モデルを解析することの難しさが解明されていました (文献 [15] 参照)。

待ち行列の問題では長時間にわたる特性を調べること、そのために定常分布 (時間が経過しても変わらない分布) を求め、その特性を知ることが重要です。このため、定常分布を解析的に求めたり、数値的に計算する方法の研究が古くからあり、今日でも多くの研究が行われています。しかし、計算ができるためにはモデルに独立性などの仮定が必要です。例えば、 $GI/G/1$ モデルでは、サービス時間だけでなく、到着間隔も独立で同一の分布に従うと仮定されます。この到着過程はポアソン過程の一般化になっていますが、特殊な到着過程であると言わざるを得ません。では、もっと一般的な到着過程の場合に待ち客はどのように変わるのか。

みやざわまさきよ
東京理科大学理工学部
〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641

モデルの仮定（例えばサービス時間分布など）の変化は待ちにどのように影響するか。これが私の最初の研究課題でした。

当時の私の頭の中では、「待ち行列＝先着順に1つまたは複数の窓口でサービスを受けるモデル」でした。したがって、客の到着時刻とサービス時間のデータがあれば待ち時間や待ち人数の計算ができます。待ち行列理論の目的がサービスの改善ならば、これらの確定的データに対してサービス方法を変え比較する方が役立つ研究ができたかもしれません。しかし、確率論に興味があったため、到着時刻などのデータを数理的に表す確率モデルを作り、その上で待ちの評価をすることにこだわっていました。

3. 定常点過程との出会い

一般的な到着過程を表す数学モデルはあるようで無いというのが当時の私の認識でした。単に作るだけならばいくらでもモデルはできます。大事なことはそのモデル化が問題の解明に役立つかどうかです。悩んでいたときに当時茨城大に所属していた森雅夫先生から点過程が役立つのではという助言をもらいました。

到着過程は到着時刻の列により表すことができます。このような時刻列を与えられた確率法則に従ってランダムに発生させることを考えてみて下さい。このとき実数軸上にランダムに配置された点に重みをもつランダムな測度が得られます。すなわち、標本を抽出すると1つの実数軸上の測度が得られます。これが点過程です。分厚い論文集にある Daley と Vere-Jones のサーベイ [7] を読んで勉強しました。どのように見つけたのか憶えていませんが、Ryll-Nardzewski [23] の論文を読んでこれこそ探していたモデルだと思いました。更に同じ内容を抽象化した Mecke [18] のドイツ語の論文にも出会いました。

この Mecke の論文は待ち行列ではなく純粋な数学の論文です。この論文は点過程を一般化したランダム測度について論じていますが、基本的な考え方は同じです。点過程を使って説明します。出発点は定常点過程（時間をずらしても分布が変わらない点過程）です。この点過程に対して点が起こる時刻でのみ観測したときの確率測度を定義することができパルム測度と呼びます。この論文の主要なテーマは、点過程と同時に定常な確率過程を任意の時刻で観測したときの確率測度とパルム測度の変換公式です。私はこの公式を待ち行列モデルに適用しました。この変換公式を使うと待ち人数のように任意の時刻で定義できる量と待ち時間の

ように客に関する量の間の関係を簡単に表現できます。平均待ち人数と平均待ち時間の関係を表すリトルの公式もその1つです。これが後に率保存則と呼ばれる公式 ([19] 参照) の原型です。

今からふり返ると当時 (1970 年代半ば) は待ち行列理論にとって転換点でした。Cohen [5] などにより待ち行列モデルの特性量を解析的に求める研究がほぼやり尽くされ、待ち行列理論の発展が止まっていました。理論の限界が危ぶまれていましたが、このようなときこそ新しい考えが出てくるものです。代表的なものに次の3つがあります。

1) Neuts [21] による行列解析を用いた数値計算法 (行列解析法と呼ぶ) の新たな展開

2) Kelly [14] による逆時間過程を用いた待ち行列ネットワークの積形式定常分布の導出 (積形式とは多次元分布が周辺分布の積となることを言い、このモデルを積形式ネットワークと呼ぶ)

3) 点過程を用いた待ち行列のモデル化とその応用
このうち 3) については当時東独の Franken, König, Arndt, Schmidt [9] らによる研究が既に行われていたことを後日 (1980 年頃) 知りました。この時代は共産圏諸国との学術交流はほとんど無く、互いに知らずに同じようなことを研究していたことになります。彼らとは競合することもありましたが時には一緒に論文を書くこともありました。

私自身は 3) をベースに、率保存則、確率順序、近似式、分布の不敏感性 (insensitivity) などの研究を続けました。この間、Ronald Wolff や Karl Sigman が率保存則に関心を示し交流が始まりました。しかし、リトルの公式のような関係式では具体的な結果が得られないこと、例えば、到着やサービス時間分布が待ちに及ぼす影響について具体的な答えが得られないことに不満が募っていました。このとき、1) と 2) は格好の題材であるように見えました。このようにして 1990 年代に私はこれらの問題に取り組むのですが、今からふり返ると、この時代に

4) Harrison [12] を中心としたスタンフォード大学のグループにより、拡散近似が待ち行列ネットワークへ適用され理論的に大きく進展した

ことを見逃していたことになります。正確には、拡散近似を、数値計算のための近似方法という観点からしか見ることができず、理論の本質を理解していませんでした。学力不足であったと言わざるを得ません。更に、待ち行列の制御について関心があまりなく、

5) 拡散方程式の解と待ち行列の漸近的最適制御

についても理解が不十分でした。これらの点については後述することにして、私が格闘した問題に戻ります。なお、5) については十分な理解がないので省きます。

4. 解ける問題を求めて

初めに 2) の積形式ネットワークがどこまで一般化できるのかという問題に取り組みました。これからはネットワークの時代であるという漠然とした思いと、積形式ネットワークに無限の可能性を感じたからでした。Wolff 先生の助言で Xiuli Chao に会い、シグナルのある待ち行列ネットワークの研究に取り組みました。ここに、シグナルとは瞬間的に複数のノードの客数に変化を起こす仮想的な到着です。その代表は Gelenbe [10] の発案による負の客 (negative customer) です。負の客は客数を減らすだけです。シグナルは増やすこともできます。ただし、定常分布が積形式となるのは負の客の場合だけで、一般のシグナルでは積形式の上界しか得られません。なお、外部からの到着はポアソン過程に従い、サービス時間は独立でノード（または客のタイプ）ごとに同一の指数分布に従うことを仮定します。なお、積形式ネットワークの定常分布の存在（安定性と呼ぶ）は簡単に確かめることができます。

Chao さんとは、彼の先生であった Mike Pinedo と一緒にシグナルのある積形式ネットワークに関する本 [3] の出版までしました。この本にも書きましたが、積形式ネットワークにおいて各ノードのサービス率をある特殊な関数形にすると、ネットワーク全体の状態に依存したサービス率をもつ待ち行列ネットワークの定常分布を求めることができます。この関数形は、逆時間過程も同様なネットワークになる（これを構造可逆と呼ぶ）という条件の下で導かれます。

構造可逆性をもつ一般化された積形式ネットワークは通信や計算機ネットワークに広く応用されてきました。このネットワークモデルの利点は定常分布が具体的に求まることです。かなり粗い近似とされますが、公平な経路選択を表す場合があることや他に解析的に定常分布が得られるモデルがないことから今日でも広く使われています。

積形式をもつ定常分布は魅力的ですが、利用できるモデルは限定的です。例えば、各ノードで先着順にサービスが行われ、サービス時間分布が指数分布でない場合には積形式とはなりません。一方、ネットワークではない 1 つのノードからなる待ち行列（単一ノードモデルと呼ぶ）は解析的に扱いやすいのですが、窓口が 1 つの場合でもポアソン到着とサービス時間が指数分

布に従うという仮定を共に除くと定常分布を解析的に求めることは困難です。窓口が複数になるとポアソン到着でもサービス時間が一般（すなわち、 $M/G/s$ 待ち行列）の場合には解くことができません。

このような単一ノードモデルに対して、解析的ではなく数値的に効率よく定常分布を求める方法が前節の 1) にある行列解析法 (Matrix Analytic Method) です。当時具体的に解を得ることに執着していた私には大変魅力的な方法に感じられました。このモデル化においては、待ち人数または系内仕事量を主な状態（これをレベルと呼ぶ）に選び、到着やサービスの進行状況を有限個の背後状態（これを相と呼ぶ）とします。レベルが 1 次元であることから、定常分布が存在するならば、各レベルの定常確率（正確には、各相の定常確率を要素とするベクトル）を行列幾何形（レベルが連続量の時は行列指数関数）と呼ばれる行列表現により表すことができます。例えば、行列幾何形式においては、レベルが n の状態確率ベクトル π_n （各相の確率を要素とする）はレベル 1 の状態確率ベクトル π_1 と率行列と呼ばれる正方行列 R により

$$\pi_n = \pi_1 R^{n-1}, \quad n = 1, \dots, \quad (4.1)$$

と表すことができます。特に背後状態が 1 つの場合にはこのモデルは $M/M/1$ に一致します。このときの定常分布 $\{\pi_n\}$ は利用率 ρ （到着率をサービス率で割ったもの）を使って、 $\rho < 1$ ならば、 $\pi_n = (1 - \rho)\rho^n$ となることが知られています。これより、

$$\pi_n = \pi_1 \rho^{n-1}, \quad n = 1, \dots, \quad (4.2)$$

が成り立ちます。これらの式を比較すると (4.1) は (4.2) において、スカラーをベクトルや行列に置き換えた式と見ることができます。これらのベクトルや行列は有限次元でですので、計算機を使った計算が可能です。また、相の数を増すことにより、かなり一般的な到着過程を表すことも可能です。

行列解析法は基本的には数値計算法です。しかし、定常分布が行列幾何形をもつことから、率行列 R の最大固有値が得られれば、定常分布の存在（安定性）を確かめ、裾の減少率を求めることが可能です。また、相の数を無限個にすれば、待ち行列ネットワークを表すこともできます。ともかく単一ノードモデルについて漸近特性の研究を始めました。そんな行列解析法の初心者であった私の所に、当時東工大の客員教授であった Guy Latouche がある日訪ねてきてくれました。彼

は高橋幸雄先生（当時東工大の教授）と同じように行列解析法の専門家です。どのようないきさつか憶えていませんが、2002年にオーストラリアのアデレード大学で開催された行列解析の国際会議に招待されました。このとき出会ったのが Yiqiang Zhao です。

5. 多次元定常分布の漸近特性

Zhao さんのお陰で待ち行列ネットワークの定常分布の漸近特性を本格的に研究するようになりました。Zhao さんの研究は Neuts などによる標準的な行列解析とは少し異なります。GR-分解と呼ぶ行列の分解公式を利用して裾確率の減少率など定常分布の漸近特性を調べます。GR-分解は基本的にはマルコフ加法過程の Wiener-Hopf 分解（状態推移における変化量の分布を正の方向と負の方向の変化量の分布に分解する式）と同じものです。Wiener-Hopf 分解を使うと率行列 R の特性がわかります。特に、背後状態数が有限のときには、 R の最大固有値が求まり、(4.1) より π_n の $n \rightarrow \infty$ のときの減少率が得られます。

1) の行列解析法は背後状態の個数を有限とするのが標準ですが、可算無限個への拡張が容易にできます。しかし、実数値のような連続状態は扱うことができません。この場合には行列ではなく関数空間上の作用素が必要です。このとき Wiener-Hopf 分解を使って行列解析の結果を拡張することができます。広く認識されているわけではありませんが、Wiener-Hopf 分解は行列解析の基本的道具と言えます。

Zhao さんはカナダのオタワにいます。同じオタワに大学は違いますが同じような漸近特性を研究している David McDonald がいます。Zhao さんを訪ねた際に自然と McDonald さんの所へもよく行きました。彼の研究はマルコフ加法過程の構造に注目した解析的な方法を使っています。行列解析法よりは精密な漸近特性が得られる場合があります。多面的な研究の必要性を感じました。とりわけ、Borovkov を代表とするロシアの研究 ([1] など) について多くを教えられました。

待ち行列ネットワークの定常分布は多次元であり、積形式などの例外的な場合を除いて定常分布を解析的に求めることは困難です。このため、解析的に扱いやすい漸近特性、なかでも定常分布の裾の漸近特性が注目されています。分布の裾の表す確率は安全設計などにおいて重要ですが、非常に小さくシミュレーションや数値計算で求めることが困難です。一方、大偏差値理論という一般的方法論がありますが、多次元の定常分布に対して具体的な結果を導くことに余り役立ちません。

私はこの問題に対し研究対象を待ち行列から反射壁をもつ多次元ランダムウォークへ広げ Wiener-Hopf 分解を使って取り組みました。待ち行列モデルとしては、到着やサービス時間が指数分布に従うと仮定するので特殊化しているとも言えますが、客の複数ノードへの同時到着やサーバーの相互協力など、標準的な待ち行列モデルでは解析が難しい問題を扱うことができます。

多次元と述べましたが、これまで定常分布の漸近特性が得られるのはほとんどの場合 2 次元に限られています。それでも 1 次元（待ち行列が 1 つ）の場合と比較すると大きな違いがあります。例えば、2 次元の分布の漸近特性（減少率など）は裾の形や方向により異なります。このため、従来の解析的な表現ではモデルの仮定が減少率に及ぼす影響を表すことが困難です。

そこで、モデルの仮定を多次元の変数をもつ積率母関数で表し、積率母関数を使った図形を描きます。この図形から定常分布の存在（安定性）を確かめ、裾の減少率を求めることができます。高性能なパソコンや Mathematica などの数値計算ソフトが手軽に使えるようになったため、図形的に減少率を表すことが可能になりました ([20] など)。

当然のことかもしれませんが、この場合に使う数学にも幾何的な表現が役立ちます。特に凸集合は重要な役割を持っています。また、減少率を求めることが凸関数による制約がある非線形最大（または最小）問題となる場合があります。私はたまたま興味本位で非線形最適化問題の本を読んでいました。これが結果的に大変役立ちました。同時に幾何的な表現や考え方の重要性を認識させられました。

もう一つ特筆すべきことは複素関数論が漸近特性を得るのに役立つことです。これは主に 2 次元の場合に限定されますが、現在までの所他の方法では得ることができないような結果を複素関数論を使って導くことができます。2 次元の反射壁をもつランダムウォークの複素関数論による解析は古くからありますが、目的が定常分布を解析的に求めることにあったため漸近解析への深い応用はありませんでした。リーマン面という複素曲面上での関数を扱うために手軽に扱えないこともあり余り普及してはいませんが、上記で述べた実数空間上の幾何学的な結果と組み合わせると精密な漸近特性を得ることができます ([6, 16] など)。

反射壁をもつ 2 次元ランダムウォーク（2 ノードの待ち行列ネットワークに対応）の定常分布の漸近特性はほぼ解明され、現在はマルコフ変調がある場合や 3 次元以上の場合の漸近特性に取り組んでいます。

6. 原点に戻る

漸近特性だけでは定常分布の特性のすべてを把握できません。もっと全体像が見たいという思いが強くなりました。一方、ネットワークモデルは複雑です。数値計算やシミュレーションを行うと大量のデータが得られますがそこから一般的な特性を見付けることは困難です。複雑なモデルの極限過程として得られるパラメータの少ない拡散近似モデルは大きな助けになるのではないかという思いが強くなりました。

このような経緯から 2 節の 4) にある拡散近似により得られる反射壁のある多次元ブラウン運動（セミマルチンゲールとなるので、semi-martingale reflecting Brownian motion, 略して、SRBM と呼ぶ）の定常分布の漸近特性の研究を始めました。\$d\$ 次元の SRBM\$\{Z(t)\}\$ は \$\{X(t)\}\$ を \$d\$ 次元のドリフトをもつブラウン運動とすると、\$Z(t)\$ と \$X(t)\$ の各成分が

$$Z_i(t) = Z_i(0) + X_i(t) + \sum_{ij} r_{ij} Y_j(t), \quad (6.3)$$

$$\int_0^t Z_i(u) dY_i(u) = 0, \quad (6.4)$$

を満たし、\$Z_i(t) \ge 0\$ かつ \$Y_i(t)\$ が非減少関数となる解 \$\{Z(t)\}\$ として定義されます。ここに、\$r_{ij}\$ を \$ij\$ 要素とする \$d\$ 次元の正方形行列 \$R\$ を反射行列と呼びます。\$Z(t)\$ は \$d\$ 次元の非負値空間 \$\mathbb{R}_+^d\$ 上を動きます。ここに \$\mathbb{R}_+ = [0, \infty)\$ です。(6.4) は \$Y_i(t)\$ が \$Z_i(t) = 0\$ のときのみ増加することを表しています。このとき、\$R\$ の第 \$i\$ 列は \$i\$ 番目の座標 \$x_i\$ が \$0\$ に等しい境界面における反射方向を決めるベクトルです。

定義を満たす SRBM\$\{Z(t)\}\$ の存在には \$R\$ に関する条件が必要です。この条件は客に種類のない待ち行列ネットワークへの応用では自動的に満たされるので詳しくは述べませんが、(6.3) と (6.4) から推測されるように数理計画の線形相補性問題が深く関わっています。この他に SRBM を扱うためには高度な確率過程の知識が必要なため、私には敷居が高く感じられました。そんなとき、2010 年に英国のケンブリッジ大学で開催された長期研究集会（半年間開催され、いつでも滞在できました）において SRBM の専門家の Jim Dai と会い共同研究 [6] を始めました。

Dai さんはこれまで私が共同研究をしてきたどの方とも違い、数学的な曖昧さを徹底的に嫌います。私はどちらかというところを予想し、証明を手抜きするところがあります。しかし、Dai さんには鍛えられまし

た。詳細な証明を行うことは、単に間違いを防ぐだけでなく、新たな展開があることを思い知らされました。

7. 拡散近似の奥深さ

待ち行列モデルの拡散近似とはブラウン運動から作られる確率過程による近似法です。簡単に言うと中心極限定理を確率過程に拡張したものです。中心極限定理では確率変数の和から平均を引いて分散で割る操作（これを正規化と呼ぶ）から正規分布が得られます。拡散近似でも同様な操作を行います。平均に相当する量は大量の法則から得られる流体近似を使います。例えば窓口が 1 つの標準的なモデルである \$GI/G/1\$ 待ち行列の到着率を \$\lambda\$、サービス率を \$\mu\$、時刻 \$t\$ での系内客数を \$Q(t)\$ とするとき、

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(Q(nt) - nt \max(0, \lambda - \mu)), \quad t \geq 0,$$

を \$\{Q(t); t \ge 0\}\$ の拡散尺度変換と呼びます。この場合、\$\lambda - \mu \ge 0\$ ならば、\$n \to \infty\$ とするとき極限過程としてブラウン運動が得られます。

しかし、ブラウン運動はどんな実数値も取り、定常分布が存在しないため、待ち行列の近似モデルとしては使えません。そこで、到着率とサービス率を \$n\$ と共に変化させ \$\lambda_n, \mu_n\$ と表します。\$n \to \infty\$ に対する \$\sqrt{n}(\lambda_n - \mu_n)\$ の極限值が存在するとき、拡散尺度による極限過程として次の 3 つの場合が得られます。

- (a) 定数 \$c\$ ならば反射壁をもつブラウン運動。
- (b) \$+\infty\$ ならば単純なブラウン運動。
- (c) \$-\infty\$ ならば恒等的に 0。

ここに、(a) と (c) は平均を引く補正を行いません。これより、(a) の場合、すなわち、\$\sqrt{n}(\lambda_n - \mu_n) \to c\$ のときのみ待ち行列として意味のある近似モデルが得られます。このときのブラウン運動は元の待ち行列モデルの到着間隔とサービス時間の平均と分散によって決まります。特に \$c < 0\$ ならば定常分布は指数分布となることも知られています。したがって、\$GI/G/1\$ 待ち行列の簡単な近似モデルが得られたことになります。

この拡散近似において \$n\$ 番目のシステムの利用率を \$\rho_n\$ とすると、\$\rho_n = \lambda_n / \mu_n\$ より、\$n \to \infty\$ のとき \$\rho_n \to 1\$ です。したがって、この拡散近似は利用率が 1 に近い所の近似です。このとき待ち行列は大きくなるのでこの近似を重負荷における拡散近似と呼びます。この近似においては、窓口はほとんどの時間稼働中になるために待ち行列モデルとしては簡単になります。

なお、直感的に拡散過程を待ち行列やそのネットワークに当てはめた近似法も古くからあり、拡散近似と呼ばれています。拡散係数の設定を細かく行えば見かけ上はもっともらしい近似が得られます。しかし、このような勘に頼る近似は理論的な検証ができないため、発展性に限界があると言わざるを得ません。本稿では拡散過程が極限過程として得られる場合のみを論じます。

重負荷における拡散近似のネットワークへの拡張は1970年代にスタンフォード大学で始まりました。特にIglehaltとWhitt [13]は直列型待ち行列に対しても同様な結果が得られることを示しました。しかし、彼らの結果は各ノードを個別に取り出したもので、極限としては1次元のブラウン運動しか得られていませんでした。その後Harrison [12]が、直列型に対して2次元の反射壁をもつブラウン運動が極限として得られることを示しました。これが1984年Reiman [22]による d 個のノードをもつ待ち行列ネットワークの重負荷における拡散近似に結実しました。この場合には極限過程として反射壁をもつ d 次元非負空間上のブラウン運動が得られます。これが6節で説明したSRBMです。

この結果の意味する所はネットワーク待ち行列に対しても近似モデルとして使えるような極限過程が得られたことです。この極限操作においてはどのノードも重負荷になることを仮定します。したがって、どのノードの待ち行列も大きくなるのですが極限過程はあるノードの待ち行列が大きいとき他のノードが空になる状況を捉えることができます。

しかし、弱点もあります。それは各ノードの窓口数が複数であっても窓口を1つにまとめて処理能力を同等にした場合と同じ極限過程になることです。したがって、複数窓口の優れた点が結果に反映されません。

この欠点を補うためHalfinとWhitt [11]は窓口数 n を変化させた $GI/M/n$ 待ち行列の列を考えました。この場合にはサービス時間には拡散尺度変換を適用せず、窓口数 n と到着率 λ_n を無限に大きくして系内客数から n 引いて $\sqrt{n}$ で割ったときの極限を求めました。このようにして得られた極限過程は $(-\infty, 0)$ 上ではOrnstein Uhlenbeck過程と呼ばれる状態依存型の拡散過程、 $(0, \infty)$ 上では負のドリフトをもつブラウン運動になります。この拡散過程は $(-\infty, +\infty)$ 上を動きますが元のモデルが安定であれば定常分布をもつので、近似モデルとして使うことができます。この近似法はHalfin-Whitt体系(regime)と呼ばれています。

その後の拡散近似の発展には目を見張るものがあります。SRBMによる拡散近似は、複数の種類の客が混

在して1つのノードでサービスを受ける待ち行列ネットワークへ拡張されました。この場合に系内客数ではなく系内総仕事量に注目して拡散近似を求めます。しかし、客の種類ごとの系内客数がわからないと客の経路選択を追っていくことができません。そこで、系内総仕事量から客の種類ごとの系内客数が求まる条件が必要になります。これが状態空間の崩壊(state space collapse)です([2, 24])。簡単に言うと、一定の比率でノードの総待ち行列長を種類に配分できる条件です。例えば先着順サービスに対しては、状態空間の崩壊現象が起こり、配分比率は各種類の到着率になることが証明されています。この条件の他に極限過程がSRBMとなるために必要な反射行列 R に関する条件を満たす必要があります。この条件は代数的なもので、個々の応用において確認することができます。

一般に複数の種類の客が混在するネットワークは、客に種類を表す印を付けて行列に並べる必要があるためモデル化の段階ですら極めて複雑です。状態空間の崩壊は重負荷時にはこれを単純化して客の種類を無視してまとめて解析し、後から客の種類ごとに待ち客数を求めることができることを表しています。これは相当な単純化ですが、重負荷時において数学的に確認されたことは画期的なことです。

Halfin-Whitt体系については、サービス時間分布を指数分布からより一般的な分布にする拡張が行われています。しかし、得られる拡散過程が複雑で拡散係数を求めるために関数方程式を解く必要があり、手軽に応用できる結果ではありません。また、客が途中で離脱する場合に対する拡張も行われています。なお、Halfin-Whitt体系はネットワークへ拡張することが難しく並列型などに限定されています。

上記のような理論的に大きな発展があったにもかかわらず、待ち行列ネットワークの拡散近似モデルである多次元SRBMの特性がよくわからないのが現状です。安定性については、4次元以上の場合モデルパラメータによる条件が求められていません。ただし、客に種類がなく、マルコフ的な経路選択を行う待ち行列ネットワークから得られるSRBMの安定性条件は簡単に求められます。定常分布の裾の漸近特性については、2次元の場合は解明されていますが、3次元以上では一般的な結果が得られていません。いずれにせよ、多次元SRBMの特性についての更なる解明が望まれます。

8. 待ち行列研究の現状

待ち行列に限らずどんな分野でも同じようなことが

言えるかもしれませんが、研究は10年から20年の周期で停滞と発展を繰り返します。待ち行列に関しては、現在停滞期にあるというのが私の認識です。本稿では触れませんでした、重い裾をもつサービス時間分布の影響などを含め、いろいろな意味での漸近理論が四半世紀ににわたり発展してきましたが、できることがやり尽くされたのが現状です。未解決の問題はたくさんありますが、解決が困難な問題ばかりです。

しかし、待ち行列の研究を見ていると、停滞期は次の大発展の準備期間であると思えることができます。理論的な方法論の研究だけでなく、待ち行列を必要とする新しい応用分野が必ず出てくると思います。例えば、電力などのエネルギーや無線のネットワークは待ち行列の応用分野として有望ですが、今ひとつ役立つ研究成果が出てきていないように思われます。

9. 終わりに

これまでの私の研究をふり返ってみると、私の研究スタイルは問題に取り組むとき、

- モデルの枠組みをできるだけ一般化する、
- 既存の表現方法や方法論にこだわらない、

の2つが基本になっているような気がします。無駄や失敗も多かったのですが、とにかく研究を続けることができたことは幸いです。

今一番大事と思うことは基礎学力の鍛錬です。日頃から数学力を鍛えておけば、いざというときに役立ちます。鍛錬は毎日少しずつが基本です。私のおすすめは、よい本、できれば専門外の本を探しだし読むことです。優れた本には著者の情熱を感じ取ることができ、勇気づけられます。私がよかったと思う本を3冊[4, 8, 17]最後に挙げておきます。

参考文献

- [1] A. A. Borovkov and A. A. Mogul'skiĭ. Large deviations for Markov chains in the positive quadrant. *Russian Mathematical Surveys*, 56:803–916, 2001.
- [2] M. Bramson. State space collapse with application to heavy traffic limits for multiclass queueing networks. *Queueing Systems*, 30:89–140, 1998.
- [3] X. Chao, M. Miyazawa, and M. Pinedo. *Queueing networks: customers, signals and product form solutions*. Wiley, 1999.
- [4] K. L. Chung. *A Course in Probability Theory*. Wiley, 1974.
- [5] J. W. Cohen. *The single server queue*. Applied Mathematics and Mechanics. North-Holland, 1982.
- [6] J. G. Dai and M. Miyazawa. Reflecting brownian motion in two dimensions: Exact asymptotics for the stationary distribution. *Stochastic Systems*, 1(1):146–208, 2011.
- [7] D. Daley and D. Vere-Jones. *A summary of the theory of point processes*, pages 299–383. Stochastic Point Processes: Statistical Analysis, Theory and Applications. Wiley, 1972.
- [8] G. Doetsch. *Introduction to the theory and application of the Laplace transformation*. Springer-Verlag, New York, 1974. Translated from the second German edition by Walter Nader.
- [9] P. Franken, D. Konig, U. Arnd, and V. Schmidt. *Queues and Point Processes*. Akademie-Verlag, Berlin: John Wiley and Sons, Chichester, 1981.
- [10] E. Gelenbe. Product-form queueing networks with negative and positive customers. *Journal of Applied Probability*, 28:656–663, 1991.
- [11] S. Halfin and W. Whitt. Heavy-traffic limits for queues with many exponential servers. *Oper. Res.*, 29(3):567–588, 1981.
- [12] J. M. Harrison. The heavy traffic approximation for single server queues in series. *J. Appl. Prob.*, 10:613–629, 1973.
- [13] D. L. Iglehart and W. Whitt. Multiple channel queues in heavy traffic II: sequences, networks, and batches. *Adv. in Appl. Prob.*, 2:355–369, 1970.
- [14] F. P. Kelly. *Reversibility and Stochastic Networks*. Wiley, 1979.
- [15] J. F. C. Kingman. On the algebra of queues. *J. Appl. Probability*, 3:285–326, 1966.
- [16] M. Kobayashi and M. Miyazawa. Revisit to the tail asymptotics of the double QBD process: Refinement and complete solutions for the coordinate and diagonal directions. In G. Latouche and M. S. Squillante, editors, *Matrix-Analytic Methods in Stochastic Models*, pages 147–181. Springer, 2012. arXiv:1201.3167.
- [17] A. I. Markushevich. *Theory of functions of a complex variable. Vol. I, II, III*. Chelsea Publishing Co., New York, english edition, 1977. Translated and edited by Richard A. Silverman.
- [18] J. Mecke. Stationäre zufällige maße auf lokalkompakten abelschen gruppen. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 9:36–58, 1967.
- [19] M. Miyazawa. Rate conservation laws: a survey. *Queueing Systems*, 15:1–58, 1994.
- [20] M. Miyazawa. Light tail asymptotics in multidimensional reflecting processes for queueing networks. *TOP*, 19(2):233–299, 2011.
- [21] M. F. Neuts. *Matrix-geometric solutions in stochastic models: an algorithm approach*. The John Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1981.
- [22] M. I. Reiman. Open queueing networks in heavy traffic. *Mathematics of Operations Research*, 9:441–458, 1984.
- [23] C. Ryll-Nardzewski. Remarks on processes of calls. In *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on mathematical statistics and probability*, volume 2, pages 455–465, Berkeley, CA, 1961. University of California Press.
- [24] R. J. Williams. Diffusion approximations for open multiclass queueing networks: sufficient conditions involving state space collapse. *Queueing Systems*, 30:27–88, 1998.