

非線形シュレディンガー方程式 の定在波解の安定性と不安定性

太田 雅人（東京理科大学 理学部数学科）

1. はじめに

本稿では、非線形 Schrödinger 方程式

$$(NLS) \quad i\partial_t u = -\Delta u - |u|^{p-1}u, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$$

について考える．ここで、 $u = u(t, x)$ は複素数値の未知関数である．また、

$$2^* := \begin{cases} 2N/(N-2) & (N \geq 3) \\ \infty & (N = 1, 2) \end{cases}$$

を Sobolev の埋蔵定理 $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ の臨界指数とし、 $1 < p < 2^* - 1$ を仮定する． $1 \leq q < \infty$ に対して、Lebesgue 空間 $L^q(\mathbb{R}^N)$ のノルムを

$$\|u\|_{L^q} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

と表し、 $L^2(\mathbb{R}^N) := L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, $H^1(\mathbb{R}^N) := H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ はそれぞれ、内積

$$(u, v)_{L^2} := \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \overline{v(x)} dx, \quad (u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2}$$

を備えた実 Hilbert 空間とする．

考える問題は、(NLS) の定在波解 $u(t, x) = e^{i\omega t} \varphi(x)$ の安定性と不安定性である．ここで、 $\omega > 0$ は定数で、 $\varphi(x)$ は、 $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ を満たす、定常問題

$$(SP) \quad -\Delta \varphi + \omega \varphi - |\varphi|^{p-1} \varphi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

の解である．

まず、(NLS) に関する基本的な結果をまとめておこう．

$$E(v) := \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1} \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}, \quad Q(v) := \frac{1}{2} \|v\|_{L^2}^2$$

と定め、 E をエネルギー、 Q を電荷と呼ぶ．エネルギー空間 $H^1(\mathbb{R}^N)$ における (NLS) の初期値問題の適切性に関して次が知られている．

命題 1 $1 < p < 2^* - 1$ とする．任意の初期データ $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して，最大存在時間 $T^* = T^*(u_0) \in (0, \infty]$ と初期条件 $u(0) = u_0$ を満たす (NLS) の解 $u \in C([0, T^*), H^1(\mathbb{R}^N))$ が一意的に存在する．また，エネルギー及び電荷の保存則が成り立つ：

$$E(u(t)) = E(u_0), \quad Q(u(t)) = Q(u_0), \quad \forall t \in [0, T^*).$$

さらに， $T^* < \infty$ ならば $\lim_{t \rightarrow T^*} \|\nabla u(t)\|_{L^2} = \infty$ (blowup alternative). □

命題 1 を含む，より一般的な定理が Ginibre and Velo [8], Kato [11] などによって証明されている．教科書 Cazenave [5], 堤 [19] も参照のこと．

次に，解の時間大域存在に関する定理を示そう．

定理 2

- (1) $1 < p < 1 + 4/N$ のとき，すべての $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して， $T^*(u_0) = \infty$.
- (2) $p = 1 + 4/N$ のとき， $\delta_1 > 0$ が存在し， $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\|u_0\|_{L^2} < \delta_1$ ならば， $T^*(u_0) = \infty$.
- (3) $1 + 4/N < p < 2^* - 1$ のとき， $\delta_2 > 0$ が存在し， $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\|u_0\|_{H^1} < \delta_2$ ならば， $T^*(u_0) = \infty$.

証明 $u(t)$ を $u(0) = u_0$ なる (NLS) の解とすると，エネルギーの保存則より， $t \in [0, T^*)$ に対して，

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 = 2E(u_0) + \frac{2}{p+1} \|u(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

が成り立つ．ここで， $\alpha := N(p-1)/2$ とおくと，Gagliardo-Nirenberg の不等式より， $C = C(N, p) > 0$ が存在し，

$$\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1} \leq C \|u\|_{L^2}^{p+1-\alpha} \|\nabla u\|_{L^2}^\alpha \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

よって，電荷の保存則より， $t \in [0, T^*)$ に対して，

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \leq 2E(u_0) + C_1 \|u_0\|_{L^2}^{p+1-\alpha} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^\alpha. \quad (\text{a})$$

- (1) $1 < p < 1 + 4/N$ のとき， $0 < \alpha < 2$ だから， $\beta = 2(p+1-\alpha)/(2-\alpha)$ とおくと，Young の不等式より，

$$C_1 \|u_0\|_{L^2}^{p+1-\alpha} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^\alpha \leq \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + C_2 \|u_0\|_{L^2}^\beta.$$

よって, (a) より, $t \in [0, T^*)$ に対して,

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \leq 2E(u_0) + \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + C_2\|u_0\|_{L^2}^\beta$$

であり, $\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \leq 4E(u_0) + 2C_2\|u_0\|_{L^2}^\beta$ だから, 命題 1 の blowup alternative より, $T^* = \infty$ が成り立つ.

(2) $p = 1 + 4/N$ のとき, $\alpha = 2$ だから, (a) より, $t \in [0, T^*)$ に対して,

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \leq 2E(u_0) + C_1\|u_0\|_{L^2}^{p-1}\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2.$$

よって, $C_1\|u_0\|_{L^2}^{p-1} < 1$ ならば, $\sup_{t \in [0, T^*)} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 < \infty$ であり, $T^* = \infty$.

(3) 電荷及びエネルギー保存則と Sobolev の不等式より, $t \in [0, T^*)$ に対して

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{H^1}^2 &= \|u(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \\ &= \|u_0\|_{L^2}^2 + 2E(u_0) + \frac{2}{p+1}\|u(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1} \\ &\leq \|u_0\|_{H^1}^2 + C_1\|u(t)\|_{H^1}^{p+1}. \end{aligned} \tag{b}$$

ここで, $\delta > 0$ を

$$C_1(2\delta)^{p+1} \leq \delta^2 \tag{c}$$

を満たすようにとる. このとき,

$$\|u_0\|_{H^1} \leq \delta \text{ ならば } \|u(t)\|_{H^1} \leq 2\delta \quad \forall t \in [0, T^*) \tag{d}$$

が成り立つ.

実際, $u \in C([0, T^*), H^1(\mathbb{R}^N))$ だから, $\|u_0\|_{H^1} \leq \delta$ より,

$$\exists T_1 \in (0, T^*) \text{ s.t. } \|u(t)\|_{H^1} \leq 2\delta \quad \forall t \in [0, T_1]. \tag{e}$$

ここで, $\tilde{T}$ を (e) が成り立つような T_1 の上限とし, $\tilde{T} < T^*$ と仮定する.

このとき, (b), (c) より, $t \in [0, \tilde{T}]$ に対して,

$$\|u(t)\|_{H^1}^2 \leq \delta^2 + C_1(2\delta)^{p+1} \leq 2\delta^2$$

だから, $\|u(t)\|_{H^1} \leq \sqrt{2}\delta < 2\delta$ が成り立つ. これは $\tilde{T}$ の定義に矛盾する.

よって, $\tilde{T} = T^*$ であり, (d) が成り立つことが示された.

故に, blowup alternative より, $T^* = \infty$ である. □

次に、解の爆発に関する定理を紹介する。

$$\Sigma := \{v \in H^1(\mathbb{R}^N) : xv \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$$

と定める。また、 $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して、

$$P(v) := \|\nabla v\|_{L^2}^2 - \frac{N(p-1)}{2(p+1)} \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

と定める。

命題 3 $1 < p < 2^* - 1$ とする。 $u_0 \in \Sigma$ とし、 $u(t)$ を $u(0) = u_0$ なる (NLS) の解とする。このとき、 $u \in C([0, T^*), \Sigma)$ 。さらに、

$$f(t) := \|xu(t)\|_{L^2}^2, \quad t \in [0, T^*)$$

と定めると、 $f \in C^2[0, T^*)$ であり、 $t \in [0, T^*)$ に対して

$$f''(t) = 8P(u(t)) \quad (\text{virial identity})$$

が成り立つ。 □

命題 3 の証明については、Cazenave [5] を参照のこと。

定理 4 $1 + 4/N \leq p < 2^* - 1$ とする。このとき、 $u_0 \in \Sigma$ かつ $E(u_0) < 0$ ならば、 $T^*(u_0) < \infty$ 。

証明 $p \geq 1 + 4/N$ のとき、任意の $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$E(v) - \frac{1}{2}P(v) = \left\{ \frac{N(p-1)}{4} - 1 \right\} \frac{1}{p+1} \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} \geq 0.$$

よって、命題 3 とエネルギー保存則より、 $t \in [0, T^*)$ に対して、

$$\frac{d^2}{dt^2} \|xu(t)\|_{L^2}^2 = 8P(u(t)) \leq 16E(u(t)) = 16E(u_0) < 0$$

が成り立つ。これから、 $T^* < \infty$ が従う。 □

2. 定常問題

この節では, $\omega > 0, 1 < p < 2^* - 1$ とし, 定常問題

$$(SP) \quad -\Delta\varphi + \omega\varphi - |\varphi|^{p-1}\varphi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

について考える. (SP) に対応する作用汎関数 $S_\omega : H^1 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$S_\omega(v) := \frac{1}{2}\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{\omega}{2}\|v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

と定める. このとき, $S_\omega : H^1 \rightarrow \mathbb{R}$ は C^1 級であり, $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$(SP) \iff S'_\omega(\varphi) = 0.$$

また, $y \in \mathbb{R}^N$ に対して, $\tau_y v(x) = v(x - y)$ ($x \in \mathbb{R}^N$) とするとき, $\theta \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^N$, $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して, $S_\omega(e^{i\theta}\tau_y v) = S_\omega(v)$ が成り立つことに注意する.

定義 $\omega > 0$ に対して,

$$\mathcal{A}_\omega := \{v \in H^1(\mathbb{R}^N) : S'_\omega(v) = 0, v \neq 0\},$$

$$\mathcal{G}_\omega := \{\phi \in \mathcal{A}_\omega : S_\omega(\phi) \leq S_\omega(v) \text{ for all } v \in \mathcal{A}_\omega\}$$

と定める. $\mathcal{A}_\omega$ は (SP) の非自明解全体の集合である. $\mathcal{G}_\omega$ の元を (SP) の基底状態 (ground state) という. また, $\mathcal{A}_\omega \setminus \mathcal{G}_\omega$ の元, すなわち, (SP) の非自明解で基底状態でないものを (SP) の励起状態 (excited state) という. $\square$

(SP) を含む一般的な半線形楕円型方程式の基底状態及び励起状態の存在が, Strauss [18], Berestycki and Lions [2], Brezis and Lieb [4] などにより, それぞれ, 異なるコンパクト性定理を用いて証明されている.

以下では, 主に, Brezis and Lieb [4] に基づいて, (SP) の基底状態の存在を証明しよう. そのための準備として, 次を定義する.

$$K_\omega(v) := \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \omega\|v\|_{L^2}^2 - \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1},$$

$$\mathcal{K}_\omega := \{v \in H^1(\mathbb{R}^N) : K_\omega(v) = 0, v \neq 0\},$$

$$d(\omega) := \inf\{S_\omega(v) : v \in \mathcal{K}_\omega\},$$

$$\mathcal{M}_\omega := \{v \in \mathcal{K}_\omega : S_\omega(v) = d(\omega)\}.$$

ここで, $\lambda > 0, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$S_\omega(\lambda v) = \frac{\lambda^2}{2}(\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \omega\|v\|_{L^2}^2) - \frac{\lambda^{p+1}}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

であり,

$$K_\omega(v) = \partial_\lambda S_\omega(\lambda v)|_{\lambda=1} = \langle S'_\omega(v), v \rangle, \quad \mathcal{G}_\omega \subset \mathcal{A}_\omega \subset \mathcal{K}_\omega$$

に注意する.

基底状態の存在を示すための鍵となるのは, 次の2つの基本定理である.

Lieb のコンパクト性定理 ([14]) $\{u_n\}$ は $H^1(\mathbb{R}^N)$ の有界列で, ある $q \in (2, 2^*)$ に対して, $\inf_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} > 0$ を満たすとする. このとき, $\mathbb{R}^N$ の点列 $\{y_n\}$, $v \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$, 部分列 $\{n_j\}$ で, $\tau_{y_{n_j}} u_{n_j} \rightharpoonup v$ weakly in $H^1(\mathbb{R}^N)$ を満たすものが存在する.

Brezis-Lieb の補題 ([3]) $1 < q < \infty$ とする. $\{u_n\}$ は $L^q(\mathbb{R}^N)$ の有界列で, $u_n \rightarrow u$ a.e. in $\mathbb{R}^N$ とする. このとき, $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$ であり

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{\|u_n\|_{L^q}^q - \|u_n - u\|_{L^q}^q\} = \|u\|_{L^q}^q.$$

注意 $2 \leq q < 2^*$ のとき, $\{u_n\}$ が $H^1(\mathbb{R}^N)$ の有界列ならば, 部分列をとることにより, Brezis-Lieb の補題の仮定は満たされる.

また, X が Hilbert 空間のとき, $u_n \rightharpoonup u$ weakly in X ならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{\|u_n\|_X^2 - \|u_n - u\|_X^2\} = \|u\|_X^2$$

が成り立つことは容易に分かる. □

Lieb のコンパクト性定理と Brezis-Lieb の補題の証明はこの節の最後に与える. 以下, この2つの基本定理を用いて, (SP) の基底状態の存在を示す.

補題 1 $\mathcal{M}_\omega \subset \mathcal{G}_\omega$.

証明 $v \in \mathcal{M}_\omega$ とする. このとき, $\langle K'_\omega(v), v \rangle = \partial_\lambda K_\omega(\lambda v)|_{\lambda=1} \neq 0$ だから, Lagrange の未定乗数定理 (下記補足参照) より, $\exists \mu \in \mathbb{R}$ s.t. $S'_\omega(v) = \mu K'_\omega(v)$.

このとき

$$0 = K_\omega(v) = \langle S'_\omega(v), v \rangle = \mu \langle K'_\omega(v), v \rangle, \quad \langle K'_\omega(v), v \rangle \neq 0$$

だから, $\mu = 0$ であり, $S'_\omega(v) = 0$. よって, $v \in \mathcal{A}_\omega$.

さらに, $\mathcal{A}_\omega \subset \mathcal{K}_\omega$ だから, 任意の $\varphi \in \mathcal{A}_\omega$ に対して, $S_\omega(v) = d(\omega) \leq S_\omega(\varphi)$.

よって, $v \in \mathcal{G}_\omega$ となり, $\mathcal{M}_\omega \subset \mathcal{G}_\omega$ が示された. □

補足 $v \in \mathcal{M}_\omega$ とすると, $\exists \mu \in \mathbb{R}$ s.t. $S'_\omega(v) = \mu K'_\omega(v)$.

証明 $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ を任意にとり,

$$f(s, t) = S_\omega(v + sw + tv), \quad g(s, t) = K_\omega(v + sw + tv), \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2$$

と定める. このとき, $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. また,

$$g(0, 0) = K_\omega(v) = 0, \quad g_t(0, 0) = \langle K'_\omega(v), v \rangle \neq 0$$

だから, 陰関数定理により, C^1 級関数 $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ で,

$$\gamma(0) = 0, \quad g(s, \gamma(s)) = 0, \quad s \in (-\delta, \delta)$$

を満たすものが存在する. このとき, $g_s(0, 0) + g_t(0, 0)\gamma'(0) = 0$ だから,

$$\gamma'(0) = -\frac{g_s(0, 0)}{g_t(0, 0)} = -\frac{\langle K'_\omega(v), w \rangle}{\langle K'_\omega(v), v \rangle}.$$

さらに, $s \in (-\delta, \delta)$ に対して, $v + sw + \gamma(s)v \in \mathcal{K}_\omega$ だから, $h(s) := f(s, \gamma(s))$ は $s = 0$ で極小値をとり,

$$\begin{aligned} 0 &= h'(0) = f_s(0, 0) + f_t(0, 0)\gamma'(0) = \langle S'_\omega(v), w \rangle + \gamma'(0)\langle S'_\omega(v), v \rangle \\ &= \langle S'_\omega(v), w \rangle - \frac{\langle S'_\omega(v), v \rangle}{\langle K'_\omega(v), v \rangle} \langle K'_\omega(v), w \rangle \end{aligned}$$

となる. ここで, $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ は任意だから, $\mu = \langle S'_\omega(v), v \rangle / \langle K'_\omega(v), v \rangle$ とおくと, $S'_\omega(v) = \mu K'_\omega(v)$ が成り立つ. $\square$

補題 2 $\mathcal{M}_\omega$ が空集合でないならば, $\mathcal{G}_\omega = \mathcal{M}_\omega$.

証明 $\mathcal{G}_\omega \subset \mathcal{M}_\omega$ を示せばよい. $v \in \mathcal{G}_\omega$ を任意にとる. また, $\mathcal{M}_\omega$ は空でないから, $w \in \mathcal{M}_\omega$ をとる. このとき, 補題 1 より, $w \in \mathcal{A}_\omega$ であり, $v \in \mathcal{G}_\omega$ だから, $S_\omega(v) \leq S_\omega(w) = d(\omega)$.

一方, $v \in \mathcal{G}_\omega \subset \mathcal{K}_\omega$ だから, $d(\omega)$ の定義より, $d(\omega) \leq S_\omega(v)$.

よって, $S_\omega(v) = d(\omega)$ となり, $v \in \mathcal{M}_\omega$ だから, $\mathcal{G}_\omega \subset \mathcal{M}_\omega$ が示された. $\square$

補題 2 より, $\mathcal{M}_\omega$ が空でないことを示せばよいが, より強い次の定理を示そう.

定理 3 $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, $K_\omega(u_n) \rightarrow 0$, $S_\omega(u_n) \rightarrow d(\omega)$ とする. このとき, $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$, 部分列 $\{n_j\}$, $v \in \mathcal{M}_\omega$ が存在して, $\tau_{y_{n_j}} u_{n_j} \rightarrow v$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$. $\square$

定理 3 を証明するために、いくつか準備をする。まず、汎関数

$$J_\omega(v) := \frac{p-1}{2(p+1)} (\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \omega \|v\|_{L^2}^2), \quad V(v) := \frac{p-1}{2(p+1)} \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

を定義する。このとき、

$$S_\omega(v) = J_\omega(v) + \frac{1}{p+1} K_\omega(v) = V(v) + \frac{1}{2} K_\omega(v),$$

$$d(\omega) = \inf\{J_\omega(v) : v \in \mathcal{K}_\omega\} = \inf\{V(v) : v \in \mathcal{K}_\omega\}$$

であり、 $d(\omega) \geq 0$ に注意する。

補題 4 $d(\omega) > 0$.

証明 $v \in \mathcal{K}_\omega$ を任意にとる。このとき、 $K_\omega(v) = 0$ と Sobolev の不等式より、正定数 C_1, C_2, C_3 が存在し、

$$C_1 J_\omega(v) = \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \omega \|v\|_{L^2}^2 = \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} \leq C_2 \|v\|_{H^1}^{p+1} \leq C_3 J_\omega(v)^{(p+1)/2}.$$

$$\text{ここで、} v \neq 0 \text{ より、} J_\omega(v)^{(p-1)/2} \geq \frac{C_1}{C_3} \text{ だから、} d(\omega) \geq \left(\frac{C_1}{C_3}\right)^{2/(p-1)}. \quad \square$$

補題 5 $K_\omega(v) < 0$ ならば、 $J_\omega(v) > d(\omega), V(v) > d(\omega)$.

証明 $\lambda \mapsto K_\omega(\lambda v)$ のグラフより、 $K_\omega(\lambda_0 v) = 0$ を満たす $\lambda_0 \in (0, 1)$ が存在する。

また、 $v \neq 0$ より、 $\lambda_0 v \in \mathcal{K}_\omega$ だから、

$$d(\omega) \leq J_\omega(\lambda_0 v) < J_\omega(v), \quad d(\omega) \leq V(\lambda_0 v) < V(v)$$

が成り立つ。 □

以上の準備のもとで、定理 3 を証明しよう。

定理 3 の証明

Step 1 まず、 $S_\omega(u_n) \rightarrow d(\omega), K_\omega(u_n) \rightarrow 0$ より、 $J_\omega(u_n) \rightarrow d(\omega)$ だから、 $\{u_n\}$ は $H^1(\mathbb{R}^N)$ の有界列である。

また、 $V(u_n) \rightarrow d(\omega)$ であり、補題 4 より、 $d(\omega) > 0$ だから、Lieb のコンパクト性定理より、 $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ 、部分列 (以下、部分列を同じ記号で書く)、 $v \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ が存在して、 $v_n := \tau_{y_n} u_n \rightharpoonup v$ weakly in $H^1(\mathbb{R}^N)$.

さらに、Brezis-Lieb の補題より

$$J_\omega(v_n) - J_\omega(v_n - v) \rightarrow J_\omega(v), \quad (1)$$

$$K_\omega(v_n) - K_\omega(v_n - v) \rightarrow K_\omega(v). \quad (2)$$

Step 2 $K_\omega(v) = 0$ であることを背理法で示そう.

まず, $K_\omega(v) > 0$ と仮定すると, $K_\omega(v_n) = K_\omega(u_n) \rightarrow 0$ だから, (2) より, $K_\omega(v_n - v) \rightarrow -K_\omega(v) < 0$. よって, 十分大きな n に対して, $K_\omega(v_n - v) < 0$ だから, 補題5より, $J_\omega(v_n - v) > d(\omega)$. このとき, $J_\omega(v_n) = J_\omega(u_n) \rightarrow d(\omega)$ だから, (1) より, $J_\omega(v) \leq 0$ となるが, これは $v \neq 0$ であることと矛盾する.

また, $K_\omega(v) < 0$ と仮定すると, 補題5より, $J_\omega(v) > d(\omega)$ となる. 一方, $v_n \rightharpoonup v$ weakly in $H^1(\mathbb{R}^N)$ より, $J_\omega(v) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J_\omega(v_n) = d(\omega)$ だから, これも矛盾である.

故に, $K_\omega(v) = 0$ であり, $v \in \mathcal{K}_\omega$ である.

Step 3 $d(\omega)$ の定義と $v_n \rightharpoonup v$ weakly in $H^1(\mathbb{R}^N)$ より,

$$d(\omega) \leq S_\omega(v) = J_\omega(v) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J_\omega(v_n) = d(\omega).$$

これから, $S_\omega(v) = d(\omega)$ だから, $v \in \mathcal{M}_\omega$.

さらに, $\|v_n\|_{H^1} \rightarrow \|v\|_{H^1}$ だから, $v_n \rightarrow v$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$ が分かる. $\square$

最後に, Lieb のコンパクト性定理と Brezis-Lieb の補題の証明を与える.

Lieb のコンパクト性定理の証明 はじめに,

$$C_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2, \quad C_2 = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^q, \quad C_3 = \frac{C_1 + 1}{C_2}$$

とおく. また, $y = (y^1, \dots, y^N) \in \mathbb{Z}^N$ に対して,

$$Q_y = \{x = (x^1, \dots, x^N) \in \mathbb{R}^N : y^j < x^j < y^j + 1 \ (j = 1, \dots, N)\}$$

とおく. このとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $y_n \in \mathbb{Z}^N$ が存在し,

$$\|u_n\|_{H^1(Q_{y_n})}^2 < C_3 \|u_n\|_{L^q(Q_{y_n})}^q. \quad (1)$$

実際, これが成り立たないと仮定すると, $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し,

$$\|u_{n_0}\|_{H^1(Q_y)}^2 \geq C_3 \|u_{n_0}\|_{L^q(Q_y)}^q, \quad \forall y \in \mathbb{Z}^N.$$

このとき,

$$\begin{aligned} C_1 &\geq \|u_{n_0}\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 = \sum_{y \in \mathbb{Z}^N} \|u_{n_0}\|_{H^1(Q_y)}^2 \\ &\geq C_3 \sum_{y \in \mathbb{Z}^N} \|u_{n_0}\|_{L^q(Q_y)}^q = C_3 \|u_{n_0}\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^q \geq C_3 C_2 = C_1 + 1 \end{aligned}$$

となり、矛盾が生じる。故に、(1) を満たす点列 $\{y_n\} \subset \mathbb{Z}^N$ が存在する。

この点列 $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ に対して、 $v_n := \tau_{-y_n} u_n$ とおくと

$$\|v_n\|_{H^1(Q_0)}^2 < C_3 \|v_n\|_{L^q(Q_0)}^q \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

特に、 $\|v_n\|_{L^q(Q_0)} > 0$. さらに、Sobolev の埋蔵定理より、 N と q のみに依存する定数 $C_4 > 0$ が存在して、 $C_4 \|v_n\|_{L^q(Q_0)}^2 \leq \|v_n\|_{H^1(Q_0)}^2$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) だから、

$$0 < C_4/C_3 \leq \|v_n\|_{L^q(Q_0)}^{q-2} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

ここで、 $\{v_n\}$ は $H^1(\mathbb{R}^N)$ の有界列だから、ある部分列 $\{n_j\}$ と $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ が存在して、 $v_{n_j} \rightharpoonup v$ weakly in $H^1(\mathbb{R}^N)$. さらに、埋め込み $H^1(Q_0) \hookrightarrow L^q(Q_0)$ はコンパクトだから、(2) より、 $\|v\|_{L^q(Q_0)} \geq (C_4/C_3)^{1/(q-2)} > 0$ となり、 $v \neq 0$. $\square$

Brezis-Lieb の補題の証明 まず、 $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{L^q}$ とおくと、Fatou の補題より、 $\|u\|_{L^q}^q \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L^q}^q \leq M^q$ であり、 $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$ に注意する。

$v_n(x) = u_n(x) - u(x)$ とおく。また、 $\varepsilon > 0$ を任意にとり、

$$w_{\varepsilon,n}(x) = \left[\left| |v_n(x) + u(x)|^q - |v_n(x)|^q - |u(x)|^q \right| - \varepsilon |v_n(x)|^q \right]_+$$

とおく。ここで、 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して、 $[\alpha]_+ = \max\{\alpha, 0\}$ である。

仮定より、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $w_{\varepsilon,n} \rightarrow 0$ a.e. in $\mathbb{R}^N$.

また、 $C_\varepsilon > 0$ が存在し、 $||a+b|^q - |a|^q| \leq \varepsilon |a|^q + C_\varepsilon |b|^q$ ($a, b \in \mathbb{C}$) だから

$$\begin{aligned} & \left| |v_n + u|^q - |v_n|^q - |u|^q \right| \\ & \leq \left| |v_n + u|^q - |v_n|^q \right| + |u|^q \leq \varepsilon |v_n|^q + (C_\varepsilon + 1)|u|^q. \end{aligned}$$

よって、 $0 \leq w_{\varepsilon,n} \leq (C_\varepsilon + 1)|u|^q \in L^1(\mathbb{R}^N)$ だから、Lebesgue の優収束定理より、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $\int_{\mathbb{R}^N} w_{\varepsilon,n} dx \rightarrow 0$.

さらに、

$$\left| |v_n + u|^q - |v_n|^q - |u|^q \right| \leq w_{\varepsilon,n} + \varepsilon |v_n|^q$$

だから、 $I_n := \int_{\mathbb{R}^N} \left| |v_n + u|^q - |v_n|^q - |u|^q \right| dx$ とおくと、

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} I_n & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} w_{\varepsilon,n} dx + \varepsilon \limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{L^q}^q \\ & \leq \varepsilon \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\|u_n\|_{L^q} + \|u\|_{L^q}\}^q \leq \varepsilon (2M)^q. \end{aligned}$$

ここで、 $\varepsilon > 0$ は任意だから、 $I_n \rightarrow 0$ となり、補題が証明された。 $\square$

3. 基底状態の安定性

この節では、非線形 Schrödinger 方程式

$$(NLS) \quad i\partial_t u = -\Delta u - |u|^{p-1}u, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$$

の定在波解 $u(t, x) = e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ の安定性について考える.

ここで, $1 < p < 2^* - 1$, $\omega > 0$ とし, $\phi_\omega(x)$ は定常問題

$$(SP) \quad -\Delta\varphi + \omega\varphi - |\varphi|^{p-1}\varphi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

の基底状態とする. このとき, 次が成り立つ.

定理 1 $1 < p < 1 + 4/N$, $\omega > 0$, $\phi_\omega \in \mathcal{G}_\omega$ とする. このとき, (NLS) の定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ は次の意味で安定である: 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在し, $\|u_0 - \phi_\omega\|_{H^1} < \delta$ ならば, $u(0) = u_0$ なる (NLS) の解 $u(t)$ は時間大域的に存在し, すべての $t \in [0, \infty)$ に対して

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{G}_\omega} \|u(t) - \varphi\|_{H^1} < \varepsilon.$$

注意 $\phi_\omega \in \mathcal{G}_\omega$ とすると, 対称性より, $\{e^{i\theta}\tau_y\phi_\omega : \theta \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^N\} \subset \mathcal{G}_\omega$ である.

一方, $\theta \in \mathbb{R}$ が存在し, $e^{i\theta}\phi_\omega(x) > 0$ ($x \in \mathbb{R}^N$) となる ([5] p.266 参照). また, Gidas-Ni-Nirenberg [7] より, $y \in \mathbb{R}^N$ が存在し, $e^{i\theta}\tau_y\phi_\omega(x)$ は原点に関して球対称となる. さらに, (SP) の正值球対称解は一意的 (Kwong [12]) だから,

$$\mathcal{G}_\omega = \{e^{i\theta}\tau_y\phi_\omega : \theta \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^N\}$$

が成り立つ. この基底状態の一意性と定理 1 から次が成り立つ.

定理 1' $1 < p < 1 + 4/N$, $\omega > 0$, $\phi_\omega \in \mathcal{G}_\omega$ とする. このとき, (NLS) の定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ は次の意味で安定である: 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在し, $\|u_0 - \phi_\omega\|_{H^1} < \delta$ ならば, $u(0) = u_0$ なる (NLS) の解 $u(t)$ は時間大域的に存在し, すべての $t \in [0, \infty)$ に対して

$$\inf_{\theta \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^N} \|u(t) - e^{i\theta}\tau_y\phi_\omega\|_{H^1} < \varepsilon.$$

定理 1 は Cazenave and Lions [6] による. また, 非線形 Klein-Gordon 方程式

$$(NLKG) \quad \partial_t^2 u - \Delta u + u = |u|^{p-1}u, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$$

に対して、同様の結果が Shatah [16] により証明された．Cazenave and Lions [6] と Shatah [16] の証明はどちらも基底状態の変分的特徴付けに基づいている．

一方、定在波解のまわりで方程式を線形化し、その線形化作用素のスペクトル解析を用いて安定性を示す方法が Weinstein [20], Grillakis, Shatah and Strauss [10] で与えられている．

以下、Shatah [16] に従って、定理 1 を証明しよう． $\omega > 0$ に対して

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\omega^+ &:= \{v \in H^1(\mathbb{R}^N) : S_\omega(v) < d(\omega), V(v) > d(\omega)\}, \\ \mathcal{R}_\omega^- &:= \{v \in H^1(\mathbb{R}^N) : S_\omega(v) < d(\omega), V(v) < d(\omega)\}\end{aligned}$$

と定める．

補題 2 $\mathcal{R}_\omega^+$ は (NLS) の流れに関して不変である．すなわち、 $u_0 \in \mathcal{R}_\omega^+$ とし、 $u(t)$ を $u(0) = u_0$ なる (NLS) の解とすると、すべての $t \in [0, T^*)$ に対して、 $u(t) \in \mathcal{R}_\omega^+$ ．また、 $\mathcal{R}_\omega^-$ も (NLS) の流れに関して不変である．

証明 $\mathcal{R}_\omega^-$ に関しても同様だから、 $\mathcal{R}_\omega^+$ が不変集合であることを示す．

$u_0 \in \mathcal{R}_\omega^+$ とし、 $u(t)$ を $u(0) = u_0$ なる (NLS) の解とする．このとき、エネルギー及び電荷の保存則より

$$S_\omega(u(t)) = S_\omega(u_0) < d(\omega), \quad \forall t \in [0, T^*). \quad (1)$$

よって、任意の $t \in [0, T^*)$ に対して $V(u(t)) > d(\omega)$ を示せばよい．これが成り立たないと仮定すると、 $t \mapsto V(u(t))$ の連続性より、 $V(u(t_0)) = d(\omega)$ を満たす $t_0 \in (0, T^*)$ が存在する．このとき、§2 補題 5 より、 $K_\omega(u(t_0)) \geq 0$ だから、

$$S_\omega(u(t_0)) = V(u(t_0)) + \frac{1}{2}K_\omega(u(t_0)) \geq d(\omega)$$

となるが、これは (1) と矛盾する．

故に、すべての $t \in [0, T^*)$ に対して $V(u(t)) > d(\omega)$ が成り立ち、 $\mathcal{R}_\omega^+$ が不変集合であることが示された． $\square$

補題 3 $1 < p < 1 + 4/N$ のとき、すべての $\omega > 0$ に対して $d''(\omega) > 0$ ．

特に、任意の $\omega_0 > 0$ に対して、

$$d(\omega_0) + (\omega - \omega_0)d'(\omega_0) < d(\omega), \quad \omega \in (0, \infty) \setminus \{\omega_0\}.$$

証明 $u^\omega(x) = \omega^{1/(p-1)}u(\sqrt{\omega}x)$, $\alpha = 1 + \frac{2}{p-1} - \frac{N}{2}$ とおくと、

$$K_\omega(u^\omega) = \omega^\alpha K_1(u), \quad S_\omega(u^\omega) = \omega^\alpha S_1(u).$$

これから, $u^\omega \in \mathcal{K}_\omega \iff u \in \mathcal{K}_1$ であり, $d(\omega) = \omega^\alpha d(1)$ となる.

さらに, $\alpha > 1$ だから, $d''(\omega) > 0$ となる. $\square$

命題 4 $1 < p < 1 + 4/N$, $\omega_0 > 0$ とする. このとき, 任意の $\varepsilon \in (0, \omega_0)$ に対して, $\delta > 0$ が存在し, $\|u_0 - \phi_{\omega_0}\|_{H^1} < \delta$ ならば, $u(0) = u_0$ なる (NLS) の解 $u(t)$ は

$$d(\omega_0 - \varepsilon) < V(u(t)) < d(\omega_0 + \varepsilon), \quad \forall t \in [0, T^*) \quad (1)$$

を満たす.

証明 $\varepsilon \in (0, \omega_0)$ を任意にとる.

まず, $d'(\omega) > 0$ だから, $d(\omega_0 - \varepsilon) < d(\omega_0) < d(\omega_0 + \varepsilon)$.

また, $d(\omega_0) = V(\phi_{\omega_0})$ だから, $\delta_1 > 0$ が存在し, $\|u_0 - \phi_{\omega_0}\|_{H^1} < \delta_1$ ならば

$$d(\omega_0 - \varepsilon) < V(u_0) < d(\omega_0 + \varepsilon). \quad (2)$$

さらに, $S_{\omega_0 \pm \varepsilon}(\phi_{\omega_0}) = S_{\omega_0}(\phi_{\omega_0}) \pm \varepsilon Q(\phi_{\omega_0}) = d(\omega_0) \pm \varepsilon d'(\omega_0)$ (複号同順) であり, 補題 3 より, $d(\omega_0) \pm \varepsilon d'(\omega_0) < d(\omega_0 \pm \varepsilon)$ だから, $S_{\omega_0 \pm \varepsilon}(\phi_{\omega_0}) < d(\omega_0 \pm \varepsilon)$.

よって, $\delta_2 > 0$ が存在し, $\|u_0 - \phi_{\omega_0}\|_{H^1} < \delta_2$ ならば

$$S_{\omega_0 \pm \varepsilon}(u_0) < d(\omega_0 \pm \varepsilon). \quad (3)$$

(2), (3) より, $\|u_0 - \phi_{\omega_0}\|_{H^1} < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ のとき, $u_0 \in \mathcal{R}_{\omega_0 - \varepsilon}^+ \cap \mathcal{R}_{\omega_0 + \varepsilon}^-$ となり, 補題 2 より, (1) が成り立つ. $\square$

定理 1 の証明 背理法で証明する. $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ が定理 1 の意味で安定でないと仮定すると, $\varepsilon_0 > 0$, (NLS) の解の列 $\{u_n(t)\}$, 時刻列 $\{t_n\}$ ($0 < t_n < T^*(u_n(0))$) が存在して

$$\|u_n(0) - \phi_\omega\|_{H^1} \rightarrow 0, \quad (1)$$

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{G}_\omega} \|u_n(t_n) - \varphi\|_{H^1} \geq \varepsilon_0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}). \quad (2)$$

ここで, $v_n := u_n(t_n)$ とおくと, エネルギー及び電荷の保存則と (1) より,

$$S_\omega(v_n) = S_\omega(u_n(t_n)) = S_\omega(u_n(0)) \rightarrow S_\omega(\phi_\omega) = d(\omega).$$

また, 命題 4 より, 適当な部分列 (以下, 部分列を同じ記号でかく) に対して, $V(v_n) \rightarrow d(\omega)$ だから, §2 定理 3 より, $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$, $\psi \in \mathcal{G}_\omega$ が存在して, 部分列をとることにより, $\tau_{y_n} v_n \rightarrow \psi$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$. このとき, $\tau_{y_n} \psi \in \mathcal{G}_\omega$ だから

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{G}_\omega} \|u_n(t_n) - \varphi\|_{H^1} \leq \|v_n - \tau_{y_n} \psi\|_{H^1} = \|\tau_{y_n} v_n - \psi\|_{H^1} \rightarrow 0$$

となるが, これは (2) と矛盾する. 故に, $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ は安定である. $\square$

4. 基底状態の不安定性

この節では、非線形 Schrödinger 方程式

$$(NLS) \quad i\partial_t u = -\Delta u - |u|^{p-1}u, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$$

の定在波解の不安定性について考える.

定理 1 $p = 1 + 4/N$, $\omega > 0$ とする. このとき, 任意の $\varphi \in \mathcal{A}_\omega$ に対して, (NLS) の定在波解 $e^{i\omega t}\varphi(x)$ は次の意味で不安定である: 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\|u_0 - \varphi\|_{H^1} < \varepsilon$ かつ $T^*(u_0) < \infty$ を満たす $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ が存在する.

証明 まず, $p = 1 + 4/N$ のとき, $P(v) = 2E(v)$ ($v \in H^1(\mathbb{R}^N)$) に注意する.

$\varphi \in \mathcal{A}_\omega$ に対して, $\varphi \in \Sigma$ かつ $E(\varphi) = 0$ だから, $\lambda > 1$ に対して, $\lambda\varphi \in \Sigma$, $E(\lambda\varphi) < 0$ である. よって, §1 定理 4 より, $T^*(\lambda\varphi) < \infty$ となる.

さらに, $\lambda \rightarrow 1$ のとき, $\|\lambda\varphi - \varphi\|_{H^1} \rightarrow 0$ だから, 定理 1 が示された. $\square$

定理 2 $1 + 4/N < p < 2^* - 1$, $\omega > 0$, $\phi_\omega \in \mathcal{G}_\omega$ とする. このとき, (NLS) の定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ は次の意味で不安定である: 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\|u_0 - \phi_\omega\|_{H^1} < \varepsilon$ かつ $T^*(u_0) < \infty$ を満たす $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ が存在する.

定理 2 は Berestycki and Cazenave [1] による (教科書 [5, 19] も参照のこと) が, 以下の証明は Zhang [21], Le Coz [13] のアイデアに基づく. また, (NLKG) に対して, 同様の結果が Shatah and Strauss [17] により証明されている. さらに, 関連する論文として [10, 9, 15] をあげておく.

以下, $1 + 4/N < p < 2^* - 1$ とする.

$v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\lambda > 0$ に対して, $v^\lambda(x) := \lambda^{N/2}v(\lambda x)$ と定める. このとき,

$$\begin{aligned} S_\omega(v^\lambda) &= \frac{\lambda^2}{2}\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{\omega}{2}\|v\|_{L^2}^2 - \frac{\lambda^\alpha}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}, \\ K_\omega(v^\lambda) &= \lambda^2\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \omega\|v\|_{L^2}^2 - \lambda^\alpha\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}, \\ P(v^\lambda) &= \lambda^2\|\nabla v\|_{L^2}^2 - \frac{\alpha\lambda^\alpha}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} = \lambda\partial_\lambda S_\omega(v^\lambda). \end{aligned}$$

ここで, $\alpha := \frac{N}{2}(p-1)$ とおいた. $p > 1 + 4/N$ のとき, $\alpha > 2$ に注意する.

補題 3 $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $v \neq 0$, $P(v) \leq 0$ ならば,

$$d(\omega) \leq S_\omega(v) - \frac{1}{2}P(v).$$

証明 $v \neq 0$ だから, $\lambda \mapsto K_\omega(v^\lambda)$ のグラフより, $K_\omega(v^{\lambda_0}) = 0$ を満たす $\lambda_0 \in (0, \infty)$ が存在する. このとき, $v^{\lambda_0} \in \mathcal{K}_\omega$ だから, $d(\omega) \leq S_\omega(v^{\lambda_0})$.

また, 関数

$$(0, \infty) \ni \lambda \mapsto S_\omega(v^\lambda) - \frac{\lambda^2}{2}P(v) = \frac{\alpha\lambda^2 - 2\lambda^\alpha}{2(p+1)}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} + \frac{\omega}{2}\|v\|_{L^2}^2$$

は $\lambda = 1$ で最大値をとるから,

$$d(\omega) \leq S_\omega(v^{\lambda_0}) \leq S_\omega(v^{\lambda_0}) - \frac{\lambda_0^2}{2}P(v) \leq S_\omega(v) - \frac{1}{2}P(v)$$

が成り立つ. □

定義 $\mathcal{B}_\omega := \{v \in H^1(\mathbb{R}^N) : S_\omega(v) < d(\omega), P(v) < 0\}$ と定める.

補題 4 $\mathcal{B}_\omega$ は (NLS) の流れに関して不変である. すなわち, $u_0 \in \mathcal{B}_\omega$ とし, $u(t)$ を $u(0) = u_0$ なる (NLS) の解とすると, すべての $t \in [0, T^*)$ に対して $u(t) \in \mathcal{B}_\omega$.

証明 まず, エネルギー及び電荷の保存則より, $t \in [0, T^*)$ に対して,

$$S_\omega(u(t)) = S_\omega(u_0) < d(\omega).$$

次に, 補題 3 より, $t \in [0, T^*)$ に対して, $P(u(t)) \neq 0$ である. さらに, $P(u_0) < 0$ であり, $t \mapsto P(u(t))$ は連続だから, $t \in [0, T^*)$ に対して $P(u(t)) < 0$. □

命題 5 $u_0 \in \Sigma \cap \mathcal{B}_\omega$ ならば, $T^*(u_0) < \infty$.

証明 $u(t)$ を $u(0) = u_0$ なる (NLS) の解とすると, §1 命題 3 (virial identity) と補題 3, 補題 4 より, $t \in [0, T^*)$ に対して

$$\frac{d^2}{dt^2}\|xu(t)\|_{L^2}^2 = 8P(u(t)) \leq 16\{S_\omega(u_0) - d(\omega)\} < 0$$

が成り立つ. これから, $T^* < \infty$ が従う. □

定理 2 の証明 $\lambda > 1$ に対して, $\lambda\phi_\omega \in \Sigma \cap \mathcal{B}_\omega$ だから, 命題 5 より, $T^*(\lambda\phi_\omega) < \infty$. また, $\lambda \rightarrow 1$ のとき, $\|\lambda\phi_\omega - \phi_\omega\|_{H^1} \rightarrow 0$ だから, 定理 2 が証明された. □

参考文献

- [1] H. Berestycki and T. Cazenave, Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **293** (1981) 489–492.
- [2] H. Berestycki and P.-L. Lions, Nonlinear scalar field equations I, II, *Arch. Rational Mech. Anal.* **82** (1983) 313–375.
- [3] H. Brezis and E.H. Lieb, A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, *Proc. Amer. Math. Soc.* **88** (1983) 486–490.
- [4] H. Brezis and E.H. Lieb, Minimum action solutions of some vector field equations, *Comm. Math. Phys.* **96** (1984) 97–113.
- [5] T. Cazenave, Semilinear Schrödinger equations, *Courant Lecture Notes in Mathematics* 10, Amer. Math. Soc., 2003.
- [6] T. Cazenave and P.-L. Lions, Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations, *Comm. Math. Phys.* **85** (1982) 549–561.
- [7] B. Gidas, W.M. Ni and L. Nirenberg, Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$, *Advances in Math. Suppl. Stud.*, **7A**, (1981), 369–402.
- [8] J. Ginibre and G. Velo, On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case, *J. Funct. Anal.* **32** (1979) 1–32.
- [9] J.M. Gonçalves Ribeiro, Instability symmetric stationary states for some nonlinear Schrödinger equations with an external magnetic field, *Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor.* **54** (1991) 403–433.
- [10] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I, *J. Funct. Anal.* **74** (1987) 160–197.
- [11] T. Kato, On nonlinear Schrödinger equations, *Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor.* **46** (1987) 113–129.

- [12] M.K. Kwong, Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in $\mathbb{R}^n$, Arch. Rational Mech. Anal. **105** (1989) 234–266.
- [13] S. Le Coz, *A note on Berestycki-Cazenave’s classical instability result for nonlinear Schrödinger equations*, Adv. Nonlinear Stud. **8** (2008), 455–463.
- [14] E.H. Lieb, On the lowest eigenvalue of the Laplacian for the intersection of two domains, Invent. Math. **74** (1983) 441–448.
- [15] M. Ohta, Instability of standing waves for the generalized Davey-Stewartson system, Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor. **62** (1995) 69–80.
- [16] J. Shatah, Stable standing waves of nonlinear Klein-Gordon equations, Comm. Math. Phys. **91** (1983) 313–327.
- [17] J. Shatah and W. Strauss, Instability of nonlinear bound states, Comm. Math. Phys. **100** (1985) 173–190.
- [18] W. Strauss, Existence of solitary waves in higher dimensions, Comm. Math. Phys. **55** (1977) 149–162.
- [19] 堤 誉志雄, 偏微分方程式論, 培風館, 2004.
- [20] M.I. Weinstein, Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986) 51–67.
- [21] J. Zhang, *Cross-constrained variational problem and nonlinear Schrödinger equation*, in “Foundations of computational mathematics” (Hong Kong, 2000), 457–469, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002.