

2019年度 物理学I 宿題 (第8回)

著作権上の問題が発生するため学生が個人的に利用することだけ認めます。くれぐれも2次配布しないでください。

学 科		学 年	年	番 号		氏 名	
--------	--	--------	---	--------	--	--------	--

1. オイラーの公式について，以下の空欄にあてはまる適切な記号または言葉を解答せよ。ただし，(c),(d),(e) は3次の項 ($n=3$) まで解答すること。

何回でも微分可能な関数 $f(x)$ が，適当な係数 $a_0, a_1, a_2, \dots$ を用いて，べき級数展開して $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ と表せるとする。この式に $x=0$ を代入すると $f(0) = a_0$ を得る。続いて，両辺を x を1回微分したものに $x=0$ を代入すると $f'(0) = a_1$ を得る。以降同様に考えると，関数 $f^{(n)}$ ($n=0, 1, 2, \dots$) を用いると係数 $a_0, a_1, a_2, \dots$ を求められ，

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

を得る。この級数展開した右边を，関数 $f(x)$ の (a) 展開と呼ぶ。一方，

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

と級数展開したものを $f(x)$ の (b) 展開と呼ぶ。この2式から，(b) 展開のうち，特に， a を0としたものが (a) 展開ということになる。この (a) 展開を用いると， e^x , $\sin x$, $\cos x$ は，(c)，(d)，(e) と表せる。

ここで， e^x の (a) 展開の x について， $x \rightarrow ix$ と書き換えると， n が偶数項の展開式は， $\cos x$ の展開式に一致し，奇数項は $\sin x$ の展開式に虚数 i を掛けた式と一致する。よって， $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ が成り立つと分かる。

(a)		(b)		(c)	
(d)		(e)			

2. 次の計算結果を答えよ。ただし， θ , t , A, B は任意の定数とする。

(a) 次の式 $f(\theta) = A\sin\theta + B\cos\theta$ で表せる三角関数がある。これを合成すると $f(\theta) = \text{A}\sin(\theta + \theta_0)$ となった。 θ_0 を任意の定数として，A にあてはまる数式を A, B を用いて表せ。

(b) 前問 (a) において， $\theta=0$ の時， $f(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，また， $f(\theta)$ を θ で1回微分したものである $f'(\theta)$ について， $f'(0) = \frac{1}{2}$ であったとする。この場合，任意の定数 θ_0 , A, B が，それぞれいくらになるか答えよ。

(a)		(b)	θ_0	(b)	A	(b)	B
-----	--	-----	------------	-----	-----	-----	-----

- (c) 次の式 $f(t) = \sin\omega t - \cos\omega t$ で表せる三角関数を合成せよ。
- (d) 問 (c) の関数の周期と振幅をそれぞれを答えよ。

(c)		(d)	振幅	(d)	周期

4. バネ定数 k のバネの先端に、質量 m の物体がついている。この物体がバネによって単振動していて、その単振動をしている物体の位置が、任意の時間 t の時 $x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t.....(1)$ にあったとする。ただし、 A, B は定数とする。また、 ω は角振動数という。以下の問に答えよ。

- (a) 角振動数 ω を、バネ定数 k 、物体の質量 m を用いて表せ。この問以降では、角振動数 ω の代わりに、バネ定数 k 、物体の質量 m を使うこと。

(答)	

- (b) この単振動の周期 T を答えよ。

(答)	

- (c) 物体の速度 $v(t)$ 、加速度 $a(t)$ をそれぞれ答えよ。

$v(t)$		$a(t)$	

- (d) 初期条件として $t = 0$ の時、物体の位置 $x(0) = -1$ 、速度 $v(0) = \pi$ 、加速度 $a(0) = \pi^2$ だと分かっていたとする。この場合、定数 A, B 、角振動数 ω を求めよ。さらに、三角関数の合成を用いて、式 (1) を合成せよ。

(A)		(B)		(ω)		(式)	