多重ガンマ関数の単項関係式とその応用

東京理科大学 理工学部 加塩朋和
(2010 年 2 月 1 日～3 月 31 日 坂内研究室 所属)
E-mail： kashio_tomokazu@ma.noda.tus.ac.jp

2017 年 3 月 13 日 (月) ～ 3 月 16 日 (木)
坂内研究室 プロジェクト研究集会
会場：山岸園 (伊豆・伊東温泉)

文献

[K1] K., Fermat curves and a refinement of the reciprocity law on cyclotomic units, to appear in *J. Reine Angew. Math.*

[K2] K., On the algebraicity of some products of special values of Barnes' multiple gamma function, to appear in *Amer. J. Math.*

[Y] H. Yoshida, *Absolute CM-Periods*, Math. Surveys Monogr. **106**, Amer. Math. Soc., 2003.

ガンマ関数

定義 (Euler's Γ-function)

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt \ (\mathrm{Re}(s) > 0 \ \rightsquigarrow \ \text{解析接続}).$$

命題 (Bohr-Mollerup の特徴付け)

- $\Gamma(1) = 1,\ s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$. 特に $\Gamma(n) = (n-1)!\ (n \in \mathbb{N})$.
- $\log \Gamma(s)$ は凸関数.

命題 (Lerch's formula)

Hurwitz zeta function: $\zeta(s,x) := \sum_{m=0}^{\infty} (x+m)^{-s}\ (\mathrm{Re}(s) > 1,\ x > 0)$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x)\Big|_{s=0}.$$

ガンマ関数

定理 (Euler's reflection formula)

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

系

$$\exp(\zeta'(0, \tfrac{a}{n}))\exp(\zeta'(0, \tfrac{n-a}{n})) \overset{\text{Lerch}}{=} \frac{\Gamma(\frac{a}{n})}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n-a}{n})}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{1}{2\sin(\frac{\pi a}{n})} = \frac{i}{\zeta_{2n}^{a} - \zeta_{2n}^{-a}} \fallingdotseq \text{(2 乗すれば) 円単数.}$$

$\Rightarrow$ 基礎体が $\mathbb{Q}$ の場合の Stark Conjecture.

ガンマ関数

積 $\exp(\zeta'(0, \frac{a}{n}))\exp(\zeta'(0, \frac{n-a}{n})) \in \overline{\mathbb{Q}}$

各 $\exp(\zeta'(0, \frac{a}{n})) = \frac{\Gamma(\frac{a}{n})}{\sqrt{2\pi}}$ の超越数部分は？
$\rightsquigarrow$ Chowla-Selberg formula $\rightsquigarrow$ 円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ の CM 周期.

ガンマ関数

定理 (Chowla-Selberg formula)

虚 2 次体 K に対し $p_K \in \mathbb{C}^\times/\overline{\mathbb{Q}}^\times$ を, 以下の同値な定義で定める.

- $\mathcal{O}_K \curvearrowright E : y^2 = x^3 + ax + b$ $(a, b \in \overline{\mathbb{Q}})$

$$p_K \equiv \pi^{-1} \int_\gamma \frac{dx}{y} \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times \qquad \left(\overset{L(E,1)\neq 0}{\equiv} \pi^{-1} L(E,1) \right).$$

(c.f. 伊東さんの話, 太田さんの話)

- $K = \mathbb{Q}(\tau)$ $(\mathrm{Im}(\tau) > 0)$, $\eta(\tau) := e^{\frac{2\pi i \tau}{24}} \prod_{n=1}^\infty (1 - e^{2n\pi i \tau})$

$$p_K \equiv \eta(\tau)^2 \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times.$$

(c.f. 山下さんの話？)

このとき $p_K \equiv \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\prod_{a=1}^{d-1} \Gamma\left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{w\chi(a)}{4h}} \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times.$

今日の話題

- 超越数部分は一旦おいておく.
- 代数性 $\exp(\zeta'(0,\frac{a}{n}))\exp(\zeta'(0,\frac{n-a}{n})) = \frac{\Gamma(\frac{a}{n})}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n-a}{n})}{\sqrt{2\pi}} \in \overline{\mathbb{Q}}$ の "多重化":

  Euler's Γ-function ⇒ Barnes' multiple Γ-function.

  有理数体 $\mathbb{Q}$ ⇒ 総実体 F 上の整数論.
- (時間が許せば) 証明方法 $\cdots$ 新谷の手法の拡張.
- 超越数部分に関する吉田予想の紹介.
- 代数性の p 進類似.
- Archimedean case + p-adic case ⇒ ???

多重ガンマ関数

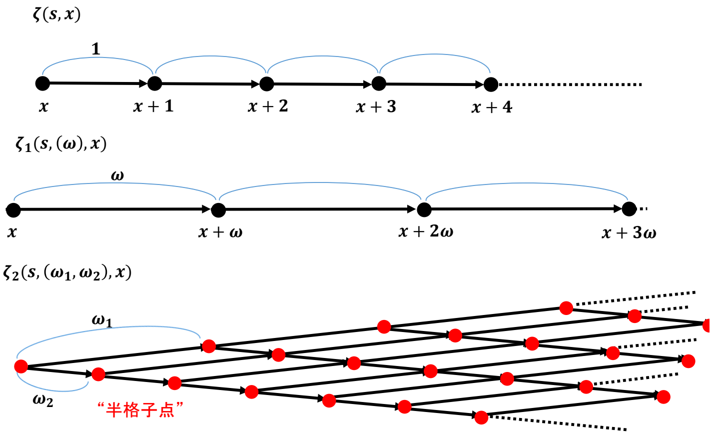
定義

Barnes' multiple zeta function: $r \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_r) \in \mathbb{R}_+^r$, $x \in \mathbb{R}_+$

$$\zeta_r(s, \boldsymbol{\omega}, x) := \sum_{\mathbf{m}=(m_1,\ldots,m_r)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^r} (x + \mathbf{m}\,{}^t\boldsymbol{\omega})^{-s} \quad (\mathrm{Re}(s) > r).$$

多重ガンマ関数

$$\zeta_r(s,\boldsymbol{\omega},x) := \sum_{\mathbf{m}=(m_1,\dots,m_r)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^r} (x+\mathbf{m}\,{}^t\boldsymbol{\omega})^{-s}.$$



多重ガンマ関数

定義

Barnes' multiple zeta function: $r \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_r) \in \mathbb{R}_+^r$, $x \in \mathbb{R}_+$

$$\zeta_r(s, \boldsymbol{\omega}, x) := \sum_{\mathbf{m}=(m_1,\ldots,m_r)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^r} (x + \mathbf{m}\,{}^t\boldsymbol{\omega})^{-s} \quad (\mathrm{Re}(s) > r).$$

(modified) Barnes' multiple gamma function:

$$\Gamma_r(x, \boldsymbol{\omega}) := \exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta_r(s, \boldsymbol{\omega}, x)|_{s=0}\right).$$

c.f., Lerch's formula: $\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}} = \exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta_1(s, (1), x)|_{s=0}\right)$.

総実体の部分ゼータ関数

定義

$[F:\mathbb{Q}] < \infty$.

- $\mathcal{O}_F$: 整数環, $E_F := \mathcal{O}_F^{\times}$: 単数群.
- $S_{\mathbb{R}} := \mathrm{Hom}(F, \mathbb{R})$: 実素点の集合, $r_1 := |S_{\mathbb{R}}|$.
- F が総実体 $\Leftrightarrow [F:\mathbb{Q}] = r_1$.
- $F_+ := \{\alpha \in F \mid \forall \iota \in S_{\mathbb{R}},\ \iota(\alpha) > 0\}$.
- $\alpha \in F$ が総正 $\Leftrightarrow \alpha \in F_+ \Leftrightarrow \alpha >> 0$.
- $\mathcal{O}_{F,+} := \mathcal{O}_F \cap F_+$, $E_{F,+} := E_F \cap F_+$: 総正単数群.

総実体の部分ゼータ関数

定理 (Dirichlet's unit theorem の系)

F が総実代数体であれば

$$E_{F,+} \cong \mathbb{Z}^{[F:\mathbb{Q}]-1}.$$

例

$F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ のとき

- $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})} = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $r_1 = 2$.
- $E_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})} = \{\pm(1+\sqrt{2})^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.
- $E_{\mathbb{Q}(\sqrt{2}),+} = \{(3+2\sqrt{2})^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

総実体の部分ゼータ関数

定義

$[F:\mathbb{Q}]<\infty$.

- I_F: 分数イデアル全体.
- 整イデアル $\mathfrak{f}\subset\mathcal{O}_F$ に対し

$$
\begin{aligned}
I_{\mathfrak{f}} &:= \{\mathfrak{a}\in I_F \mid (\mathfrak{a},\mathfrak{f})=1\},\\
P_{\mathfrak{f}} &:= \{(\alpha)\in I_F \mid \alpha\in F^{\times},\ \alpha\equiv 1 \bmod^{*} \mathfrak{f},\ \alpha>>0\},\\
C_{\mathfrak{f}} &:= I_{\mathfrak{f}}/P_{\mathfrak{f}}:\ \mathfrak{f}\ \text{を法とする}\ \underline{\text{狭義}}\ \text{イデアル類群}
\end{aligned}
$$

- $\mathfrak{a}\in I_{\mathfrak{f}}$ の属するイデアル類を $[\mathfrak{a}]\in C_{\mathfrak{f}}$ で表す.

総実体の部分ゼータ関数

定義

部分ゼータ関数:

$$\zeta(s, c) = \sum_{\mathcal{O}_F \supset \mathfrak{a} \in c} N\mathfrak{a}^{-s} \quad (\mathrm{Re}(s) > 1,\ c \in C_{\mathfrak{f}})$$

注意

- $F = \mathbb{Q}$ のとき
  - $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \overset{\cong}{\to} C_{(n)}$, $a \bmod n \mapsto [(a)] \quad (a > 0)$.
  - $\zeta(s, [(a)]) = (a)^{-s} + (a+n)^{-s} + (a+2n)^{-s} + \cdots = n^{-s}\zeta(s, \frac{a}{n})$ $(0 < a < n)$.
- $L(s, \chi) = \sum_{c \in C_{\mathfrak{f}}} \chi(c)\zeta(s, c)$ $(\chi \in \hat{C}_{\mathfrak{f}})$: Hecke L-function,

$\overset{\text{指標の直交性}}{\Longrightarrow}$ $\zeta(s, c) = \frac{1}{|C_{\mathfrak{f}}|} \sum_{\chi \in \hat{C}_{\mathfrak{f}}} \chi(c^{-1}) L(s, \chi)$.

主結果

以下 F は <u>総実体</u> とする.

定理 (新谷公式 + 吉田の類不変量)

あるデータ (新谷の基本領域, イデアル類の代表元) を固定するごとに
$\exists z_k, \alpha_l, \beta_l \in F_+$, $\mathbf{v}_k \in F_+^{r_k}$ s.t.

$$\begin{aligned}\zeta'(0,c) &= \sum_{\iota\in S_{\mathbb{R}}}\left(\sum_{k=1}^{K}\log(\Gamma_{r_k}(\iota(z_k),\iota(\mathbf{v}_k))) + \sum_{l=1}^{L}\iota(\alpha_l)\log(\iota(\beta_l))\right)\\ &=: \sum_{\iota\in S_{\mathbb{R}}} X(c,\iota).\end{aligned}$$

さらに $\exp(X(c,\iota)) \bmod \iota(E_{F,+})^{\mathbb{Q}}$ はデータの選び方によらない.

主結果

主結果 $\cdots$ ある $\underline{\text{ペア } c, c'}$ に対し積 $\exp(X(c,\iota))\exp(X(c',\iota))$ は "単数".

定義

$\iota \in S_{\mathbb{R}} = \mathrm{Hom}(F, \mathbb{R})$ に対し

- $\nu_\iota \in \mathcal{O}_F$ s.t. $\nu_\iota \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}$, $\iota(\nu_\iota) < 0$, $\iota'(\nu_\iota) > 0$ $(\iota \neq \iota' \in S_{\mathbb{R}})$.
- $s_\iota = [(\nu_\iota)] \in C_{\mathfrak{f}}$.

命題

$s_\iota \overset{\text{CFT}}{\leftrightarrow}$ "実素点 ι 上の複素共役写像".

すなわち $F \overset{\text{fin, ab}}{\subset} K$, $\tilde{\iota}\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{\iota}|_F = \iota$ のとき

$$\begin{array}{ccccc} C_{\mathfrak{f}_{K/F}} & \overset{\mathrm{Art}}{\to} & \mathrm{Gal}(K/F) & \overset{\tilde{\iota}^*}{\to} & \mathrm{Aut}(\mathbb{C}), \\ s_\iota & & \mapsto & & \text{複素共役写像}. \end{array}$$

主結果

定理 (新谷公式 + 吉田の類不変量)

$$\zeta'(0,c) = \sum_{\iota \in S_{\mathbb{R}}} X(c,\iota).$$

定理 (吉田 [Y] ($[F:\mathbb{Q}]=2$), [K2], ($[F:\mathbb{Q}]>2$))

$$\iota \neq \iota' \Rightarrow \exp(X(c,\iota))\exp(X(cs_{\iota'},\iota)) \in \iota(E_{F,+})^{\mathbb{Q}}.$$

予想 (rank 1 abelian Stark conjecture, w.r.t. real place)

自明な例外を除いて

$$\exp(\zeta'(0,c))\exp(\zeta'(0,cs_{\iota'})) = \prod_{\iota \in S_{\mathbb{R}}} \exp(X(c,\iota))\exp(X(cs_{\iota'},\iota)) \in \tilde{\iota}'(E_{K_{\mathfrak{f}},+})^{\frac{1}{2}}.$$

Stark 単数と呼ぶ．“相互法則”, “abelian condition” も予想される．

証明のアイデア

- 半格子点の和集合 $R \subset F$ に対し $Z_\iota(s,R) := \sum_{z\in R} \iota(z)^{-s}$ とおく.
- 吉田の類不変量の定義 $\Rightarrow X(c,\iota) \fallingdotseq Z_\iota'(0,R_c)$ $(\exists R_c \subset F_+)$.
- Key fact: $R_c \coprod R_{cs_{\iota'}} \fallingdotseq R - uR$ $(\exists R = R_{c,cs_{\iota'}} \subset F,\ \exists u \in E_{F,+})$.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow X(c,\iota) + X(cs_{\iota'},\iota) &\fallingdotseq Z_\iota'(0, R_c \coprod R_{cs_{\iota'}}) \\
&= Z_\iota'(0,R) - Z_\iota'(0,uR) \\
&= \frac{d}{ds} Z_\iota(s,R)|_{s=0} - \frac{d}{ds}\iota(u)^{-s} Z_\iota(s,R)|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds}\left((1-\iota(u)^{-s})Z_\iota(s,R)\right)|_{s=0} \\
&= Z_\iota(0,R)\log(\iota(u)).
\end{aligned}
$$

新谷の手法

より詳しく説明するには

$X(c,\iota) \fallingdotseq Z'_\iota(0,R_c)$ となる $R_c \subset F_+ \Leftarrow$ 吉田の類不変量の定義

$$\Uparrow$$

新谷氏による部分ゼータ関数 $\zeta(s,c) = \displaystyle\sum_{\mathcal{O}_F \supset \mathfrak{a} \in c} N\mathfrak{a}^{-s}$ の記述

まで戻る必要がある.

- $c \in C_{\mathfrak{f}}$.
- fix $\mathfrak{a}_c$ s.t. $[\mathfrak{a}_c] = \pi(c) \in C_{(1)}$ $(\pi\colon C_{\mathfrak{f}} \to C_{(1)})$.
- $\mathfrak{a} \in c \Rightarrow [\mathfrak{a}] = [\mathfrak{a}_c] \in C_{(1)} \Rightarrow \exists z \in F_+$ s.t. $z\mathfrak{a}_c = \mathfrak{a}$.

  $\Rightarrow \{\mathcal{O}_F \supset \mathfrak{a} \in c\} = \mathfrak{a}_c \cdot \{z \in \mathfrak{a}_c^{-1} \cap F_+, \mid z\mathfrak{a}_c \in c\} \curvearrowleft E_{F,+}$

  $= \mathfrak{a}_c \cdot \{z \in \mathfrak{a}_c^{-1} \cap D \mid z\mathfrak{a}_c \in c\}$.

  D: 新谷の基本領域 $\fallingdotseq F_+/E_{F,+}$ (実際は $F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}_+/E_{F,+}$).

新谷の手法

定義

- 一次独立なベクトル $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$C(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r) := \{t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_r\mathbf{v}_r \mid t_i \in \mathbb{R}_+\} \subset \mathbb{R}^n$$

  を $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ を基底とする cone と呼ぶ.
- n 次の総実体 F に対し $S_{\mathbb{R}} = \{\iota_1, \ldots, \iota_n\}$ の順番を固定して

$$F \otimes \mathbb{R} \overset{\cong}{\to} \mathbb{R}^n, \quad \alpha \otimes r \mapsto (\iota_1(\alpha)r, \ldots, \iota_n(\alpha)r)$$

  と同一視する. $\mathbb{R}^n$ の cone で, 基底が全て $\mathcal{O}_F$ $(\subset F \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}^n)$ に含まれるものを F の cone と呼ぶ.
- 同一視 $F \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ において $\mathbb{R}_+^n$ に対応する部分を $F \otimes \mathbb{R}_+$ で表す.

新谷の手法

定理 (新谷)

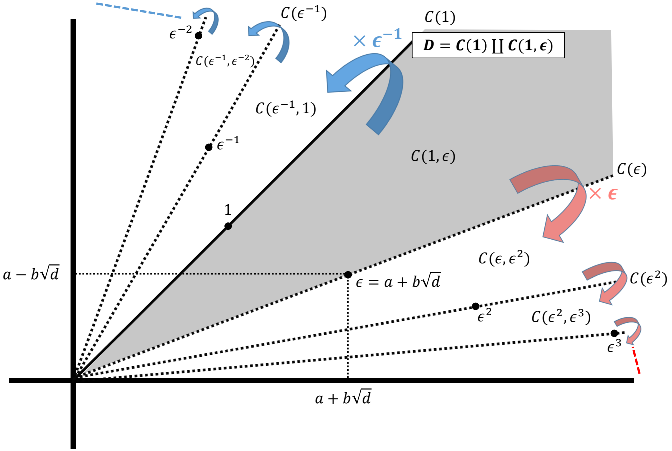
総実体 F に対し, 商 $F \otimes \mathbb{R}_+ / E_{F,+}$ の基本領域 D として, 有限個の F の cone の非交和として書けるものが取れる. すなわち

$$\exists v_{ij} \in \mathcal{O}_{F,+} \ (j \in J, 1 \le i \le r(j), |J| < \infty, r(j) \in \mathbb{N})$$
$$\text{s.t. } F \otimes \mathbb{R}_+ = \coprod_{u \in E_{F,+}} uD, \quad D = \coprod_{j \in J} C(v_{j1}, \ldots, v_{jr(j)}).$$

このような D を <u>新谷の基本領域</u> と呼ぶことにする.

新谷の手法

例えば $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ のとき $\exists\epsilon = a + b\sqrt{d}$ s.t. $E_{F,+} = \langle \epsilon \rangle$.
$\Rightarrow D = C(1) \coprod C(1,\epsilon)$, $F \otimes \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+^2 = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} \epsilon^n D$.



新谷の手法

新谷の基本領域 $D = \coprod_{j\in J} C(\mathbf{v}_j)$ に対し

$$\zeta(s,c) = N(\mathfrak{a}_c)^{-s} \sum_{j\in J} \sum_{z\in\mathfrak{a}_c^{-1}\cap C(\mathbf{v}_j),\ z\mathfrak{a}_c\in c} Nz^{-s}.$$

命題

$\mathfrak{f} \mid \mathfrak{a}_c$ と仮定し $R(c,\mathbf{v}_j) := \{\mathbf{x} \in (0,1]^{r(j)} \mid \mathbf{x}\,{}^t\mathbf{v}_j \in \mathfrak{a}_c^{-1},\ (\mathbf{x}\,{}^t\mathbf{v}_j)\mathfrak{a}_c \in c\}$ とおくと

- $|R(c,\mathbf{v}_j)| < \infty.$
- $\{z \in \mathfrak{a}_c^{-1} \cap C(\mathbf{v}_j) \mid z\mathfrak{a}_c \in c\} = \coprod_{\mathbf{x}\in R(c,\mathbf{v}_j)} \{(\mathbf{x}+\mathbf{m})\,{}^t\mathbf{v}_j \mid \mathbf{m} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{r(j)}\}.$

$$\Rightarrow \zeta(s,c) = N(\mathfrak{a}_c)^{-s} \sum_{j\in J} \sum_{\mathbf{x}\in R(c,\mathbf{v}_j)} \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r(j)}} \left(\prod_{\iota\in S_{\mathbb{R}}} \iota((\mathbf{x}+\mathbf{m})\,{}^t\mathbf{v}_j) \right)^{-s}.$$

新谷の手法

$$\zeta(s,c) = N(\mathfrak{a}_c)^{-s} \sum_{j\in J} \sum_{\mathbf{x}\in R(c,\mathbf{v}_j)} \underbrace{\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r(j)}} \left(\prod_{\iota\in S_{\mathbb{R}}} \iota((\mathbf{x}+\mathbf{m})\,{}^t\mathbf{v}_j) \right)^{-s}}_{\text{半格子点上の和}}.$$

c.f. $$\zeta_{r(j)}(s, \iota(\mathbf{v}_j), \iota(\mathbf{x}\,{}^t\mathbf{v}_j)) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r(j)}} \iota((\mathbf{x}+\mathbf{m})\,{}^t\mathbf{v}_j)^{-s},$$

$$\frac{d}{ds}(\prod_{i=1}^{n} a_i)^{-s}|_{s=0} = -\log(\prod_{i=1}^{n} a_i) = -\sum_{i=1}^{n} \log(a_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{ds} a_i^{-s}|_{s=0}.$$

定理 (新谷)

$$\zeta'(0,c) = \sum_{\iota\in S_{\mathbb{R}}} \sum_{j\in J} \sum_{\mathbf{x}\in R(c,\mathbf{v}_j)} \log(\Gamma_{r(j)}(\iota(\mathbf{x}\,{}^t\mathbf{v}_j), \iota(\mathbf{v}_j))) + \text{“補正項”}.$$

吉田の類不変量

定理 (新谷)

$$\zeta'(0,c) = \sum_{\iota \in S_{\mathbb{R}}} \sum_{j \in J} \sum_{\mathbf{x} \in R(c,\mathbf{v}_j)} \log(\Gamma_{r(j)}(\iota(\mathbf{x}\,{}^t\mathbf{v}_j), \iota(\mathbf{v}_j))) + \text{“補正項”}.$$

定理 (吉田 [Y])

$$X(c,\iota) := \sum_{j \in J} \sum_{\mathbf{x} \in R(c,\mathbf{v}_j)} \log(\Gamma_{r(j)}(\iota(\mathbf{x}\,{}^t\mathbf{v}_j), \iota(\mathbf{v}_j))) + \text{“補正項の上手い分割”}$$

$\Rightarrow \exp(X(c,\iota)) \bmod \iota(E_{F,+})^{\mathbb{Q}}$ は, 新谷の基本領域 D, イデアル類の代表元 $\mathfrak{a}_c$ の取り方によらない.

吉田の類不変量

$$\zeta(s,c) = N(\mathfrak{a}_c)^{-s} \sum_{z \in \mathfrak{a}_c^{-1} \cap D,\ z\mathfrak{a}_c \in c} Nz^{-s}$$

$$= N(\mathfrak{a}_c)^{-s} \sum_{j \in J} \sum_{\mathbf{x} \in R(c,\mathbf{v}_j)} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{r(j)}} \left(\prod_{\iota \in S_{\mathbb{R}}} \iota((\mathbf{x}+\mathbf{m})\,{}^t\mathbf{v}_j) \right)^{-s}.$$

の逆をたどれば

$$X(c,\iota) := \sum_{j \in J} \sum_{\mathbf{x} \in R(c,\mathbf{v}_j)} \log(\Gamma_{r(j)}(\iota(\mathbf{x}\,{}^t\mathbf{v}_j), \iota(\mathbf{v}_j))) + \text{“補正項”}$$

$$= Z_\iota'(0, R_c) + \text{“補正項”},$$

$$Z_\iota(s,R) := \sum_{z \in R} \iota(z)^{-s}, \qquad R_c := \left\{ z \in \mathfrak{a}_c^{-1} \cap D \mid z\mathfrak{a}_c \in c \right\}.$$

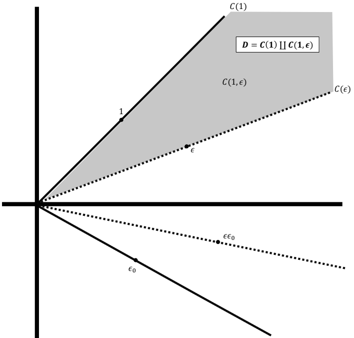
$[F:\mathbb{Q}]=2$ の場合の証明

この場合は吉田氏 [Y] による．簡単のため以下を仮定する．

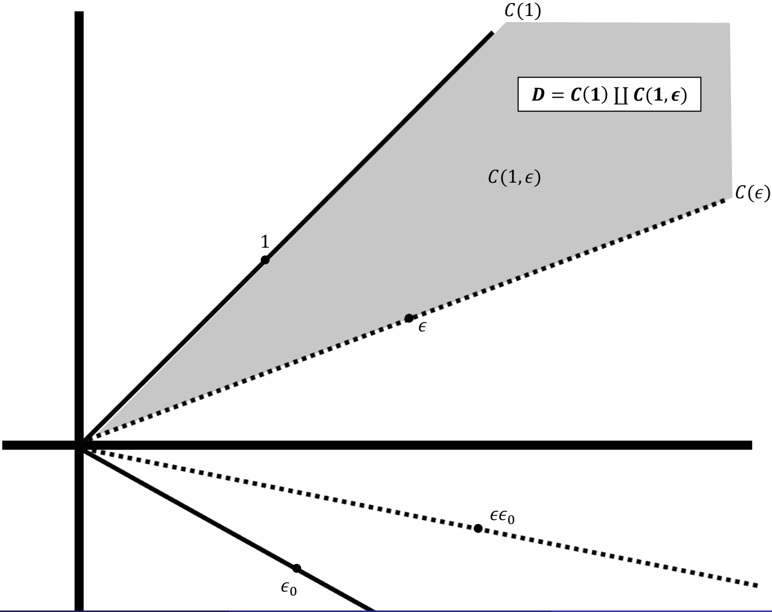
- $S_{\mathbb{R}}=\{\iota_1,\iota_2\}$, $\iota_1(z)=\mathrm{id}(z)=z$, $\iota_2(z)=: z'$.
- $\exists\epsilon_0\in E_F$ s.t. $\epsilon_0^2=\epsilon$, $\epsilon_0>0$, $\epsilon_0'<0$.
- $C_{\mathfrak{f}}\ni s_2\neq[(1)]$.

証明のポイントは以下の領域を考えることである:

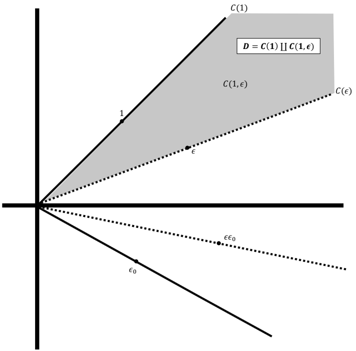
$$\mathfrak{D}:=C(1)\coprod C(1,\epsilon_0)\coprod C(\epsilon_0).$$



$[F : \mathbb{Q}] = 2$ の場合の証明



$[F:\mathbb{Q}] = 2$ の場合の証明



$$\mathfrak{D} := C(1) \coprod C(1,\epsilon_0) \coprod C(\epsilon_0).$$

Key fact: $D \coprod \epsilon_0 D = \mathfrak{D} - \epsilon \mathfrak{D}$.

$$R_c := \left\{ z \in \mathfrak{a}_c^{-1} \cap D \mid z\mathfrak{a}_c \in c \right\}.$$

$$R_{cs_{\iota_2}} = \left\{ z \in \mathfrak{a}_{cs_{\iota_2}}^{-1} \cap D \mid z\mathfrak{a}_{cs_{\iota_2}} \in cs_{\iota_2} \right\}.$$

$$\mathfrak{a}_c = \mathfrak{a}_{cs_{\iota_2}} \quad (\because \ cs_{\iota_2} = c[(\nu_2)] = c[(\nu_2\epsilon_0)]).$$

$$\Rightarrow R_c \coprod R_{cs_{\iota_2}}$$

$$= \{ z \in \mathfrak{a}_c^{-1} \cap D \mid z\mathfrak{a}_c \in c \cup cs_{\iota_2} \}.$$

$$R := \left\{ z \in \mathfrak{a}_c^{-1} \cap \mathfrak{D} \mid z\mathfrak{a}_c \in c \cup cs_{\iota_2} \right\}.$$

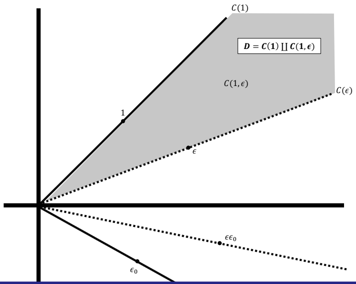
$$\Rightarrow (R_c \coprod R_{cs_{\iota_2}}) \coprod \epsilon_0 (R_c \coprod R_{cs_{\iota_2}}) = R - \epsilon R.$$

$$\Rightarrow (1 + \epsilon_0^{-s})(Z_{\iota_1}(s, R_c) + Z_{\iota_1}(s, R_{cs_{\iota_2}})) = (1 - \epsilon^{-s}) Z_{\iota_1}(s, R).$$

$$\Rightarrow 2(X(c,\iota_1) + X(cs_{\iota_2},\iota_1)) - (Z_{\iota_1}(0, R_c) + Z_{\iota_1}(0, R_{cs_{\iota_2}})) \log \epsilon_0$$

$$\fallingdotseq Z_{\iota_1}(0, R_{c,cs_{\iota'}}) \log \epsilon.$$

証明に関する注意



- $R = \left\{ z \in \mathfrak{a}_c^{-1} \cap \mathfrak{D} \mid z\mathfrak{a}_c \in c \cup cs_{\iota_2} \right\}$.

  $\iota_1(R) \subset \mathbb{R}_+$, $\iota_2(R) \not\subset \mathbb{R}_+$

  $\Rightarrow Z_{\iota_1}(s, R)$, $Z_{\iota_2}\cancel{(s, R)}$.

  $\Rightarrow \exp(X(c, \iota_2)) \exp(X(cs_2, \iota_2))$ の

  代数性 (Stark 予想) が示せない

- n 次総実体では以下が成り立つ.

補題 ([K2])

$\exists D$: 新谷の基本領域, $\exists \nu \in F$, $\exists X_t \subset F \otimes \mathbb{R}$, $\exists \epsilon_t \in E_{F,+}$ s.t.

- $i = 1, \ldots, n-1$ に対して $\iota_i(X_t) \subset \mathbb{R}_+$.
- $i = 1, \ldots, n-1$ に対して $\iota_i(\nu), \ldots, \iota_{n-1}(\nu) > 0$. また $\iota_n(\nu) < 0$
- $(D \coprod \nu D) \uplus \left(\biguplus_{t \in T} \epsilon_t X_t\right) = \biguplus_{t \in T} X_t$. ただし $\uplus$ は multiset sum.

上の図では $|T| = 1$, $X_1 = C(1) \coprod C(1, \epsilon_0) \coprod C(\epsilon_0)$, $\epsilon_1 = \epsilon$, $\nu = \epsilon_0$.

具体例 [Y, Chapter III, Example 6.3]

- $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})} = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$.
- $E_{\mathbb{Q}(\sqrt{5}),+} = \langle \epsilon := \frac{3+\sqrt{5}}{2} \rangle$.
- $D = C(1) \coprod C(1, \epsilon)$.
- $h_+ = |C_{(1)}| = 1$. とくに $\forall c \in C_{\mathfrak{f}}$, $\mathfrak{a}_c = \mathfrak{f}$ としてよい.
- $\mathfrak{f} = (4)$.
- $C_{(4)} = \{c_1 := [(1)], c_2 := [(3)], c_3 := [(4+\sqrt{5})], c_4 := [(6+\sqrt{5})]\}$.

$$(\tfrac{1}{4}, 1)\,{}^t(1, \epsilon)(4) = (1 + 4\epsilon) \in c_1$$

$$\begin{aligned}
&R(c_1, (1)) = \left\{\tfrac{1}{4}\right\}, && R(c_1, (1, \epsilon)) = \{(\tfrac{1}{4}, 1), (1, \tfrac{1}{4}), (\tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{4})\},\\
&R(c_2, (1)) = \left\{\tfrac{3}{4}\right\}, && R(c_2, (1, \epsilon)) = \{(\tfrac{3}{4}, 1), (1, \tfrac{3}{4}), (\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4})\},\\
&R(c_3, (1)) = \emptyset, && R(c_3, (1, \epsilon)) = \{(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}), (\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}), (\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4})\},\\
&R(c_4, (1)) = \emptyset, && R(c_4, (1, \epsilon)) = \{(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}), (\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{4}), (\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{2})\}.
\end{aligned}$$

具体例 [Y, Chapter III, Example 6.3]

- $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.
- $C_{(4)} = \{c_1 := [(1)], c_2 := [(3)], c_3 := [(4+\sqrt{5})], c_4 := [(6+\sqrt{5})]\}$.
- $\iota_1 = \mathrm{id},\ \iota_2 \colon \sqrt{5} \mapsto -\sqrt{5}$.
- $\epsilon = \epsilon^{(1)} = \frac{3+\sqrt{5}}{2},\ \epsilon^{(2)} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

$$\exp(X(c_1,\iota_i)) = 2^{-\frac{1}{2}}\epsilon^{\frac{-\sqrt{5}}{32}}$$
$$\times \Gamma_2(\tfrac{1}{4},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(1+\tfrac{1}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)})),$$
$$\exp(X(c_2,\iota_i)) = 2^{-\frac{1}{2}}\epsilon^{\frac{-\sqrt{5}}{32}}$$
$$\times \Gamma_2(\tfrac{3}{4},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(1+\tfrac{3}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)})),$$
$$\exp(X(c_3,\iota_i)) = 2^{\frac{1}{2}}\epsilon^{\frac{\sqrt{5}}{32}}$$
$$\times \Gamma_2(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)})),$$
$$\exp(X(c_4,\iota_i)) = 2^{\frac{1}{2}}\epsilon^{\frac{\sqrt{5}}{32}}$$
$$\times \Gamma_2(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)})).$$

具体例 [Y, Chapter III, Example 6.3]

$$G := \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})}\left(\frac{\Gamma(\frac{1}{20})\Gamma(\frac{3}{20})\Gamma(\frac{7}{20})\Gamma(\frac{9}{20})}{\Gamma(\frac{11}{20})\Gamma(\frac{13}{20})\Gamma(\frac{17}{20})\Gamma(\frac{19}{20})}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad \epsilon_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$$\begin{aligned}
\exp(X(c_1,\iota_1)) &= 80^{-\frac{1}{8}}\epsilon_0^{\frac{1}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{\frac{1}{4}}G^{\frac{1}{4}},\\
\exp(X(c_2,\iota_1)) &= 80^{-\frac{1}{8}}\epsilon_0^{-\frac{5}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{-\frac{1}{4}}G^{\frac{1}{4}},\\
\exp(X(c_3,\iota_1)) &= 80^{\frac{1}{8}}\epsilon_0^{\frac{3}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{\frac{1}{4}}G^{-\frac{1}{4}},\\
\exp(X(c_4,\iota_1)) &= 80^{\frac{1}{8}}\epsilon_0^{\frac{1}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{-\frac{1}{4}}G^{-\frac{1}{4}},\\
\exp(X(c_1,\iota_2)) &= 80^{-\frac{1}{8}}\epsilon_0^{\frac{1}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{\frac{1}{4}}G^{\frac{1}{4}},\\
\exp(X(c_2,\iota_2)) &= 80^{-\frac{1}{8}}\epsilon_0^{\frac{3}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{-\frac{1}{4}}G^{\frac{1}{4}},\\
\exp(X(c_3,\iota_2)) &= 80^{\frac{1}{8}}\epsilon_0^{-\frac{3}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{-\frac{1}{4}}G^{-\frac{1}{4}},\\
\exp(X(c_4,\iota_2)) &= 80^{\frac{1}{8}}\epsilon_0^{-\frac{1}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{\frac{1}{4}}G^{-\frac{1}{4}}.
\end{aligned}$$

具体例 [Y, Chapter III, Example 6.3]

- $C_{(4)} = \{c_1 := [(1)], c_2 := [(3)], c_3 := [(4+\sqrt{5})], c_4 := [(6+\sqrt{5})]\}$.
- $s_{\iota_1} = [(1-4\sqrt{5})] = c_3$, $s_{\iota_2} = [(1+4\sqrt{5})] = c_4$.
- 主結果 $\Rightarrow E^{\mathbb{Q}}_{F,+}$ の元 $\wr$ Stark 予想 $\Rightarrow E^{\mathbb{Q}}_{F(\sqrt{\epsilon_0}),+}$ の元.

$$\exp(X(c_1,\iota_1)) = 80^{-\frac{1}{8}}\epsilon_0^{\frac{1}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{\frac{1}{4}}G^{\frac{1}{4}}$$

$$\exp(X(c_2,\iota_1)) = 80^{-\frac{1}{8}}\epsilon_0^{-\frac{5}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{-\frac{1}{4}}G^{\frac{1}{4}}$$

$$\exp(X(c_3,\iota_1)) = 80^{\frac{1}{8}}\epsilon_0^{\frac{3}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{\frac{1}{4}}G^{-\frac{1}{4}}$$

$$\exp(X(c_4,\iota_1)) = 80^{\frac{1}{8}}\epsilon_0^{\frac{1}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{-\frac{1}{4}}G^{-\frac{1}{4}}$$

$$\exp(X(c_1,\iota_2)) = 80^{-\frac{1}{8}}\epsilon_0^{\frac{1}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{\frac{1}{4}}G^{\frac{1}{4}}$$

$$\exp(X(c_2,\iota_2)) = 80^{-\frac{1}{8}}\epsilon_0^{\frac{3}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{-\frac{1}{4}}G^{\frac{1}{4}}$$

$$\exp(X(c_3,\iota_2)) = 80^{\frac{1}{8}}\epsilon_0^{-\frac{3}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{-\frac{1}{4}}G^{-\frac{1}{4}}$$

$$\exp(X(c_4,\iota_2)) = 80^{\frac{1}{8}}\epsilon_0^{-\frac{1}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{\frac{1}{4}}G^{-\frac{1}{4}}$$

具体例 [Y, Chapter III, Example 6.3]

- $F=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\iota_1(\epsilon_0)=\epsilon_0=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\iota_2(\epsilon_0)=\epsilon_0'=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
- $C_{(4)}=\{c_1,c_2,c_3,c_4\}=\{1,s_{\iota_1}s_{\iota_2},s_{\iota_1},s_{\iota_2}\}$.
- $F(\sqrt{\epsilon_0},\sqrt{-1})$: $\mathrm{mod}(4)$ の狭義最大射類体.
- $F(\sqrt{\epsilon_0})$: ι_1 が分解する最大の部分体 $\rightsquigarrow$ Stark 予想, Stark 単数.
- $F(\sqrt{\epsilon_0'})$: ι_2 が分解する最大の部分体 $\rightsquigarrow$ Stark 予想, Stark 単数.
- $F(\sqrt{-1})$: 最大の部分 CM 体 $\rightsquigarrow$ 吉田予想, CM 周期.
- $F(\sqrt{-1})\subset\mathbb{Q}(\zeta_{20})$ $\rightsquigarrow$ 円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_{20})$ の CM 周期

  $\fallingdotseq F_{20}: x^{20}+y^{20}=1$ の周期積分 $\fallingdotseq\prod\Gamma(\frac{*}{20})$.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & F(\sqrt{\epsilon_0},\sqrt{-1}) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
F(\sqrt{\epsilon_0}) \arrow[dr, dash, "(4)\iota_2"'] & F(\sqrt{-1}) \arrow[d, dash, "(4)\iota_1\iota_2"] & F(\sqrt{\epsilon_0'}) \arrow[dl, dash, "(4)\iota_1"] \\
 & F &
\end{tikzcd}
\quad \overset{\mathrm{CFT}}{\leftrightarrow} \quad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \{1\} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\langle s_{\iota_1}\rangle \arrow[dr, dash] & \langle s_{\iota_1}s_{\iota_2}\rangle \arrow[d, dash] & \langle s_{\iota_2}\rangle \arrow[dl, dash] \\
 & C_{(4)} &
\end{tikzcd}
$$

吉田予想

吉田氏は志村の周期記号 p_K (すなわち $\pi^{-1}\int_\gamma \frac{dx}{y}$ や $\eta(\tau)^2$ の一般化) を $\exp(X(c,\iota))$ の単項式で表す式を予想した．以下はこれを逆に解いたもの．

予想 (吉田 [Y], [K2])

$\langle s_\iota \mid \iota\rangle \supsetneq \langle s_\iota s_{\iota'} \mid \iota \neq \iota'\rangle$ と仮定する．このとき以下が成り立つ．

$$\exp(X(c,\mathrm{id})) \equiv \pi^{\zeta(0,c)} \prod_{c' \in C_{\mathfrak{f}}} p_{K_{\mathfrak{f},\mathrm{CM}}}(\mathrm{Art}(c), \mathrm{Art}(c'))^{\frac{\zeta(0,c')}{[K_{\mathfrak{f}}:K_{\mathfrak{f},\mathrm{CM}}]}} \bmod \overline{\mathbb{Q}}^\times.$$

ただし $K_{\mathfrak{f},\mathrm{CM}}$ は $\mathrm{mod}\,\mathfrak{f}$ の狭義最大射類体 $K_{\mathfrak{f}}$ に含まれる最大の CM 体で，$\mathrm{Art}\colon C_{\mathfrak{f}} \to \mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{f},\mathrm{CM}}/F)$ は Artin 写像．

注意

- 仮定 $\Leftrightarrow \exists K_{\mathfrak{f},\mathrm{CM}}$ ($\because$ $K_{\mathfrak{f},\mathrm{tot.\ real}} \overset{\mathrm{CFT}}{\leftrightarrow} \langle s_\iota\rangle \supsetneq \langle s_\iota s_{\iota'}\rangle \overset{\mathrm{CFT}}{\leftrightarrow} K_{\mathfrak{f},\mathrm{CM}}$).
- この version の吉田予想 $\Rightarrow$ Stark 単数の代数性．
- Stickelberger 元．

$$g_K(\mathrm{id},\tau) = \pi^{-\mu(\tau)/2}\exp\Big(\frac{1}{|G|}\sum_{\mathfrak{f}|\tilde{\mathfrak{f}}}\ \sum_{\omega\in(\hat{G}_-)_{\mathfrak{f}}} \frac{\omega(\tau)}{L(0,\omega)} \sum_{c\in C_{\mathfrak{f}}} \omega(c)X(c)\Big). \tag{3.10}$$

Conjecture 3.9. *Let K be a CM-field which is an abelian extension of a totally real algebraic number field F. For $\tau \in \mathrm{Gal}(K/F)$, define $g_K(\mathrm{id},\tau)$ by (3.6) $\sim$ (3.10). Then for $\tau \in \mathrm{Gal}(K/F)$, we have $p_K(\mathrm{id},\tau) \sim g_K(\mathrm{id},\tau)$.*

p 進類似

定理 (準備中)

$c \in C_{\mathfrak{f}}$, $\iota_0 \in S_{\mathbb{R}}$, $D, \mathfrak{a}_c$ を固定して考える. $\exists u = u_{c,\iota_0} \in E_{F,+}$, $N \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\iota \neq \iota_0 \Rightarrow \exp(X(c,\iota))\exp(X(cs_{\iota_0},\iota)) = \iota(u)^{\frac{1}{N}},$$

$$\mathfrak{p}_\iota \mid \mathfrak{f} \Rightarrow X_p(c,\iota) + X_p(cs_{\iota_0},\iota) = \frac{1}{N}\log_p \iota(u).$$

ただし $\mathfrak{p}_\iota$ は $\iota(F)$ の p 進位相と対応する素イデアルであり,

$X_p(c,\iota) := Z'_{p,\iota}(0,R_c) +$ "補正項",　$Z_{p,\iota}(s,R_c) := Z_\iota(s,R_c)$ の p 進補完.

$$\text{c.f.} \qquad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},$$

$$\log_p(\Gamma_p(z)\Gamma_p(1-z)) = 0.$$

Archimedean case + p-adic case

$\mathfrak{p}_{\iota_0} \mid \mathfrak{f}$ となる p をとる.

- $X_p(c, \iota_0) + X_p(cs_{\iota_0}, \iota_0) = -\log_p\Big(\prod_{\substack{\iota \in S_{\mathbb{R}} \\ \iota \neq \iota_0}} \exp(X(c,\iota))\exp(X(cs_{\iota_0},\iota))\Big)$.

$$\Rightarrow \frac{\exp(X(c,\iota_0))}{\exp_p(X_p(c,\iota_0))}\frac{\exp(X(cs_{\iota_0},\iota_0))}{\exp_p(X_p(cs_{\iota_0},\iota_0))} \overset{\bmod \mu_\infty}{\equiv} \prod_{\iota \in S_{\mathbb{R}}} \exp(X(c,\iota))\exp(X(cs_{\iota_0},\iota))$$
$$= \exp(\zeta'(0,c))\exp(\zeta'(0,cs_{\iota_0})) \doteqdot \text{Stark 単数}.$$

- "$\dfrac{\exp(X(c,\iota_0))}{\exp_p(X_p(c,\iota_0))}$" $\bmod \mu_\infty$ は $D, \mathfrak{a}_c$ の取り方によらない.
  (c.f. $\exp(X(c,\iota_0)) \bmod \iota_0(E_{F,+})^{\mathbb{Q}}$ は $D, \mathfrak{a}_c$ の取り方によらない.)
- $\dfrac{\exp(X(c,\iota_0))}{\exists\text{CM 周期}} \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$ (吉田予想).

$$\Rightarrow \frac{\exp(X(c,\iota_0))}{\text{CM 周期}}\frac{\text{“}p \text{ 進 CM 周期”}}{\exp_p(X_p(c,\iota_0))} \in B_{\mathrm{dR}}/\mu_\infty \text{ は } c, \iota_0 \text{ のみによる}.$$

Archimedean case + p-adic case

- 吉田予想 $\rightsquigarrow \Gamma(c,\iota) := \dfrac{\exp(X(c,\iota))}{\text{CM 周期}} \dfrac{\text{“}p\text{ 進 CM 周期”}}{\exp_p(X_p(c,\iota))} \in B_{\mathrm{dR}}/\mu_\infty$ が well-defined ($\mathfrak{p}_\iota \mid \mathfrak{f}$).
- 定理 (準備中) $\rightsquigarrow \Gamma(c,\iota)\Gamma(cs_\iota,\iota) \fallingdotseq$ Stark 単数.
- p 進吉田予想 $\overset{?}{\rightsquigarrow}$ $\mathrm{Frob}_\mathfrak{p} \curvearrowright \Gamma(c,\iota)$ $\overset{?}{\rightsquigarrow}$ Stark 単数の相互法則 $\bmod \mu_\infty$.

例 ($F=\mathbb{Q}$ のとき [K1])

- $\dfrac{\Gamma(\frac{a}{n})}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{\Gamma(\frac{n-a}{n})}{\sqrt{2\pi}} = \dfrac{1}{2\sin(\frac{\pi a}{n})} = \dfrac{i}{\zeta_{2n}^{a}-\zeta_{2n}^{-a}} \fallingdotseq$ 円単数 (Stark 単数の特別な場合).
- $\sigma_b\colon \zeta_n \mapsto \zeta_n^b \Rightarrow \sigma_b\left(\frac{1}{2\sin(\frac{\pi a}{n})}\right) = \pm\frac{1}{2\sin(\frac{\pi ab}{n})}$: “円単数の相互法則”.
- Coleman's formula: $\mathrm{Frob}_p \curvearrowright H_{\mathrm{dR}}(F_n)$ ($F_n\colon x^n+y^n=1$)

  $\overset{[K1]}{\Rightarrow}$ $\mathrm{Frob}_p \curvearrowright \dfrac{\Gamma(\frac{a}{n})}{F_n\text{ の周期積分}} \dfrac{F_n\text{ の }p\text{ 進周期積分}}{\Gamma_p(\frac{a}{n})} \in B_{\mathrm{dR}}/\mu_\infty$ ($p \mid n$)

  s.t. “円単数の相互法則” $\bmod \mu_\infty$ の refinement.

- There exists a canonical isomorphism between the singular cohomology group and the p-adic étale cohomology group:

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(F_m(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \cong \mathrm{H}^1_{p,\text{ét}}(F_m \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_p). \tag{27}$$

$$\mathrm{H}^1_{p,\text{ét}}(F_m \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{dR}} \cong \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(F_m, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} B_{\mathrm{dR}}. \tag{29}$$

- The singular cohomology group is the dual of the singular homology group. Namely, we have the non-degenerate pairing:

$$\mathrm{H}_1(F_m(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \times \mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(F_m(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}. \tag{30}$$

Combining (27), (28) and (30), we get a period ring valued pairing

$$\mathrm{H}_1(F_m(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \times \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(F_m, \mathbb{Q}) \to B_{\mathrm{cris}}K. \tag{31}$$

We denote by $\int_{p,\gamma} \eta$ the image of (γ, η) under the map (31). This is a p-adic counterpart of the usual period $\int_\gamma \eta$, $\mathrm{H}_1(F_m(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \times \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(F_m, \mathbb{Q}) \to \mathbb{C}$.