On a refinement of the reciprocity law on Stark units

東京理科大学 理工学部 加塩朋和
E-mail : kashio_tomokazu@ma.noda.tus.ac.jp

2017 年 5 月 31 日 (水) 15:00-16:00

文献

[K1] K., Fermat curves and a refinement of the reciprocity law on cyclotomic units, to appear in *J. Reine Angew. Math.*

[K2] K., On the algebraicity of some products of special values of Barnes' multiple gamma function, to appear in *Amer. J. Math.*

[K3] K., On the ratios of Barnes' multiple gamma functions to the p-adic analogues (preprint, arXiv:1703.10411)

[Y] H. Yoshida, *Absolute CM-Periods*, Math. Surveys Monogr. **106**, Amer. Math. Soc., 2003.

ガンマ関数

定義 (Euler's Γ-function)

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt \ (\mathrm{Re}(s) > 0).$$

- $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2$, $\Gamma(4) = 6, \ldots$ $\Gamma(n) = (n-1)!$ $(n \in \mathbb{N})$.
  $(\because\ s\Gamma(s) = \Gamma(s+1).)$
- $\Gamma(1/2) = 1.772453850\ldots$.
- $\Gamma(1/3) = 2.678938534\ldots$, $\Gamma(2/3) = 1.354117939\ldots$.
- $\Gamma(1/4) = 3.625609908\ldots$, $\Gamma(3/4) = 1.225416702\ldots$.
- $\Gamma(1/2)^2 = 3.141592653\ldots$.
- $\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)/\pi = 1.414213562\ldots$.
- $3\Gamma(1/3)\Gamma(2/3)/2\pi = 1.732050807\ldots$.

ガンマ関数

定理 (Euler's reflection formula)

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

命題 (Hurwitz-Lerch)

$$\zeta(s,x) := \sum_{m=0}^{\infty}(x+m)^{-s} \Rightarrow \frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}} = \exp(\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x)|_{s=0}).$$

系

$$\exp(\zeta'(0,\tfrac{a}{n}))\exp(\zeta'(0,\tfrac{n-a}{n})) = \frac{\Gamma(\frac{a}{n})}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n-a}{n})}{\sqrt{2\pi}}$$

$= \frac{1}{2\sin(\frac{\pi a}{n})} = \frac{i}{\zeta_{2n}^{a}-\zeta_{2n}^{-a}} \fallingdotseq$ “円単数”. $(\zeta_{2n} := \exp(\frac{2\pi i}{2n}).)$

$$\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{Q}}) \curvearrowright \langle \zeta_n^{a} \rangle \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \{\tfrac{a}{n} \bmod \mathbb{Z}\}$$

$\Rightarrow$ “円単数の相互法則” $\sigma\left(\frac{\Gamma(\frac{a}{n})}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n-a}{n})}{\sqrt{2\pi}}\right) = \pm\frac{\Gamma(\sigma(\frac{a}{n}))}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\sigma(\frac{n-a}{n}))}{\sqrt{2\pi}}.$

$\fallingdotseq$ 基礎体が $\mathbb{Q}$ の場合の Stark Conjecture.

ガンマ関数

積 $\exp(\zeta'(0, \frac{a}{n}))\exp(\zeta'(0, \frac{n-a}{n}))$ の代数性, 相互法則

各 $\exp(\zeta'(0, \frac{a}{n})) = \frac{\Gamma(\frac{a}{n})}{\sqrt{2\pi}}$ の超越数部分は？
$\rightsquigarrow$ Chowla-Selberg formula, Rohrlich's formula
$\rightsquigarrow$ 円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ の CM 周期.

ガンマ関数

定理 (Chowla-Selberg formula)

虚 2 次体 K に対し $p_K \in \mathbb{C}^\times/\overline{\mathbb{Q}}^\times$ を, 以下の同値な定義で定める.

- $\mathcal{O}_K \curvearrowright E : y^2 = x^3 + ax + b$ $(a, b \in \overline{\mathbb{Q}})$
$$p_K \equiv \pi^{-1} \int_\gamma \frac{dx}{y} \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times$$
- $K = \mathbb{Q}(\tau)$ $(\mathrm{Im}(\tau) > 0)$, $\eta(\tau) := e^{\frac{2\pi i \tau}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2n\pi i \tau})$
$$p_K \equiv \eta(\tau)^2 \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times.$$

このとき $p_K \equiv \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\prod_{a=1}^{d-1} \Gamma(\tfrac{a}{d})^{\frac{w\chi(\bar{a})}{4h}} \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times.$

- p_K は一般の CM 体 K に対して拡張されている (志村氏の周期記号).
- $\langle P_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\iota, \iota'), \pi \rangle_{\mathbb{Q}} \doteqdot \langle \Gamma(\frac{a}{n}), \pi \rangle_{\mathbb{Q}}$ (Rohrlich's formula).

今日の話題

- 不変量 $\exp(\zeta'(0, \frac{a}{n})) = \frac{\Gamma(\frac{a}{n})}{\sqrt{2\pi}}$ の "多重化":
  Euler's Γ-function ⇒ Barnes' multiple Γ-function.
  有理数体 $\mathbb{Q}$ ⇒ 総実体 F 上の整数論.
- 代数性.
- 超越数部分に関する吉田予想の紹介.
- p 進類似.
- 吉田予想 + p 進類似 ⇒ ???

多重ガンマ関数

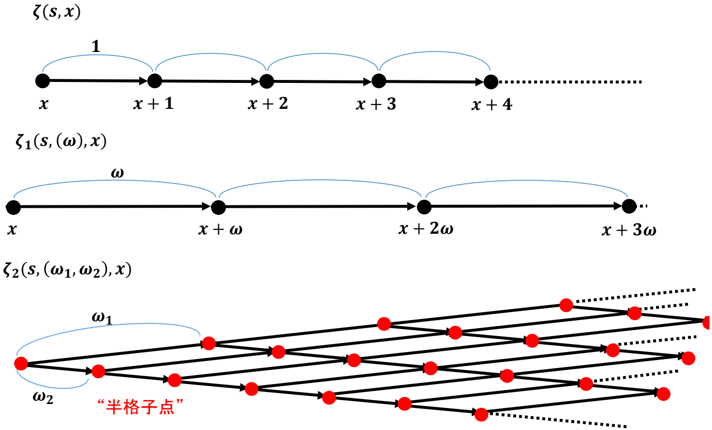
定義

Barnes' multiple zeta function: $r \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_r) \in \mathbb{R}_+^r$, $x \in \mathbb{R}_+$

$$\zeta_r(s, \boldsymbol{\omega}, x) := \sum_{\mathbf{m}=(m_1,\ldots,m_r)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^r} (x + \mathbf{m}\,{}^t\boldsymbol{\omega})^{-s} \quad (\mathrm{Re}(s) > r).$$

多重ガンマ関数

$$\zeta_r(s, \omega, x) := \sum_{\mathbf{m}=(m_1,\ldots,m_r)\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}} (x + \mathbf{m}\,{}^t\omega)^{-s}.$$



多重ガンマ関数

定義

Barnes' multiple zeta function: $r \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_r) \in \mathbb{R}_+^r$, $x \in \mathbb{R}_+$

$$\zeta_r(s, \boldsymbol{\omega}, x) := \sum_{\mathbf{m}=(m_1,\ldots,m_r)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^r} (x + \mathbf{m}\,{}^t\boldsymbol{\omega})^{-s} \quad (\mathrm{Re}(s) > r).$$

(modified) Barnes' multiple gamma function:

$$\Gamma_r(x, \boldsymbol{\omega}) := \exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta_r(s, \boldsymbol{\omega}, x)|_{s=0}\right).$$

c.f., Lerch's formula: $\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}} = \exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta_1(s, (1), x)|_{s=0}\right)$.

総実体の部分ゼータ関数

定義

$[F:\mathbb{Q}] < \infty$: 代数体

- $\mathcal{O}_F$: 整数環, $E_F := \mathcal{O}_F^\times$: 単数群.
- $S_\mathbb{R} := \mathrm{Hom}(F, \mathbb{R})$: 実素点の集合, $r_1 := |S_\mathbb{R}|$.
- F が総実体 $\Leftrightarrow [F:\mathbb{Q}] = r_1$.
- $F_+ := \{\alpha \in F \mid \forall\iota \in S_\mathbb{R},\ \iota(\alpha) > 0\}$.
- $\alpha \in F$ が総正 $\Leftrightarrow \alpha \in F_+ \Leftrightarrow \alpha >> 0$.
- $\mathcal{O}_{F,+} := \mathcal{O}_F \cap F_+$.
- $E_{F,+} := E_F \cap F_+$: 総正単数群.

総実体の部分ゼータ関数

定理 (Dirichlet's unit theorem の系)

F が総実代数体であれば

$$E_{F,+} \cong \mathbb{Z}^{[F:\mathbb{Q}]-1}.$$

例

$F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ のとき

- $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})} = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
- $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{R}) = \{\sqrt{2} \mapsto \pm\sqrt{2}\}$, $r_1 = 2$.
- $E_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})} = \{\pm(1+\sqrt{2})^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.
- $E_{\mathbb{Q}(\sqrt{2}),+} = \{(3+2\sqrt{2})^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
  $(1+\sqrt{2} \mapsto 1 \pm \sqrt{2} = 2.414213562\ldots, -0.414213562\ldots)$.

総実体の部分ゼータ関数

定義

$[F:\mathbb{Q}] < \infty$.

- I_F: 分数イデアル全体.
- 整イデアル $\mathfrak{f} \subset \mathcal{O}_F$ に対し

$$
\begin{aligned}
I_{\mathfrak{f}} &:= \{\mathfrak{a} \in I_F \mid (\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = 1\}, \\
P_{\mathfrak{f}} &:= \{(\alpha) \in I_F \mid \alpha \in F^\times,\ \alpha \equiv 1 \bmod^* \mathfrak{f},\ \alpha >> 0\}, \\
C_{\mathfrak{f}} &:= I_{\mathfrak{f}}/P_{\mathfrak{f}} : \ \mathfrak{f} \text{ を法とする } \underline{\text{狭義}} \text{ イデアル類群}
\end{aligned}
$$

- $\mathfrak{a} \in I_{\mathfrak{f}}$ の属するイデアル類を $[\mathfrak{a}] \in C_{\mathfrak{f}}$ で表す.

総実体の部分ゼータ関数

定義

部分ゼータ関数:

$$\zeta(s, c) = \sum_{\mathcal{O}_F \supset \mathfrak{a} \in c} N\mathfrak{a}^{-s} \quad (\mathrm{Re}(s) > 1,\ c \in C_{\mathfrak{f}})$$

$F = \mathbb{Q}$ のとき

- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \overset{\cong}{\to} C_{(n)}$, $a \bmod n \mapsto [(a)] \quad (0 < a < n,\ (a, n) = 1)$.
- イデアル類 $[(a)] = \{(a), (a+n), (a+2n), \dots\}$.
- $\zeta(s, [(a)]) = (a)^{-s} + (a+n)^{-s} + (a+2n)^{-s} + \dots$
  $= \zeta_1(s, (n), a) = n^{-s}\zeta(s, \frac{a}{n})$.

代数性

以下 F は <u>総実体</u> とする.

定理 (新谷公式 + 吉田の類不変量)

あるデータ (新谷の基本領域, イデアル類の代表元) を固定するごとに $\exists z_k, \alpha_l, \beta_l \in F_+$, $\mathbf{v}_k \in F_+^{r_k}$ s.t.

$$\begin{aligned}\zeta'(0,c) &= \sum_{\iota \in S_{\mathbb{R}}} \left(\sum_{k=1}^{K} \log(\Gamma_{r_k}(\iota(z_k), \iota(\mathbf{v}_k))) + \sum_{l=1}^{L} \iota(\alpha_l) \log(\iota(\beta_l)) \right) \\ &=: \sum_{\iota \in S_{\mathbb{R}}} X(c,\iota).\end{aligned}$$

さらに $\exp(X(c,\iota)) \bmod \iota(E_{F,+})^{\mathbb{Q}}$ はデータの選び方によらない.

代数性

ある <u>ペア c, c'</u> に対し積 $\exp(X(c,\iota))\exp(X(c',\iota))$ は "単数".

定義

$\iota \in S_{\mathbb{R}} = \mathrm{Hom}(F, \mathbb{R})$ に対し

- $\nu_\iota \in \mathcal{O}_F$ s.t. $\nu_\iota \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}$, $\iota(\nu_\iota) < 0$, $\iota'(\nu_\iota) > 0$ $(\iota \neq \iota' \in S_{\mathbb{R}})$.
- $s_\iota = [(\nu_\iota)] \in C_{\mathfrak{f}}$.

命題

$s_\iota \overset{\mathrm{CFT}}{\leftrightarrow}$ "実素点 ι 上の複素共役写像".

すなわち $F \overset{\text{fin, ab}}{\subset} K$, $\tilde{\iota}\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{\iota}|_F = \iota$ のとき

$$\begin{array}{ccccc} C_{\mathfrak{f}_{K/F}} & \overset{\mathrm{Art}}{\to} \mathrm{Gal}(K/F) & \overset{\tilde{\iota}^*}{\to} & \mathrm{Aut}(\mathbb{C}), \\ s_\iota & \mapsto & & \text{複素共役写像}. \end{array}$$

代数性

定理 (新谷公式 + 吉田の類不変量)

$$\zeta'(0, c) = \sum_{\iota \in S_{\mathbb{R}}} X(c, \iota).$$

定理 (吉田 [Y] ($[F : \mathbb{Q}] = 2$), [K2] ($[F : \mathbb{Q}] > 2$))

$$\iota \neq \iota' \Rightarrow \exp(X(c, \iota)) \exp(X(cs_{\iota'}, \iota)) \in \iota(E_{F,+})^{\mathbb{Q}}.$$

予想 (rank 1 abelian Stark conjecture, w.r.t. real place)

自明な例外を除いて

$$\exp(\zeta'(0, c)) \exp(\zeta'(0, cs_{\iota'})) = \prod_{\iota \in S_{\mathbb{R}}} \exp(X(c, \iota)) \exp(X(cs_{\iota'}, \iota)) \in \tilde{\iota}'(E_{K_{\mathfrak{f}},+})^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathrm{Art}(c')(\exp(\zeta'(0, c)) \exp(\zeta'(0, cs_{\iota'}))) = \pm(\exp(\zeta'(0, cc')) \exp(\zeta'(0, cc' s_{\iota'}))).$$

"Stark 単数の相互法則"

代数性の証明のアイデア

- 半格子点の和集合 $R \subset F$ に対し $Z_\iota(s, R) := \sum_{z \in R} \iota(z)^{-s}$ とおく.
- 吉田の類不変量の定義 $\Rightarrow X(c, \iota) \fallingdotseq Z'_\iota(0, R_c)$ $(\exists R_c \subset F_+)$.
- Key fact: $R_c \coprod R_{cs_{\iota'}} \fallingdotseq R - uR$ $(\exists R = R_{c, cs_{\iota'}} \subset F,\ \exists u \in E_{F,+})$.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow X(c, \iota) + X(cs_{\iota'}, \iota) &\fallingdotseq Z'_\iota(0, R_c \coprod R_{cs_{\iota'}}) \\
&= Z'_\iota(0, R) - Z'_\iota(0, uR) \\
&= \frac{d}{ds} Z_\iota(s, R)|_{s=0} - \frac{d}{ds} \iota(u)^{-s} Z_\iota(s, R)|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds} \left((1 - \iota(u)^{-s}) Z_\iota(s, R) \right) |_{s=0} \\
&= Z_\iota(0, R) \log(\iota(u)).
\end{aligned}
$$

新谷の手法

より詳しく説明するには

$X(c,\iota) \fallingdotseq Z_\iota'(0,R_c)$ となる $R_c \subset F_+ \Leftarrow$ 吉田の類不変量の定義

$\Uparrow$

新谷氏による部分ゼータ関数 $\zeta(s,c) = \displaystyle\sum_{\mathcal{O}_F \supset \mathfrak{a} \in c} N\mathfrak{a}^{-s}$ の記述

まで戻る必要がある.

- $c \in C_\mathfrak{f}$.
- fix $\mathfrak{a}_c$ s.t. $[\mathfrak{a}_c] = \pi(c) \in C_{(1)}$ $(\pi\colon C_\mathfrak{f} \to C_{(1)})$.
- $\mathfrak{a} \in c \Rightarrow [\mathfrak{a}] = [\mathfrak{a}_c] \in C_{(1)} \Rightarrow \exists z \in F_+$ s.t. $z\mathfrak{a}_c = \mathfrak{a}$.

  $\Rightarrow \{\mathcal{O}_F \supset \mathfrak{a} \in c\} = \mathfrak{a}_c \cdot \{z \in \mathfrak{a}_c^{-1} \cap F_+, \mid z\mathfrak{a}_c \in c\} \curvearrowleft E_{F,+}$

  $= \mathfrak{a}_c \cdot \{z \in \mathfrak{a}_c^{-1} \cap D \mid z\mathfrak{a}_c \in c\}$.

  D: 新谷の基本領域 $\fallingdotseq F_+/E_{F,+}$ (実際は $F \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R}_+/E_{F,+}$).

新谷の手法

定義

- 一次独立なベクトル $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$C(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r) := \{t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_r\mathbf{v}_r \mid t_i \in \mathbb{R}_+\} \subset \mathbb{R}^n$$

  を $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ を基底とする cone と呼ぶ.
- n 次の総実体 F に対し $S_{\mathbb{R}} = \{\iota_1, \ldots, \iota_n\}$ の順番を固定して

$$F \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n, \quad \alpha \otimes r \mapsto (\iota_1(\alpha)r, \ldots, \iota_n(\alpha)r)$$

  と同一視する. $\mathbb{R}^n$ の cone で, 基底が全て $\mathcal{O}_F$ $(\subset F \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}^n)$ に含まれるものを F の cone と呼ぶ.
- 同一視 $F \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ において $\mathbb{R}^n_+$ に対応する部分を $F \otimes \mathbb{R}_+$ で表す.

新谷の手法

定理 (新谷)

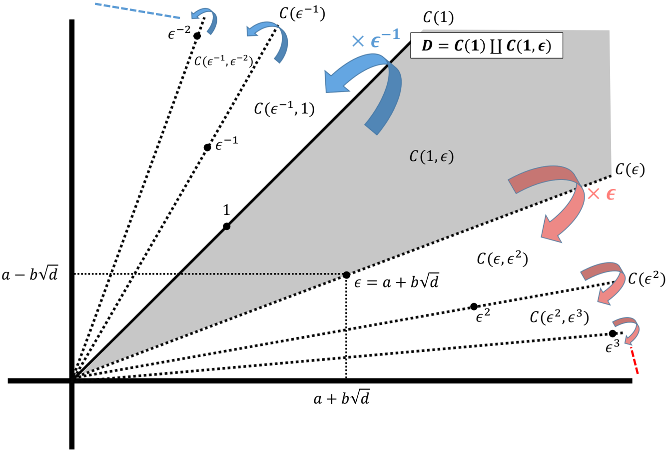
総実体 F に対し, 商 $F \otimes \mathbb{R}_+ / E_{F,+}$ の基本領域 D として, 有限個の F の cone の非交和として書けるものが取れる. すなわち

$$\exists v_{ij} \in \mathcal{O}_{F,+} \ (j \in J, 1 \leq i \leq r(j), |J| < \infty, r(j) \in \mathbb{N})$$
$$\text{s.t. } F \otimes \mathbb{R}_+ = \coprod_{u \in E_{F,+}} uD, \quad D = \coprod_{j \in J} C(v_{j1}, \ldots, v_{jr(j)}).$$

このような D を <u>新谷の基本領域</u> と呼ぶことにする.

新谷の手法

例えば $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ のとき $\exists \epsilon = a + b\sqrt{d}$ s.t. $E_{F,+} = \langle \epsilon \rangle$.
$\Rightarrow D = C(1) \coprod C(1,\epsilon)$, $F \otimes \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+^2 = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} \epsilon^n D$.



新谷の手法

新谷の基本領域 $D = \coprod_{j \in J} C(\mathbf{v}_j)$ に対し

$$\zeta(s, c) = N(\mathfrak{a}_c)^{-s} \sum_{j \in J} \sum_{z \in \mathfrak{a}_c^{-1} \cap C(\mathbf{v}_j),\ z\mathfrak{a}_c \in c} Nz^{-s}.$$

命題

$\mathfrak{f} \mid \mathfrak{a}_c$ と仮定し $R(c, \mathbf{v}_j) := \{\mathbf{x} \in (0,1]^{r(j)} \mid \mathbf{x}\,{}^t\mathbf{v}_j \in \mathfrak{a}_c^{-1},\ (\mathbf{x}\,{}^t\mathbf{v}_j)\mathfrak{a}_c \in c\}$ とおくと

- $|R(c, \mathbf{v}_j)| < \infty$.
- $\{z \in \mathfrak{a}_c^{-1} \cap C(\mathbf{v}_j) \mid z\mathfrak{a}_c \in c\} = \coprod_{\mathbf{x} \in R(c,\mathbf{v}_j)} \{(\mathbf{x} + \mathbf{m})\,{}^t\mathbf{v}_j \mid \mathbf{m} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{r(j)}\}$.

$$\Rightarrow \zeta(s, c) = N(\mathfrak{a}_c)^{-s} \sum_{j \in J} \sum_{\mathbf{x} \in R(c,\mathbf{v}_j)} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{r(j)}} \left(\prod_{\iota \in S_{\mathbb{R}}} \iota((\mathbf{x} + \mathbf{m})\,{}^t\mathbf{v}_j) \right)^{-s}.$$

新谷の手法

$$\zeta(s,c) = N(\mathfrak{a}_c)^{-s} \sum_{j\in J} \sum_{\mathbf{x}\in R(c,\mathbf{v}_j)} \underbrace{\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r(j)}} \left(\prod_{\iota\in S_\mathbb{R}} \iota((\mathbf{x}+\mathbf{m})\,{}^t\mathbf{v}_j) \right)^{-s}}_{\text{半格子点上の和}} .$$

c.f. $\quad \zeta_{r(j)}(s, \iota(\mathbf{v}_j), \iota(\mathbf{x}\,{}^t\mathbf{v}_j)) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r(j)}} \iota((\mathbf{x}+\mathbf{m})\,{}^t\mathbf{v}_j)^{-s},$

$$\frac{d}{ds}(\prod_{i=1}^n a_i)^{-s}|_{s=0} = -\log(\prod_{i=1}^n a_i) = -\sum_{i=1}^n \log(a_i) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{ds} a_i^{-s}|_{s=0}.$$

定理 (新谷)

$$\zeta'(0,c) = \sum_{\iota\in S_\mathbb{R}} \sum_{j\in J} \sum_{\mathbf{x}\in R(c,\mathbf{v}_j)} \log(\Gamma_{r(j)}(\iota(\mathbf{x}\,{}^t\mathbf{v}_j), \iota(\mathbf{v}_j))) + \text{“補正項”}.$$

吉田の類不変量

定理 (新谷)

$$\zeta'(0,c) = \sum_{\iota \in S_{\mathbb{R}}} \sum_{j \in J} \sum_{\mathbf{x} \in R(c,\mathbf{v}_j)} \log(\Gamma_{r(j)}(\iota(\mathbf{x}\,{}^t\mathbf{v}_j), \iota(\mathbf{v}_j))) + \text{“補正項”}.$$

定理 (吉田 [Y])

$$X(c,\iota) := \sum_{j \in J} \sum_{\mathbf{x} \in R(c,\mathbf{v}_j)} \log(\Gamma_{r(j)}(\iota(\mathbf{x}\,{}^t\mathbf{v}_j), \iota(\mathbf{v}_j))) + \text{“補正項の上手い分割”}$$

$\Rightarrow \exp(X(c,\iota)) \bmod \iota(E_{F,+})^{\mathbb{Q}}$ は, 新谷の基本領域 D, イデアル類の代表元 $\mathfrak{a}_c$ の取り方によらない.

吉田の類不変量

$$\zeta(s,c) = N(\mathfrak{a}_c)^{-s} \sum_{z \in \mathfrak{a}_c^{-1} \cap D,\ z\mathfrak{a}_c \in c} Nz^{-s}$$

$$= N(\mathfrak{a}_c)^{-s} \sum_{j \in J} \sum_{\mathbf{x} \in R(c,\mathbf{v}_j)} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{r(j)}} \left(\prod_{\iota \in S_{\mathbb{R}}} \iota((\mathbf{x}+\mathbf{m})\,{}^t\mathbf{v}_j) \right)^{-s}.$$

の逆をたどれば

$$X(c,\iota) := \sum_{j \in J} \sum_{\mathbf{x} \in R(c,\mathbf{v}_j)} \log(\Gamma_{r(j)}(\iota(\mathbf{x}\,{}^t\mathbf{v}_j), \iota(\mathbf{v}_j))) + \text{“補正項”}$$

$$= Z_\iota'(0, R_c) + \text{“補正項”},$$

$$Z_\iota(s,R) := \sum_{z \in R} \iota(z)^{-s}, \qquad R_c := \left\{ z \in \mathfrak{a}_c^{-1} \cap D \mid z\mathfrak{a}_c \in c \right\}.$$

吉田の類不変量

$$X(c,\iota) = Z'_\iota(0, R_c) + \text{“補正項”},$$

$$Z_\iota(s,R) := \sum_{z \in R} \iota(z)^{-s}, \qquad R_c := \left\{ z \in \mathfrak{a}_c^{-1} \cap D \mid z\mathfrak{a}_c \in c \right\}.$$

Recall. Key fact: $R_c \coprod R_{cs_{\iota'}} \fallingdotseq R - uR$ $(\exists R = R_{c,cs_{\iota'}} \subset F,\ \exists u \in E_{F,+})$.

補題 ([K2])

$\exists D$: 新谷の基本領域, $\exists \nu \in F$, $\exists X_t \subset F \otimes \mathbb{R}$, $\exists \epsilon_t \in E_{F,+}$ s.t.

- $\iota \neq \iota' \Rightarrow \iota(X_t) \subset \mathbb{R}_+$.
- $\iota \neq \iota' \Rightarrow \iota(\nu) > 0$. また $\iota'(\nu) < 0$.
- $(D \coprod \nu D) \uplus \left(\biguplus_{t \in T} \epsilon_t X_t \right) = \biguplus_{t \in T} X_t$. ただし $\uplus$ は multiset sum.

具体例 [Y, Chapter III, Example 6.3]

- $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})} = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$.
- $E_{\mathbb{Q}(\sqrt{5}),+} = \langle \epsilon := \frac{3+\sqrt{5}}{2} \rangle$.
- $D = C(1) \coprod C(1,\epsilon)$.
- $h_+ = |C_{(1)}| = 1$. とくに $\forall c \in C_{\mathfrak{f}}$, $\mathfrak{a}_c = \mathfrak{f}$ としてよい.
- $\mathfrak{f} = (4)$.
- $C_{(4)} = \{c_1 := [(1)], c_2 := [(3)], c_3 := [(4+\sqrt{5})], c_4 := [(6+\sqrt{5})]\}$.

$$(\tfrac{1}{4}, 1)\,{}^t(1,\epsilon)(4) = (1+4\epsilon) \in c_1$$

$$\begin{aligned}
R(c_1,(1)) &= \left\{\tfrac{1}{4}\right\}, & R(c_1,(1,\epsilon)) &= \{(\tfrac{1}{4},1),(1,\tfrac{1}{4}),(\tfrac{3}{4},\tfrac{3}{4})\},\\
R(c_2,(1)) &= \left\{\tfrac{3}{4}\right\}, & R(c_2,(1,\epsilon)) &= \{(\tfrac{3}{4},1),(1,\tfrac{3}{4}),(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4})\},\\
R(c_3,(1)) &= \emptyset, & R(c_3,(1,\epsilon)) &= \{(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}),(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4}),(\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4})\},\\
R(c_4,(1)) &= \emptyset, & R(c_4,(1,\epsilon)) &= \{(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4}),(\tfrac{3}{4},\tfrac{1}{4}),(\tfrac{3}{4},\tfrac{1}{2})\}.
\end{aligned}$$

具体例 [Y, Chapter III, Example 6.3]

- $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.
- $C_{(4)} = \{c_1 := [(1)], c_2 := [(3)], c_3 := [(4+\sqrt{5})], c_4 := [(6+\sqrt{5})]\}$.
- $\iota_1 = \mathrm{id},\ \iota_2 \colon \sqrt{5} \mapsto -\sqrt{5}$.
- $\epsilon = \epsilon^{(1)} = \frac{3+\sqrt{5}}{2},\ \epsilon^{(2)} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

$$\exp(X(c_1,\iota_i)) = 2^{-\frac{1}{2}}\epsilon^{\frac{-\sqrt{5}}{32}}$$
$$\times \Gamma_2(\tfrac{1}{4},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(1+\tfrac{1}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)})),$$
$$\exp(X(c_2,\iota_i)) = 2^{-\frac{1}{2}}\epsilon^{\frac{-\sqrt{5}}{32}}$$
$$\times \Gamma_2(\tfrac{3}{4},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(1+\tfrac{3}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)})),$$
$$\exp(X(c_3,\iota_i)) = 2^{\frac{1}{2}}\epsilon^{\frac{\sqrt{5}}{32}}$$
$$\times \Gamma_2(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)})),$$
$$\exp(X(c_4,\iota_i)) = 2^{\frac{1}{2}}\epsilon^{\frac{\sqrt{5}}{32}}$$
$$\times \Gamma_2(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)})).$$

具体例 [Y, Chapter III, Example 6.3]

$$G := \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})}\left(\frac{\Gamma(\frac{1}{20})\Gamma(\frac{3}{20})\Gamma(\frac{7}{20})\Gamma(\frac{9}{20})}{\Gamma(\frac{11}{20})\Gamma(\frac{13}{20})\Gamma(\frac{17}{20})\Gamma(\frac{19}{20})}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad \epsilon_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$$\exp(X(c_1,\iota_1)) = 80^{-\frac{1}{8}}\epsilon_0^{\frac{1}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{\frac{1}{4}}G^{\frac{1}{4}},$$
$$\exp(X(c_2,\iota_1)) = 80^{-\frac{1}{8}}\epsilon_0^{-\frac{5}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{-\frac{1}{4}}G^{\frac{1}{4}},$$
$$\exp(X(c_3,\iota_1)) = 80^{\frac{1}{8}}\epsilon_0^{\frac{3}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{\frac{1}{4}}G^{-\frac{1}{4}},$$
$$\exp(X(c_4,\iota_1)) = 80^{\frac{1}{8}}\epsilon_0^{\frac{1}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{-\frac{1}{4}}G^{-\frac{1}{4}},$$
$$\exp(X(c_1,\iota_2)) = 80^{-\frac{1}{8}}\epsilon_0^{\frac{1}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{\frac{1}{4}}G^{\frac{1}{4}},$$
$$\exp(X(c_2,\iota_2)) = 80^{-\frac{1}{8}}\epsilon_0^{\frac{3}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{-\frac{1}{4}}G^{\frac{1}{4}},$$
$$\exp(X(c_3,\iota_2)) = 80^{\frac{1}{8}}\epsilon_0^{-\frac{3}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{-\frac{1}{4}}G^{-\frac{1}{4}},$$
$$\exp(X(c_4,\iota_2)) = 80^{\frac{1}{8}}\epsilon_0^{-\frac{1}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{\frac{1}{4}}G^{-\frac{1}{4}}.$$

具体例 [Y, Chapter III, Example 6.3]

- $C_{(4)} = \{c_1 := [(1)], c_2 := [(3)], c_3 := [(4+\sqrt{5})], c_4 := [(6+\sqrt{5})]\}$.
- $s_{\iota_1} = [(1-4\sqrt{5})] = c_3$, $s_{\iota_2} = [(1+4\sqrt{5})] = c_4$.
- 定理 $\Rightarrow E^{\mathbb{Q}}_{F,+}$ の元 $\wr\wr$ Stark 予想 $\Rightarrow E^{\mathbb{Q}}_{F(\sqrt{\epsilon_0}),+}$ の元.

$$\exp(X(c_1,\iota_1)) = 80^{-\frac{1}{8}}\epsilon_0^{\frac{1}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{\frac{1}{4}}G^{\frac{1}{4}}$$
$$\exp(X(c_2,\iota_1)) = 80^{-\frac{1}{8}}\epsilon_0^{-\frac{5}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{-\frac{1}{4}}G^{\frac{1}{4}}$$
$$\exp(X(c_3,\iota_1)) = 80^{\frac{1}{8}}\epsilon_0^{\frac{3}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{\frac{1}{4}}G^{-\frac{1}{4}}$$
$$\exp(X(c_4,\iota_1)) = 80^{\frac{1}{8}}\epsilon_0^{\frac{1}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{-\frac{1}{4}}G^{-\frac{1}{4}}$$
$$\exp(X(c_1,\iota_2)) = 80^{-\frac{1}{8}}\epsilon_0^{\frac{1}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{\frac{1}{4}}G^{\frac{1}{4}}$$
$$\exp(X(c_2,\iota_2)) = 80^{-\frac{1}{8}}\epsilon_0^{\frac{3}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{-\frac{1}{4}}G^{\frac{1}{4}}$$
$$\exp(X(c_3,\iota_2)) = 80^{\frac{1}{8}}\epsilon_0^{-\frac{3}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{-\frac{1}{4}}G^{-\frac{1}{4}}$$
$$\exp(X(c_4,\iota_2)) = 80^{\frac{1}{8}}\epsilon_0^{-\frac{1}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{\frac{1}{4}}G^{-\frac{1}{4}}$$

具体例 [Y, Chapter III, Example 6.3]

- $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\iota_1(\epsilon_0) = \epsilon_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\iota_2(\epsilon_0) = \epsilon_0' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
- $C_{(4)} = \{c_1, c_2, c_3, c_4\} = \{1, s_{\iota_1}s_{\iota_2}, s_{\iota_1}, s_{\iota_2}\}$.
- $F(\sqrt{\epsilon_0}, \sqrt{-1})$: mod(4) の狭義最大射類体.
- $F(\sqrt{\epsilon_0})$: ι_1 が分解する最大の部分体 $\rightsquigarrow$ Stark 予想, Stark 単数.
- $F(\sqrt{\epsilon_0'})$: ι_2 が分解する最大の部分体 $\rightsquigarrow$ Stark 予想, Stark 単数.
- $F(\sqrt{-1})$: 最大の部分 CM 体 $\rightsquigarrow$ 吉田予想, CM 周期.
- $F(\sqrt{-1}) \subset \mathbb{Q}(\zeta_{20}) \rightsquigarrow$ 円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_{20})$ の CM 周期

  $\fallingdotseq F_{20} : x^{20} + y^{20} = 1$ の周期積分 $\fallingdotseq \prod \Gamma(\frac{*}{20})$.

$$\begin{tikzcd}
 & F(\sqrt{\epsilon_0}, \sqrt{-1}) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & & & & \{1\} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
F(\sqrt{\epsilon_0}) \arrow[dr, dash, "(4)\iota_2"'] & F(\sqrt{-1}) \arrow[d, dash, "(4)\iota_1\iota_2"] & F(\sqrt{\epsilon_0'}) \arrow[dl, dash, "(4)\iota_1"] & \overset{\mathrm{CFT}}{\leftrightarrow} & \langle s_{\iota_1} \rangle \arrow[dr, dash] & \langle s_{\iota_1} s_{\iota_2} \rangle \arrow[d, dash] & \langle s_{\iota_2} \rangle \arrow[dl, dash] \\
 & F & & & & C_{(4)} &
\end{tikzcd}$$

吉田予想

吉田氏は志村の周期記号 p_K (すなわち $\pi^{-1}\int_\gamma \frac{dx}{y}$ や $\eta(\tau)^2$ の一般化) を $\exp(X(c,\iota))$ の単項式で表す式を予想した. 以下はこれを逆に解いたもの.

予想 (吉田 [Y], [K2])

$\langle s_\iota \mid \iota \rangle \supsetneq \langle s_\iota s_{\iota'} \mid \iota \neq \iota' \rangle$ と仮定する. このとき以下が成り立つ.

$$\exp(X(c,\mathrm{id})) \equiv \pi^{\zeta(0,c)} \prod_{c' \in C_{\mathfrak{f}}} p_{K_{\mathfrak{f},\mathrm{CM}}}(\mathrm{Art}(c), \mathrm{Art}(c'))^{\frac{\zeta(0,c')}{[K_{\mathfrak{f}}:K_{\mathfrak{f},\mathrm{CM}}]}} \bmod \overline{\mathbb{Q}}^{\times}.$$

ただし $K_{\mathfrak{f},\mathrm{CM}}$ は $\mathrm{mod}\,\mathfrak{f}$ の狭義射類体 $K_{\mathfrak{f}}$ に含まれる最大の CM 体で, $\mathrm{Art}\colon C_{\mathfrak{f}} \to \mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{f},\mathrm{CM}}/F)$ は Artin 写像.

吉田予想

予想 (吉田 [Y], [K2])

$\langle s_\iota \mid \iota \rangle \supsetneq \langle s_\iota s_{\iota'} \mid \iota \neq \iota' \rangle$ と仮定する．このとき以下が成り立つ．

$$\exp(X(c, \mathrm{id})) \equiv \pi^{\zeta(0,c)} \prod_{c' \in C_\mathfrak{f}} p_{K_{\mathfrak{f},\mathrm{CM}}}(\mathrm{Art}(c), \mathrm{Art}(c'))^{\frac{\zeta(0,c')}{[K_\mathfrak{f}:K_{\mathfrak{f},\mathrm{CM}}]}} \bmod \overline{\mathbb{Q}}^\times.$$

注意

- 仮定 $\Leftrightarrow \exists K_{\mathfrak{f},\mathrm{CM}}$ ($\because$ $K_{\mathfrak{f},\mathrm{tot.\ real}} \overset{\text{CFT}}{\leftrightarrow} \langle s_\iota \rangle \supsetneq \langle s_\iota s_{\iota'} \rangle \overset{\text{CFT}}{\leftrightarrow} K_{\mathfrak{f},\mathrm{CM}}$).
- この version の予想 $\Rightarrow$ Stark 単数の代数性.
- Stark 単数の代数性を仮定すると, 元の吉田予想と同値.
- Rohrlich's formula $+$ Euler's reflection formula $\Rightarrow$ 元の吉田予想の $F = \mathbb{Q}$ の場合.
- Rohrlich's formula $\Rightarrow$ 上記予想の $F = \mathbb{Q}$ の場合.

p 進類似

定理 ([K2], 詳細 ver.)

$c \in C_{\mathfrak{f}}$, $\iota_0 \in S_{\mathbb{R}}$, D, $\mathfrak{a}_c$ を固定して考える. $\exists u = u_{c,\iota_0} \in E_{F,+}$, $N \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\iota \neq \iota_0 \Rightarrow \exp(X(c,\iota))\exp(X(cs_{\iota_0},\iota)) = \iota(u)^{\frac{1}{N}}$$

もし $\iota = \iota_0$ でも成立

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \exp(\zeta'(0,c))\exp(\zeta'(0,cs_{\iota_0}))\\ &\quad = \prod_{\iota \in S_{\mathbb{R}}} \exp(X(c,\iota))\exp(X(cs_{\iota_0},\iota)) = N(u)^{\frac{1}{N}} = 1.\end{aligned}$$

一般にはありえない (Stark 単数が退化している場合のみ成立).

p 進類似

定理 ([K3])

$c \in C_{\mathfrak{f}}$, $\iota_0 \in S_{\mathbb{R}}$, $D, \mathfrak{a}_c$ を固定して考える. $\exists u = u_{c,\iota_0} \in E_{F,+}$, $N \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\iota \neq \iota_0 \Rightarrow \exp(X(c,\iota))\exp(X(cs_{\iota_0},\iota)) = \iota(u)^{\frac{1}{N}},$$

$$\mathfrak{p}_\iota \mid \mathfrak{f} \Rightarrow X_p(c,\iota) + X_p(cs_{\iota_0},\iota) = \frac{1}{N}\log_p \iota(u). \quad \text{(new!)}$$

ただし $\mathfrak{p}_\iota$ は $\iota(F)$ の p 進位相と対応する素イデアルであり,

$X_p(c,\iota) := Z'_{p,\iota}(0,R_c) +$ “補正項”, $\quad Z_{p,\iota}(s,R_c) := Z_\iota(s,R_c)$ の p 進補完.

$$\text{c.f.} \qquad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},$$
$$\log_p(\Gamma_p(z)\Gamma_p(1-z)) = 0.$$

Archimedean case + p-adic case

$\mathfrak{p}_{\iota_0} \mid \mathfrak{f}$ となる p をとる.

- $X_p(c,\iota_0) + X_p(cs_{\iota_0},\iota_0) = -\log_p\Bigl(\prod_{\substack{\iota\in S_{\mathbb{R}}\\ \iota\neq\iota_0}} \exp(X(c,\iota))\exp(X(cs_{\iota_0},\iota))\Bigr).$

$$\Rightarrow \frac{\exp(X(c,\iota_0))}{\exp_p(X_p(c,\iota_0))}\frac{\exp(X(cs_{\iota_0},\iota_0))}{\exp_p(X_p(cs_{\iota_0},\iota_0))} \overset{\mathrm{mod}\ \mu_\infty}{\equiv} \prod_{\iota\in S_{\mathbb{R}}} \exp(X(c,\iota))\exp(X(cs_{\iota_0},\iota))$$
$$= \exp(\zeta'(0,c))\exp(\zeta'(0,cs_{\iota_0})) \doteqdot \text{Stark 単数}.$$

- "$\dfrac{\exp(X(c,\iota_0))}{\exp_p(X_p(c,\iota_0))}$" $\mathrm{mod}\,\mu_\infty$ は $D, \mathfrak{a}_c$ の取り方によらない.
  (c.f. $\exp(X(c,\iota_0))$ mod $\iota_0(E_{F,+})^{\mathbb{Q}}$ は $D, \mathfrak{a}_c$ の取り方によらない.)
- $\dfrac{\exp(X(c,\iota_0))}{\exists\text{CM 周期}} \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$ (吉田予想).

$$\Rightarrow \frac{\exp(X(c,\iota_0))}{\text{CM 周期}}\frac{\text{“}p\text{ 進 CM 周期”}}{\exp_p(X_p(c,\iota_0))} \in B_{\mathrm{dR}}^\times/\mu_\infty \text{ は } c,\iota_0 \text{ のみによる.}$$

Archimedean case + p-adic case

- 吉田予想: $\Gamma(c,\iota) := \dfrac{\exp(X(c,\iota))}{\mathrm{CM}\ 周期} \dfrac{p\ 進\ \mathrm{CM}\ 周期}{\exp_p(X_p(c,\iota))} \in B_{\mathrm{dR}}^{\times}/\mu_\infty$ $(\mathfrak{p}_\iota \mid \mathfrak{f})$.
- [K3]: $\Gamma(c,\iota)\Gamma(cs_\iota,\iota) \fallingdotseq$ Stark 単数.
- p 進吉田予想 $(\mathfrak{p}_\iota \mid \mathfrak{f})$: $\text{abs. Frob.}: \Gamma(c,\iota) \mapsto \Gamma(\text{abs. Frob.}(c),\iota)$

  (次ページの $\mathfrak{p}_\iota \nmid \mathfrak{f}$ の場合も必要) $\rightsquigarrow$ Stark 単数の相互法則 $\bmod \mu_\infty$.

例 ($F=\mathbb{Q}$ のとき [K1])

- $\dfrac{\Gamma(\frac{a}{n})}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{\Gamma(\frac{n-a}{n})}{\sqrt{2\pi}} = \dfrac{1}{2\sin(\frac{\pi a}{n})} = \dfrac{i}{\zeta_{2n}^{a}-\zeta_{2n}^{-a}} \fallingdotseq$ 円単数 (Stark 単数の特別な場合).
- $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \Rightarrow \sigma\left(\dfrac{1}{2\sin(\pi\frac{a}{n})}\right) = \pm\dfrac{1}{2\sin(\pi\sigma(\frac{a}{n}))}$: "円単数の相互法則".
- Coleman's formula: abs. Frob. $\curvearrowright H_{\mathrm{dR}}(F_n)$ $(F_n: x^n+y^n=1)$

  $\overset{[\mathrm{K1}]}{\Rightarrow}$ $\text{abs. Frob.}: \dfrac{\Gamma(\frac{a}{n})}{F_n\ の周期積分の積} \dfrac{F_n\ の\ p\ 進周期積分の積}{\Gamma_p(\frac{a}{n})}$

  $$\mapsto \frac{\Gamma(\text{abs. Frob.}(\frac{a}{n}))}{F_n\ の周期積分の積} \frac{F_n\ の\ p\ 進周期積分の積}{\Gamma_p(\text{abs. Frob.}(\frac{a}{n}))} \quad (p \mid n)$$

Archimedean case + p-adic case

予想 (p 進吉田予想, $\mathfrak{p}_\iota \nmid \mathfrak{f}$)

$$\Gamma(c,\iota;D,\mathfrak{a}_c) := \frac{\exp(X(c,\iota;D,\mathfrak{a}_c))}{\text{“CM 周期”}} \text{“}p\text{ 進 CM 周期”} \in B_{\mathrm{dR}}^\times/\mu_\infty$$

$$\Rightarrow \mathrm{abs.\ Frob.}(\Gamma(c,\iota;D,\mathfrak{a}_c)) \equiv \frac{\pi_{\mathfrak{p}_\iota}^{\frac{\zeta(0,[\mathfrak{p}_\iota]c)}{h_F^+}} \Gamma([\mathfrak{p}_\iota]c,\iota;D,\mathfrak{p}_\iota\mathfrak{a}_c)}{\prod_{\substack{\tilde{c}\in C_{\mathfrak{f}\mathfrak{p}_\iota} \\ \tilde{c}\mapsto[\mathfrak{p}_\iota]c\in C_\mathfrak{f}}} \exp_p(X_p(\tilde{c},\iota;D,\mathfrak{p}_\iota\mathfrak{a}_c))} \mod \mu_\infty.$$

- $F=\mathbb{Q}$ の場合は Coleman's formula から従う.
- 上記予想+ 吉田予想の精密化 $\Rightarrow$ Gross' conjecture.

c.f. $\{z\in\mathfrak{p}_\iota^{-1}\mathfrak{a}_c^{-1}\cap D \mid z\mathfrak{p}_\iota\mathfrak{a}_c \in [\mathfrak{p}_\iota]c\}$

$$= \{z\in\mathfrak{a}_c^{-1}\cap D \mid z\mathfrak{a}_c\in c\} \coprod \Big(\coprod_{\substack{\tilde{c}\in C_{\mathfrak{f}\mathfrak{p}_\iota} \\ \tilde{c}\mapsto[\mathfrak{p}_\iota]c\in C_\mathfrak{f}}} \{z\in\mathfrak{p}_\iota^{-1}\mathfrak{a}_c^{-1}\cap D \mid z\mathfrak{a}_c\mathfrak{p}_\iota\in\tilde{c}\}\Big).$$