数学特別講義 (数論 II)　多重ガンマ関数

東京理科大学 理工学部数学科 加塩朋和

E-mail : kashio_tomokazu@ma.noda.tus.ac.jp

概 要

2017 年度の京都大学集中講義用レジュメ (兼, 覚え書き): 総実体 F 上の法 $\mathfrak{f}$ の狭義イデアル類群 $C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_n}$ を考える．各イデアル類 $c \in C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_n}$ と実埋め込み $\iota \in \mathrm{Hom}(F,\mathbb{R})$ に対し, 不変量 $\exp(X(c,\iota))$ が, 多重ガンマ関数の特殊値と補正項の有限積で定義される．吉田予想は $\exp(X(c,\iota))$ の超越数部分を与えている．この講義では主に “単項関係式” $\prod_{i=1}^{k}\exp(X(c_i,\iota_i)) \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ を議論する．

参考文献

主となる参考書は

[Y] H. Yoshida, *Absolute CM-Periods*, Math. Surveys Monogr. **106**, Amer. Math. Soc., 2003.

である．また引用する虚数乗法論の知識のほとんどは以下に含まれる．

- G. Shimura, *Abelian varieties with complex multiplication and modular functions*, Princeton Math. Ser. **46**, Princeton Univ. Press, 1998.

整数論に関する知識は成書にゆずる．各自が読みやすいものを選ぶのが良いが, 例えば

- 加藤和也, 黒川信重, 斎藤毅, 数論 I - Fermat の夢と類体論, 岩波書店, 2005.
- 雪江明彦, 整数論 1, 2, 3, 日本評論社, 2013, 2014.

などがある．

目 次

1 Euler’s gamma function **3**
1.1 定義 3
1.2 関連する公式 4

2 multiple zeta and gamma functions 8
2.1 Barnes の多重ゼータ関数 8
2.2 Barnes の多重ガンマ関数 11

3 Shintani's zeta functions 12
3.1 定義 12
3.2 新谷ゼータ関数の特殊値 14

4 Shintani's formula 16

5 Cone decomposition 20
5.1 準備 20
5.2 新谷の基本領域 22
5.3 ゼータ関数と L 関数 23
5.4 総実体の部分ゼータ関数 27

6 Yoshida's class invariant 31
6.1 $G(c,\iota)$ 31
6.2 $W(c,\iota)$ 33
6.3 $V(c,\iota)$ 35
6.4 $X(c,\iota)$ 37
6.5 $F=\mathbb{Q}$ の場合 38
6.6 $[F:\mathbb{Q}]=2$ の場合 39
6.6.1 イデアル類群 39
6.6.2 $R(c,\boldsymbol{v}_j)$ 40
6.6.3 $G(c,\iota)$ 41
6.6.4 $W(c,\iota)$ 41
6.6.5 $V(c,\iota)$ 42
6.6.6 $\exp(X(c,\iota))$ 43

7 Stark conjecture 44
7.1 代数性 44
7.2 $F=\mathbb{Q}$ の場合 45
7.3 $[F:\mathbb{Q}]=2$ の場合 46

8 Monomial relations on multiple gamma functions. 48
8.1 $[F:\mathbb{Q}]=2$ の場合 48
8.2 一般の場合の証明のポイント 50
8.2.1 新谷の基本領域の "対称性" 50
8.2.2 V の取り扱い 50

9 Yoshida's conjecture **52**
9.1 CM 周期 . . . 52
9.2 吉田予想 . . . 55
9.3 考察 . . . 56

記号の説明

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots, \}$, $\mathbb{Z}_{\geq 0} := \{0, 1, 2, 3, \ldots, \}$, $\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$, $\mathbb{R}_{\geq 0} := [0, \infty)$.
- Re, Im: 実部, 虚部.
- $\otimes := \otimes_{\mathbb{Q}}$.
- $\overline{\mathbb{Q}} := \{z \in \mathbb{C} \mid \exists f(x) \in \mathbb{Q}[x], \neq 0 \text{ s.t. } f(z) = 0\}$: 代数的数全体のなす体, 有理数体の代数閉包.
- 有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大を代数体と呼ぶ. 任意の代数体を $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ の部分体とみなす. とくに $\mathrm{id} \in \mathrm{Hom}(F, \mathbb{C})$ が意味を持つ.
- 集合の非交和を $\coprod$ で表す.

1 Euler's gamma function

1.1 定義

定義 1. オイラーの <u>ガンマ関数</u> を

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt \quad (\mathrm{Re}(s) > 0)$$

で定める. この積分は $\mathrm{Re}(s) > 0$ で広義一様絶対収束する. よって同じ範囲で $\Gamma(s)$ は正則関数となる.

命題 2. (1) 関数等式 $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$ を満たす.

(2) $n \in \mathbb{N}$ に対し $\Gamma(n) = (n-1)!$.

証明. (1) 部分積分を考えて $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt = \left[\frac{t^s}{s} e^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{t^s}{s} e^{-t} dt = \frac{1}{s}\Gamma(s+1)$.
(2) (1) を使えば $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 1$ に帰着される. □

命題 3. $\Gamma(s)$ は全平面有理型に解析接続される. また $s = 0, -1, 2, \ldots$ のみに 1 位の極をもち, その留数は

$$\operatorname*{Res}_{s=-n} \Gamma(s) = \frac{(-1)^n}{n!} \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

となる.

証明. $\Gamma(s) := \frac{\Gamma(s+1)}{s}$ により帰納的に定義域を $\mathrm{Re}(s) > -n$ $(n = 1, 2, \dots)$ へ拡張できる. とくに

$$\Gamma(s) := \frac{\Gamma(s+n+1)}{s(s+1)\cdots(s+n)} \quad (\mathrm{Re}(s) > -(n+1))$$

である. $\mathrm{Re}(s) > -(n+1)$ で分子は正則なので, 極は分母から来るもの, すなわち $s = -0, -1, -2, \dots$ のみである. 留数は

$$\lim_{s\to -n}(s+n)\Gamma(s) = \lim_{s\to -n}\frac{\Gamma(s+n+1)}{s(s+1)\cdots(s+n-1)} = \frac{\Gamma(1)}{(-n)(1-n)\cdots(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

で求まる. □

注意 4. ガンマ関数にはいくつかの同値な定義がある.

(1) (Weierstrass.) $\displaystyle\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{\frac{-z}{n}}$ $(z \in \mathbb{C}, \neq 0, -1, -2, \dots)$. ただし $\gamma := \lim_{n\to\infty}((\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}) - \log n)$.

(2) (Bohr-Mollerup.) $\Gamma(z)$ $(z \in \mathbb{R}_+)$ は以下の 3 条件で特徴付けられる:

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \log(\Gamma(z)) \text{ は凸関数.}$$

1.2 関連する公式

定理 5. $x \in \mathbb{R}_+$ に対し Hurwitz ゼータ関数 を

$$\zeta(s, x) := \sum_{m=0}^{\infty}(x+m)^{-s} \quad (\mathrm{Re}(s) > 1)$$

で定める.

(1) 級数は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で広義一様絶対収束する. とくに同じ範囲で正則関数となる. さらに解析接続により, $s = 1$ でのみ高々 1 位の極をもつ全平面有理型関数となる.

(2) 次が成り立つ (Lerch の公式).

$$\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}} = \exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s, x)|_{s=0}\right).$$

証明. (1) は次節で, より一般の場合 (多重 version) で証明を行う. (2) は, 例えば [Y, p17] に Bohr-Mollerup の特徴付けを用いた証明がある. □

系 6 (multiplication formula)**.** $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right)}{\sqrt{2\pi}} = n^{\frac{1}{2}-nz}\frac{\Gamma(nz)}{\sqrt{2\pi}}.$$

課題 1. (1) $\zeta(s,x), \zeta(s,x+\frac{1}{n}), \ldots, \zeta(s,x+\frac{n-1}{n})$ と $\zeta(s,nx)$ の関係を簡潔に表せ.

(2) Lerch の公式から multiplication formula を導け.

定理 7 (Euler's reflection formula)**.**

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

証明の概略. いくつか証明方法がある. ガンマ関数の無限積表示と sin 関数の無限積表示 $\sin \pi z = \pi z \prod_{n \neq 0}(1-\frac{z}{n})e^{\frac{z}{n}}$ を比べると早い. □

系 8.

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

定理 9 (Chowla-Selberg formula)**.** 虚 2 次体 K に対し $p_K \in \mathbb{C}^\times/\overline{\mathbb{Q}}^\times$ を, 以下の同値な定義で定める.

(1) $K = \mathbb{Q}(\tau)$ $(\mathrm{Im}(\tau) > 0)$, $q := e^{2\pi i\tau}$, $\eta(\tau) := q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ とおくとき

$$p_K \equiv \eta(\tau)^2 \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times.$$

(2) $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義された楕円曲線 $E : y^2 = x^3 + ax + b$ $(a, b \in \overline{\mathbb{Q}})$ が K による虚数乗法をもつとする. E の不変微分形式 $\omega_E := \frac{dx}{y}$ と, $E(\mathbb{C})$ 内の閉曲線 γ で $\int_\gamma \omega_E \neq 0$ となるものに対して

$$p_K \equiv \pi^{-1} \int_\gamma \omega_E \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times.$$

このとき

$$p_K \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \prod_{\substack{a=1 \\ (a,d)=1}}^{d-1} \Gamma(\tfrac{a}{d})^{\frac{w\chi(\overline{a})}{4h}} \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times.$$

である. ここで $-d, h$ はそれぞれ K の判別式, 類数であり, w は K に含まれる 1 の冪根の個数, $\chi\colon (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times \to \{\pm 1\}$ は $K/\mathbb{Q}$ に対応する 2 次指標を表す.

証明の概略. 本来の Chowla-Selberg formula は η 関数の特殊値に関する等式である. p_K (の超越数部分) が K のみによるのは 虚数乗法論 による. □

注意 10. CM 体とよばれる代数体 K に対して p_K が定義される. 一般の Hilbert 保型形式の $\tau \in K$ での値や, K の代数的 Hecke 指標に付随する L 関数の critical value の超越数部分も p_K で表すことができる.

定理 11. ベータ関数を

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \quad (\mathrm{Re}(x), \mathrm{Re}(y) > 0)$$

で定義する．このとき

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

を満たす.

証明．興味深い別解もあるが, 計算のみでも示せる．実際

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{x-1}u^{y-1}e^{-(t+u)}dtdu$$

から, 変数変換 $t = pq$, $u = p(1-q)$ を行うと

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^\infty (pq)^{x-1}(p(1-q))^{y-1}e^{-p} \left|\det \left[\begin{smallmatrix} q & p \\ 1-q & -p \end{smallmatrix}\right]\right| dpdq \\
&= \int_0^1 \int_0^\infty p^{x+y-1}q^{x-1}(1-q)^{y-1}e^{-p}dpdq \\
&= \int_0^1 p^{x+y-1}e^{-p}dp \int_0^\infty q^{x-1}(1-q)^{y-1}dq = \Gamma(x+y)B(x,y)
\end{aligned}$$

となり, 題意を得る. □

具体例として $K = \mathbb{Q}(i)$ $(i = \sqrt{-1})$ の場合の $p_{\mathbb{Q}(i)}$ を考える．このとき

- $w = 4$, $h = 1$, $d = 4$.
- $\chi\colon (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times \to \{\pm 1\}$, $\chi(\overline{1}) = 1$, $\chi(\overline{3}) = -1$.

であるので, Chowla-Selberg formula は

$$p_{\mathbb{Q}(i)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})}$$

を言っている．一方で楕円曲線

$$E_1 : y^2 = x^3 - x$$

を考えると

$$\phi\colon E_1 \to E_1,\ (x,y) \mapsto (-x, iy)$$

は $\phi^4 = \mathrm{id}$ を満たす．このことから

$$\mathbb{Z}[i] \hookrightarrow \mathrm{End}(E_1)$$

が分かる．一般に

- 楕円曲線 E には群構造が入る．特に n 倍写像 $\in \mathrm{End}(E)$ $(n \in \mathbb{Z})$．すなわち

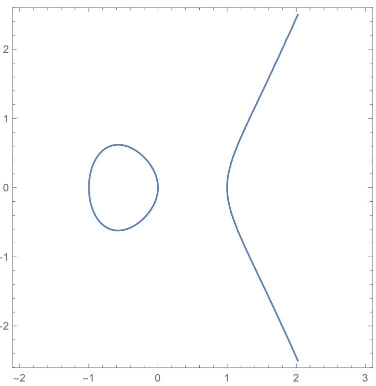
$$\mathbb{Z} \subset \mathrm{End}(E).$$

- 虚二次体 K の部分環 O で

$$\mathbb{Z} \subsetneq O \subset \mathrm{End}(E).$$

となるものが存在するとき E は K による虚数乗法をもつ，という．

とくに E_1 は $\mathbb{Q}(i)$ による虚数乗法を持つ．xy-平面で曲線 $y^2 = x^3 - x$ を考えると



となる．左の丸が $E_1(\mathbb{C})$ での (非自明な) 閉曲線を与えているので，これを γ とおく．このとき

$$\int_\gamma \omega_{E_1} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^3-x}} + \int_0^{-1} \frac{dx}{-\sqrt{x^3-x}} = 2\int_0^{-1} \frac{dx}{-\sqrt{x^3-x}} = \int_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{3}{4}}(1-t)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= B(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{3}{4})}$$

と書ける．ただし変数変換 $x = -\sqrt{t}$ を用いた．以上で $K = \mathbb{Q}(i)$ の場合の Chowla-Selberg formula が確かめられた．なお先のグラフの $y \to +\infty$ と $y \to -\infty$ は無限遠点 $(\in \mathbb{P}^2)$ でつながっており，やはり $E_1(\mathbb{C})$ での閉曲線を与えている．こちらで積分すると

$$\int_{\gamma'} \omega_{E_1} = \int_1^\infty \omega_{E_1} - \int_\infty^1 \omega_{E_1} = 2\int_1^\infty \omega_{E_1}$$

を求めることになるが，同じ結果となる．

課題 2. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ の場合の Chowla-Selberg formula を，同様に確かめてみよ．ただし

- $w = 6,\ h = 1,\ d = 3.$
- $\chi\colon (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times \to \{\pm 1\},\ \chi(\overline{1}) = 1,\ \chi(\overline{2}) = -1.$
- $E_2 : y^2 = x^3 - 1,\ \int_\gamma \omega_{E_2} = 2\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}.$

である．

課題 3. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-67})$ の場合の $p_{\mathbb{Q}(\sqrt{-67})}$ をベータ関数で書き下せ．(Chowla-Selberg formula は使ってよい.)

2 multiple zeta and gamma functions

2.1 Barnes の多重ゼータ関数

定義 12. $r \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_r) \in \mathbb{R}_+^r$, $x \in \mathbb{R}_+$ に対し, **Barnes の r 重ゼータ関数** を

$$\zeta_r(s, \boldsymbol{\omega}, x) := \sum_{\boldsymbol{m}=(m_1,\ldots,m_r)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^r} (x + \boldsymbol{m}\,{}^t\boldsymbol{\omega})^{-s} \quad (\mathrm{Re}(s) > r).$$

で定める. この級数は $\mathrm{Re}(s) > r$ で広義一様絶対収束し, 正則関数となる.

収束性の証明. $x, \omega > 0$, $\mathrm{Re}(s) > 1$ に対し

$$\begin{aligned}
\sum_{m\in\mathbb{N}} |(x+m\omega)^{-s}| &= \sum_{m\in\mathbb{N}} (x+m\omega)^{-\mathrm{Re}(s)} \\
&\leq \sum_{m\in\mathbb{N}} \int_{m-1}^{m} (x+t\omega)^{-\mathrm{Re}(s)} dt = \int_0^\infty (x+t\omega)^{-\mathrm{Re}(s)} dt \\
&= \frac{1}{\omega(1-\mathrm{Re}(s))} \left[(x+t\omega)^{1-\mathrm{Re}(s)}\right]_0^\infty = \frac{x^{1-\mathrm{Re}(s)}}{\omega(\mathrm{Re}(s)-1)}
\end{aligned}$$

である. なお途中の不等式は

$$t \leq m \Rightarrow x + t\omega \leq x + m\omega \Rightarrow (x+m\omega)^{-\mathrm{Re}(s)} \leq (x+t\omega)^{-\mathrm{Re}(s)}$$

による. よってとくに

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} |(x+m\omega)^{-s}| \leq x^{-\mathrm{Re}(s)} + \frac{x^{1-\mathrm{Re}(s)}}{\omega(\mathrm{Re}(s)-1)} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\omega(\mathrm{Re}(s)-1)}\right) x^{1-\mathrm{Re}(s)}$$

を得る. この評価を繰り返し用いて

$$\begin{aligned}
&\sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^r} |(x + \boldsymbol{m}\,{}^t\boldsymbol{\omega})^{-s}| \\
&\leq \sum_{(m_2,\ldots,m_r)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r-1}} \left(\tfrac{1}{x+m_2\omega_2+\cdots+m_r\omega_r} + \tfrac{1}{\omega_1(\mathrm{Re}(s)-1)}\right)(x+m_2\omega_2+\cdots+m_r\omega_r)^{1-\mathrm{Re}(s)} \\
&\leq \left(\tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{\omega_1(\mathrm{Re}(s)-1)}\right) \sum_{(m_2,\ldots,m_r)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r-1}} (x+m_2\omega_2+\cdots+m_r\omega_r)^{1-\mathrm{Re}(s)} \\
&\leq \cdots \leq \left(\tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{\omega_1(\mathrm{Re}(s)-1)}\right)\left(\tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{\omega_2(\mathrm{Re}(s)-2)}\right)\cdots\left(\tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{\omega_r(\mathrm{Re}(s)-r)}\right) x^{r-\mathrm{Re}(s)} < \infty.
\end{aligned}$$

よって Weierstrass の判定法より, $\mathrm{Re}(s) > r$ での広義一様絶対収束を得る. □

解析接続のために, 以下の "線積分" を考える:

定義 13. 複素平面上の積分路 L を, 以下の 3 つの和で定める:

$L_{\leftarrow}$: 実軸上を $+\infty$ から $\epsilon > 0$ まで動く.

$L_{\circlearrowleft}$: 原点中心半径 ϵ の円周を反時計回りする ($\epsilon + 0i$ が始点 = 終点).

$L_{\rightarrow}$: 実軸上を ϵ から $+\infty$ まで戻る.

また多価関数 $\log(-z)$ ($z \in \mathbb{C}^{\times}$) の分岐を以下で定める:

$z < 0$ のとき $\log(-z)$ は主値をとる. すなわち $-z \in \mathbb{R}_{+} \Rightarrow \log(-z) \in \mathbb{R}$.

注意 14. 線積分 $\int_L \cdots dz$ を考えるときには, 以下に注意せよ.

(1) $L_{\circlearrowleft}$ で z が反時計周りするとき, $-z$ も反時計回りし, 偏角 $\arg(-z)$ は 2π 増加する. したがって, $\log(-z)$ も最初 ($= \log(-\epsilon) = \log\epsilon - \pi i$) と最後 ($= \log(-\epsilon) = \log\epsilon + \pi i$) で $2\pi i$ 異なる.

(2) $L_{\leftarrow}$ の場合と $L_{\rightarrow}$ の場合では, 同じ z でも $\log(-z)$ の値が $2\pi i$ 異なる. より正確には $z \in (\epsilon, +\infty)$ に対し

- “$L_{\leftarrow}$ での $\log(-z)$” $= \log(z) - \pi i$.
- “$L_{\rightarrow}$ での $\log(-z)$” $= \log(z) + \pi i$.

(3) 同様に $(-z)^{s-1} := e^{(s-1)\log(-z)}$ は $z \in (\epsilon, +\infty)$ に対し

- “$L_{\leftarrow}$ での $(-z)^{s-1}$” $= e^{(s-1)(\log(z) - \pi i)} = z^{s-1}e^{-(s-1)\pi i}$.
- “$L_{\rightarrow}$ での $(-z)^{s-1}$” $= e^{(s-1)(\log(z) + \pi i)} = z^{s-1}e^{(s-1)\pi i}$.

定理 15. ϵ を十分小さくとり, 上で考えた積分路 L を考える.

(1) $\mathrm{Re}(s) > r$ に対し

$$\zeta_r(s, \boldsymbol{\omega}, x) = \frac{i\Gamma(1-s)}{2\pi}\int_L \frac{e^{-xz}}{\prod_{k=1}^{r}(1 - e^{-\omega_k z})}(-z)^{s-1}dz$$

が成り立つ. ただし $(-z)^{s-1} := e^{(s-1)\log(-z)}$ とおいた.

(2) (1) の右辺の積分部分は $\mathbb{C}$ 上広義一様絶対収束し, 正則関数になる. 右辺全体では全平面有理型であり $s = 1, 2, \ldots, r$ において高々 1 位の極をもつ.

以降, Barnes の多重ゼータ関数 $\zeta_r(s, \boldsymbol{\omega}, x)$ を (1) の右辺で再定義 (解析接続) する.

証明. L 上に被積分関数の極が来ないように ϵ を $\frac{2\pi}{\omega_k}$ ($k = 1, \ldots, r$) より小さくとる.

(1) まず

- $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^s e^{-t}\frac{dt}{t}$ ($\mathrm{Re}(s) > 0$).
- 変数変換 $t' = ct \Rightarrow \frac{dt'}{t'} = \frac{dt}{t}$ ($c \in \mathbb{R}^{\times}$, $c = (x + \boldsymbol{m}\,{}^t\boldsymbol{\omega})^{-1}$ として用いる).

- 等比級数の無限和の公式: $\sum_{m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} e^{a-bm} = \frac{e^a}{1-e^b}$ $(b>0$, 繰り返し用いる).

より

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}}(x+\boldsymbol{m}\,{}^t\boldsymbol{\omega})^{-s} &= \int_0^\infty \sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}} t^s (x+\boldsymbol{m}\,{}^t\boldsymbol{\omega})^{-s} e^{-t}\frac{dt}{t}\\ &= \int_0^\infty \sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}} t^s e^{-(x+\boldsymbol{m}\,{}^t\boldsymbol{\omega})t}\frac{dt}{t}\\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{\prod_{k=1}^r(1-e^{-\omega_k t})} t^{s-1}dt \quad (\mathrm{Re}(s)>r)\end{aligned}$$

を得る. なお被積分関数が $t=0$ 付近で $O(t^{\mathrm{Re}(s)-1-r})$ なので, この積分表示は $\mathrm{Re}(s)>r$ が必要である. 次に線積分 $\int_L \frac{e^{-xz}}{\prod_{k=1}^r(1-e^{-\omega_k z})}(-z)^{s-1}dz$ を計算する. $\int_L\cdots$ は $\epsilon\to 0$ で不変 ($\because$ 留数定理) であり, $\mathrm{Re}(s)>r$ のとき簡単な評価で $\int_{L_\circlearrowleft}\cdots\to 0$ $(\epsilon\to 0)$ が分かるので

$$\begin{aligned}\int_L \frac{e^{-xz}}{\prod_{k=1}^r(1-e^{-\omega_k z})}(-z)^{s-1}dz &= \int_0^\infty \frac{e^{-xz}z^{s-1}\left(e^{(s-1)\pi i}-e^{-(s-1)\pi i}\right)}{\prod_{k=1}^r(1-e^{-\omega_k z})}dz\\ &= 2i\sin((s-1)\pi)\int_0^\infty \frac{e^{-xz}z^{s-1}}{\prod_{k=1}^r(1-e^{-\omega_k z})}dz\end{aligned}$$

となる. これらと $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin(\pi s)}$, $\sin((s-1)\pi)=-\sin(s\pi)$ より題意を得る.

(2) $\mathrm{Re}(z)\to+\infty$ のときの収束性は e^{-xz} が急減少より従い, よって正則性が従う. とくに極は Γ-関数由来 $(s-1=0,-1,-2,\dots)$ のみであることが分かる. □

系 16. Barnes の多重ゼータ関数 の $s=0$ での特殊値は

$$\zeta_r(0,\boldsymbol{\omega},x)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{-xz}}{\prod_{k=1}^r(1-e^{-\omega_k z})}\frac{dz}{z}$$

で与えられる. とくに $x=\boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{\omega}$ $(\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_r)\in\mathbb{R}^r)$ の形で表した場合

$$\zeta_r(0,\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{\omega})=(-1)^r\sum_{l_1,\dots,l_r\in\mathbb{Z}_{\geq 0},l_1+\cdots+l_r=r}\omega_1^{l_1-1}\cdots\omega_r^{l_r-1}\frac{B_{l_1}(x_1)}{l_1!}\cdots\frac{B_{l_r}(x_r)}{l_r!}$$

となる. ここで $B_l(x)$ は, 次で定義される Bernoulli 多項式である:

$$\frac{e^{xt}}{e^t-1}=\sum_{l=0}^\infty\frac{B_l(x)}{l!}t^{l-1}.$$

証明. 被積分関数の $z=0$ での留数, すなわち $\frac{e^{-xz}}{\prod_{k=1}^r(1-e^{-\omega_k z})}$ のローラン展開の定数項を計算すればよい. 課題とする. □

課題 4. (1) Bernoulli 多項式の定義から $B_l(1-x)=(-1)^l B_l(x)$ を導け.

(2) 上の系を証明せよ.

注意 17. $\zeta_r(s,\boldsymbol{\omega},x)$ の定義, 性質および証明のテクニックは, Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)=\zeta_1(s,1,1)$ や Hurwitz ゼータ関数 $\zeta_1(s,1,x)=\zeta(s,x)$ の場合の一般化となっている.

2.2 Barnes の多重ガンマ関数

定義 18. <u>**Barnes の r 重ガンマ関数**</u> を

$$\Gamma_r(x,\boldsymbol{\omega}) := \exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta_r(s,\boldsymbol{\omega},x)|_{s=0}\right)$$

で定義する ($r \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1,\ldots,\omega_r) \in \mathbb{R}_+^r$, $x \in \mathbb{R}_+$). $\zeta_r(s,\boldsymbol{\omega},x)$ の線積分表示より

$$\log\Gamma_r(x,\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{-xz}}{\prod_{k=1}^r(1-e^{-\omega_k z})}\log(-z)\frac{dz}{z} + \gamma\zeta_r(0,\boldsymbol{\omega},x)$$

が分かる. ここで $\gamma := -\Gamma'(1)$ は Euler's constant.

注意 19. ここでの定義は Barnes の定義とは異なる: Barnes は

$$\rho_r(\boldsymbol{\omega}) := \exp\left(-\lim_{x\to+0}\left[\frac{d}{ds}\zeta_r(s,\boldsymbol{\omega},x)|_{s=0} + \log x\right]\right),$$
$$\frac{\Gamma_r(x,\boldsymbol{\omega})}{\rho_r(\boldsymbol{\omega})} := \exp\left(\frac{d}{ds}\zeta_r(s,\boldsymbol{\omega},x)|_{s=0}\right)$$

と二つの関数に分けて定義している.

命題 20. $x,\omega > 0$ に対し

$$\Gamma_1(x,\omega) = \frac{\omega^{\frac{x}{\omega}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(\tfrac{x}{\omega}).$$

証明. Lerch の公式より明らか. □

課題 5. (1) $\zeta_r(s,\boldsymbol{\omega},x) - \zeta_r(s,\boldsymbol{\omega},x+\omega_i)$ を簡潔に表せ.

(2) $\Gamma_r(x,\boldsymbol{\omega})/\Gamma_r(x+\omega_i,\boldsymbol{\omega})$ を簡潔に表せ.

課題 6. (1) $\zeta_r(s,(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_r),x) = \sum_{k=0}^{n-1}\zeta_r(s,(n\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_r),x+k\omega_1)$ が成り立つことを説明せよ.

(2) (1) を利用して multiplication formula の多重 version を与えよ.

3 Shintani's zeta functions

3.1 定義

定義 21. $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le r}}$ $(a_{ij} > 0)$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{R}^r_{\ge 0}, \ne \boldsymbol{0}$ に対し

$$\zeta(s, A, \boldsymbol{x}) := \sum_{\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{Z}^r_{\ge 0}} \left(\prod_{i=1}^n \sum_{j=1} a_{ij}(m_j + x_j) \right)^{-s}$$
$$= \sum_{\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^r_{\ge 0}} \left(\prod_{i=1}^n \boldsymbol{a}_i {}^t(\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x}) \right)^{-s} = \sum_{\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^r_{\ge 0}} \left(\prod_{i=1}^n (\boldsymbol{a}_i {}^t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}_i {}^t\boldsymbol{m}) \right)^{-s}$$

と定義し 新谷ゼータ関数 などと呼ぶ.

命題 22. 上の級数は $\mathrm{Re}(s) > \frac{r}{n}$ で広義一様絶対収束する. とくに同じ範囲で正則関数になる.

証明の概略. Barnes の多重ゼータ関数の場合と同様. $\square$

定理 23. $\zeta(s, A, \boldsymbol{x})$ は全平面有理型に解析接続され, とくに $s = 0$ で正則である.

証明. これまでと類似の議論を行う. 変数変換により

$$\Gamma(s)(\boldsymbol{a}_i {}^t(\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x}))^{-s} = \int_0^\infty t_i^{s-1} e^{-\boldsymbol{a}_i {}^t(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{x})t_i} dt_i$$

とできるので, n 個掛け合わせて

$$\Gamma(s)^n \left(\prod_{i=1}^n \boldsymbol{a}_i {}^t(\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x}) \right)^{-s} = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty (t_1 \cdots t_n)^{s-1} e^{-\sum_{i=1}^n \boldsymbol{a}_i {}^t(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{x})t_i} dt_1 \cdots dt_n.$$

この両辺で和 $\sum_{\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^r_{\ge 0}}$ を取り, 等比級数の和の公式を用いると

$$= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty (t_1 \cdots t_n)^{s-1} g(\boldsymbol{t}) dt_1 \cdots dt_n$$

の形になる. $g(\boldsymbol{t})$ $(\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_n))$ を具体的に求めると

$$\begin{aligned} \sum_{\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^r_{\ge 0}} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \boldsymbol{a}_i {}^t(\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x}) t_i \right) &= \sum_{\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^r_{\ge 0}} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r a_{ij}(m_j + x_j) t_i \right) \\ &= \sum_{\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^r_{\ge 0}} \prod_{j=1}^r \exp\left(-\left(\sum_{i=1}^n a_{ij} t_i \right) (m_j + x_j) \right) \\ &= \prod_{j=1}^r \sum_{m_j \in \mathbb{Z}_{\ge 0}} \exp\left(-\left(\sum_{i=1}^n a_{ij} t_i \right) (m_j + x_j) \right) \end{aligned}$$

なので, $\sum_{m_j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ に関しては初項 $\exp\left(-\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}t_i\right)x_j\right)$, 公比 $\exp\left(-\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}t_i\right)\right)$ の等比級数の和 $\frac{\exp\left(-\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}t_i\right)x_j\right)}{1-\exp\left(-\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}t_i\right)\right)} = \frac{\exp\left(\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}t_i\right)(1-x_j)\right)}{\exp\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}t_i\right)-1}$ が現れる. よって

$$g(\boldsymbol{t}) = \prod_{j=1}^r \frac{\exp\left(\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}t_i\right)(1-x_j)\right)}{\exp\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}t_i\right)-1}$$

である. 積分 $\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\cdots$ が収束するためには ($t_i\to+\infty$ に関しては $g(t)$ の分子が急減少なので問題ないが) $t_i\to 0$ に関して $\mathrm{Re}(s)>\frac{r}{n}$ が必要である. 以下, 任意の s での収束性を得るために, 線積分に変形する. まず

- $\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty$ の積分領域を

$$\mathbb{R}_+^n = \coprod_{i=1}^n D_i, \quad D_i := \{(t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}_+^n \mid t_1,\ldots,t_{i-1},t_{i+1},\ldots,t_n \leq t_i\}$$

  と分割する.

- $(t_1,\ldots,t_n)\in D_i$ に対し変数変換 $y=t_i$, $u_l=t_l/t_i$ $(l\neq i)$ を行う.

すると $\boldsymbol{u}^{(i)}=(u_1,\ldots,u_{i-1},1,u_{i+1},\ldots,u_n)$ とおいて

$$\begin{aligned}\Gamma(s)^n\zeta(s,A,\boldsymbol{x}) &= \sum_{i=1}^n\int_{D_i}(t_1\cdots t_n)^{s-1}g(\boldsymbol{t})dt_1\cdots dt_n\\ &= \sum_{i=1}^n\int_0^\infty\int_{[0,1]^n} g(y\boldsymbol{u}^{(i)})\left(\prod_{l\neq i}u_l^{s-1}\right)y^{ns-1}\left(\prod_{l\neq i}du_l\right)dy\end{aligned}$$

と表せる. 次に 2 種類の積分路 L_* $(*=1,\infty)$ を以下の 3 つの和で定める:

$L_{*,\leftarrow}$: 実軸上を $*$ から $\epsilon>0$ まで動く.

$L_{\circlearrowleft}$: 原点中心半径 ϵ の円周を反時計回りする ($\epsilon+0i$ が始点 = 終点).

$L_{*,\rightarrow}$: 実軸上を ϵ から $*$ まで戻る.

さらに $z\in L_*$ に対し $\log(-z)$ の分岐と $(-z)^{s-1}$ を

$$\begin{aligned}\log(-(-\epsilon)) &:= \log(\epsilon)\in\mathbb{R},\\ (-z)^{s-1} &:= \exp((s-1)\log(-z))\end{aligned}$$

で定める. このとき ϵ を (注意深く) 十分小さくとれば

$$\begin{aligned}&\int_{L_\infty}\int_{L_1^{n-1}} g(y\boldsymbol{u}^{(i)})\left(\prod_{l\neq i}(-u_l)^{s-1}\right)(-y)^{ns-1}\left(\prod_{l\neq i}du_l\right)dy\\ &= C\cdot\int_0^\infty\int_{(0,1]^{n-1}} g(y\boldsymbol{u}^{(i)})\left(\prod_{l\neq i}u_l^{s-1}\right)y^{ns-1}\left(\prod_{l\neq i}du_l\right)dy \quad (\mathrm{Re}(s)>\tfrac{r}{n})\end{aligned}$$

とかける. ここで C は $L_{*,\rightarrow}$ と $L_{*,\leftarrow}$ での $\frac{(-u_l)^{s-1}}{u_l^{s-1}}, \frac{(-y)^{ns-1}}{y^{ns-1}}$ の差が掛け合わさって

$$C = (e^{(s-1)\pi i} - e^{-(s-1)\pi i})^{n-1}(e^{(ns-1)\pi i} - e^{-(ns-1)\pi i}) = (-2i)^n \sin^{n-1}(s\pi)\sin(ns\pi)$$

となる. Euler's reflection formula も使って, 結局

$$\begin{aligned}&\zeta(s, A, \boldsymbol{x})\\ &= \frac{\Gamma(1-s)^n \sin(\pi s)}{(-2\pi i)^n \sin(n\pi s)} \sum_{i=1}^{n} \int_{L_\infty} \int_{L_1^{n-1}} g(t\boldsymbol{u}^{(i)}) \left(\prod_{l\neq i} (-u_l)^{s-1}\right) (-t)^{ns-1} \left(\prod_{l \neq i} du_l\right) dt\end{aligned}$$

と書ける. 右辺の積分部分は全平面で広義一様絶対収束するので, 同じ範囲で正則である. □

課題 7. $\zeta(s, A, \boldsymbol{x})$ の極の位置を特定せよ.

3.2 新谷ゼータ関数の特殊値

定理 24.

$$\begin{aligned}\zeta(0, A, \boldsymbol{x}) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \zeta_r(0, \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{a}_i)\\ &= \frac{(-1)^r}{n}\sum_{i=1}^{n} \sum_{l_1,\dots,l_r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, l_1+\cdots+l_r=r} a_{i1}^{l_1-1}\cdots a_{ir}^{l_r-1}\frac{B_{l_1}(x_1)}{l_1!}\cdots\frac{B_{l_r}(x_r)}{l_r!}.\end{aligned}$$

証明. 上で得た線積分表示に $s=0$ を代入して

$$\begin{aligned}&\zeta(0, A, \boldsymbol{x})\\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_{i=1}^{n} \int_{L_\infty}\int_{L_1^{n-1}} g(t\boldsymbol{u}^{(i)}) \left(\prod_{l\neq i} u_l^{-1}\right) t^{-1} \left(\prod_{l\neq i} du_l\right) dt\end{aligned}$$

を得る. 一般に有理型関数 $f(z)$ に対し

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{\circlearrowleft}} f(z)\frac{dz}{z} = \operatorname*{Res}_{z=0}\frac{f(z)}{z} = f(z) \text{ の定数項}$$

である ($\because$ 留数定理). $\int_{L_1^{n-1}}\cdots\prod_{l\neq i}\frac{du_l}{u_l}$ に使えば

$$\zeta(0, A, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi i)}\sum_{i=1}^{n}\int_{L_\infty} g(t\boldsymbol{u}^{(i)})|_{u_1=0,\dots,u_{i-1}=0,u_{i+1}=0,\dots,u_n=0}\frac{dt}{t}$$

となる. 積分の中身を計算すると

$$
\begin{aligned}
&g(t\boldsymbol{u}^{(i)})|_{u_1=0,\dots,u_{i-1}=0,u_{i+1}=0,\dots,u_n=0} \\
&= g(\boldsymbol{t})|_{t_1=0,\dots,t_{i-1}=0,t_i=t,t_{i+1}=0,\dots,t_n=0} \\
&= \prod_{j=1}^{r} \frac{\exp(a_{ij}t(1-x_j))}{\exp a_{ij}t - 1} = \prod_{j=1}^{r} \frac{\exp(a_{ij}x_jt)}{1-\exp(-a_{ij}t)}
\end{aligned}
$$

であり, これは

$$
\zeta_r(0, \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{a}_i) = \frac{1}{(2\pi i)} \int_{L_\infty} \prod_{j=1}^{r} \frac{\exp(a_{ij}x_jt)}{1-\exp(-a_{ij}t)} \frac{dt}{t}
$$

の中身と一致している. □

注意 25. 行列 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$ に付随する多重ゼータ関数 $\zeta(s, A, \boldsymbol{x})$ の $s = 0$ での特殊値が, ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ に付随する多重ゼータ関数 $\zeta_r(s, \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{a}_i)$ の $s = 0$ での特殊値に "分解" しているのは, 興味深い現象である. 次節では, $s = 0$ での微分値でも類似の現象が起きていることをみる.

4 Shintani's formula

この節では以下の主張を証明する.

$$\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,A,\boldsymbol{x})|_{s=0}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial s}\zeta_r(s,\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{a}_i)|_{s=0}+\text{“elementary functions”}.$$

まず $\zeta(s,A,\boldsymbol{x})$ の線積分表示を微分して

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,A,\boldsymbol{x})|_{s=0}&=\frac{\gamma}{(2\pi i)^n}\sum_{i=1}^{n}\int_{L_\infty}\int_{L_1^{n-1}}g(t\boldsymbol{u}^{(i)})\left(\prod_{l\neq i}\frac{du_l}{u_l}\right)\frac{dt}{t}\\&+\frac{1}{n(2\pi i)^n}\sum_{i=1}^{n}\int_{L_\infty}\int_{L_1^{n-1}}g(t\boldsymbol{u}^{(i)})\left(\sum_{l\neq i}\log(-u_l)+n\log(-t)\right)\left(\prod_{l\neq i}\frac{du_l}{u_l}\right)\frac{dt}{t}\end{aligned}$$

となる. 上段は $n\gamma\zeta(0,A,\boldsymbol{x})\overset{\text{定理 }24}{=}\gamma\sum_{i=1}^{n}\zeta_r(0,\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{a}_i)$ とも書ける. 下段の各 i-成分をさらに

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{L_\infty}\int_{L_1^{n-1}}g(t\boldsymbol{u}^{(i)})\log(-t)\left(\prod_{l\neq i}\frac{du_l}{u_l}\right)\frac{dt}{t}\\&\quad+\frac{1}{n(2\pi i)^n}\sum_{k\neq i}\int_{L_\infty}\int_{L_1^{n-1}}g(t\boldsymbol{u}^{(i)})\log(-u_k)\left(\prod_{l\neq i}\frac{du_l}{u_l}\right)\frac{dt}{t}\end{aligned}$$

と分割する. 被積分関数に多価関数 $\log(-z)$ がなければ $\int_{L_1}\cdots dz=\int_{L_\circlearrowleft}\cdots dz$ であるから, 留数定理により

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi i)^{n-1}}\int_{L_1^{n-1}}g(t\boldsymbol{u}^{(i)})\prod_{l\neq i}\frac{du_l}{u_l}&=\frac{1}{(2\pi i)^{n-1}}\int_{L_\circlearrowleft^{n-1}}g(t\boldsymbol{u}^{(i)})\prod_{l\neq i}\frac{du_l}{u_l}\\&=g(\boldsymbol{t})|_{t_1=0,\dots,t_{i-1}=0,t_i=t,t_{i+1}=0,\dots,t_n=0}\\&=\prod_{j=1}^{r}\frac{\exp\left((a_{ij}t)\left(1-x_j\right)\right)}{\exp\left(a_{ij}t\right)-1}=\frac{\exp\left(-t\sum_{j=1}^{r}a_{ij}x_j\right)}{\prod_{j=1}^{r}\left(1-\exp\left(-a_{ij}t\right)\right)}\end{aligned}$$

となるので

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{L_\infty}\int_{L_1^{n-1}}g(t\boldsymbol{u}^{(i)})\log(-t)\left(\prod_{l\neq i}\frac{du_l}{u_l}\right)\frac{dt}{t}=\log\Gamma_r(\boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_i)-\gamma\zeta_r(0,\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{a}_i)$$

である. $\zeta_r(0,\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{a}_i)$ は打ち消しあって

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,A,\boldsymbol{x})|_{s=0}&=\sum_{i=1}^{n}\log\Gamma_r(\boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_i)\\&+\frac{1}{n(2\pi i)^n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\neq i}\int_{L_\infty}\int_{L_1^{n-1}}g(t\boldsymbol{u}^{(i)})\log(-u_k)\left(\prod_{l\neq i}\frac{du_l}{u_l}\right)\frac{dt}{t}\end{aligned}$$

となった. 以下, この表示の下段を書き下す. $\int_{L_1}\cdots\frac{du_l}{u_l}=\int_{L_{\circlearrowleft}}\cdots\frac{du_l}{u_l}$ $(l\neq i,k)$ の積分を留数定理で求めて

$$\begin{aligned}
J_{ik}&:=\frac{1}{n(2\pi i)^n}\int_{L_\infty}\int_{L_1^{n-1}}g(t\boldsymbol{u}^{(i)})\log(-u_k)\left(\prod_{l\neq i}\frac{du_l}{u_l}\right)\frac{dt}{t}\\
&=\frac{1}{n(2\pi i)^2}\int_{L_\infty}\int_{L_1}g(t\boldsymbol{u}^{(i)})|_{u_l=0\ (l\neq i,k)}\log(-u_k)\frac{du_k}{u_k}\frac{dt}{t}\\
&=\frac{1}{n(2\pi i)^2}\int_{L_\infty}\int_{L_1}g_{ik}(t,u)\log(-u)\frac{du}{u}\frac{dt}{t}\\
&=\frac{1}{n(2\pi i)^2}\int_{L_\infty}\int_{L_1}(g_{ik}(t,u)-g_{ik}(t,0))\log(-u)\frac{du}{u}\frac{dt}{t}
\end{aligned}$$

となる. ただし

$$g_{ik}(t,u_k):=g(t\boldsymbol{u}^{(i)})|_{u_l=0\ (l\neq i,k)}=\prod_{j=1}^{r}\frac{e^{t(a_{ij}+a_{kj}u_k)(1-x_j)}}{e^{t(a_{ij}+a_{kj}u_k)}-1}$$

と置き, $u_k=u$ と置き直した. 最後の変形は

$$\begin{aligned}
&\int_{L_1}g_{ik}(t,0)\log(-u)\frac{du}{u}=g_{ik}(t,0)\int_{L_1}\log(-u)\frac{du}{u},\\
&\int_{L_{\circlearrowleft}}\log(-u)\frac{du}{u}\overset{u=\epsilon e^{i\theta}}{=}\int_0^{2\pi}(\log(\epsilon)+i(\theta-\pi))id\theta=2\pi i\log(\epsilon),\\
&\int_{L_{1,\leftarrow}\cup L_{1,\rightarrow}}\log(-u)\frac{du}{u}=2\pi i\int_\epsilon^1\frac{du}{u}=-2\pi i\log(\epsilon)
\end{aligned}$$

による. 次に $\int_{L_\infty}\cdots\frac{dt}{t}=\int_{L_{\circlearrowleft}}\cdots\frac{dt}{t}$ を留数定理で求める.

$$g_{ik}(t,u)-g_{ik}(t,0)=\prod_{j=1}^{r}\sum_{l_j=0}^{\infty}\frac{B_{l_j}(1-x_j)}{l_j!}((a_{ij}+a_{kj}u)t)^{l_j-1}-\prod_{j=1}^{r}\sum_{l_j=0}^{\infty}\frac{B_{l_j}(1-x_j)}{l_j!}(a_{ij}t)^{l_j-1}$$

の t に関する定数項は

$$\sum_{l_1,\ldots,l_r\in\mathbb{Z}_{\geq 0},l_1+\cdots+l_r=r}\prod_{j=1}^{r}\frac{B_{l_j}(1-x_j)}{l_j!}\left(\prod_{j=1}^{r}(a_{ij}+a_{kj}u)^{l_j-1}-\prod_{j=1}^{r}a_{ij}^{l_j-1}\right)$$

なので

$$J_{ik}=\sum_{l_1,\ldots,l_r\in\mathbb{Z}_{\geq 0},l_1+\cdots+l_r=r}\prod_{j=1}^{r}\frac{B_{l_j}(1-x_j)}{n(2\pi i)(l_j!)}\int_{L_1}\left(\prod_{j=1}^{r}(a_{ij}+a_{kj}u)^{l_j-1}-\prod_{j=1}^{r}a_{ij}^{l_j-1}\right)\log(-u)\frac{du}{u}$$

を得る. $\left(\prod_{j=1}^{r}(a_{ij}+a_{kj}u)^{l_j-1}-\prod_{j=1}^{r}a_{ij}^{l_j-1}\right)u^{-1}$ が $u=0$ で正則 (とくに $u=0$ 付近で有界) なので

$$\int_{L_{\circlearrowleft}}\left(\prod_{j=1}^{r}(a_{ij}+a_{kj}u)^{l_j-1}-\prod_{j=1}^{r}a_{ij}^{l_j-1}\right)\log(-u)\frac{du}{u}=O(\epsilon\log(\epsilon)),\ \text{とくに}\ \to 0\quad(\epsilon\to 0).$$

$B_l(1-x) = (-1)^l B_l(x)$ に注意して, 結局

$$J_{ik} = \frac{(-1)^r}{n} \sum_{l_1,\dots,l_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, l_1+\cdots+l_r=r} \prod_{j=1}^{r} \frac{B_{l_j}(x_j)}{l_j!} \int_0^1 \left(\prod_{j=1}^{r} (a_{ij} + a_{kj}u)^{l_j-1} - \prod_{j=1}^{r} a_{ij}^{l_j-1} \right) \frac{du}{u}$$

という表記を得る. 以上を一旦定理としてまとめる.

定理 26 (Shintani's formula)**.**

$$C_{\boldsymbol{l},j,k}(A) := \int_0^1 \left(\prod_{i=1}^{r} (a_{ji} + a_{ki}u)^{l_i-1} - \prod_{i=1}^{r} a_{ji}^{l_i-1} \right) \frac{du}{u},$$
$$C_{\boldsymbol{l}}(A) := \sum_{1 \leq j,k \leq n, j \neq k} C_{\boldsymbol{l},j,k}(A)$$

とおく. このとき

$$\frac{\partial}{\partial s} \zeta(s, A, \boldsymbol{x})|_{s=0} = \sum_{i=1}^{n} \log \Gamma_r(\boldsymbol{x}\, {}^t\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i) + \frac{(-1)^r}{n} \sum_{|\boldsymbol{l}|=r} C_{\boldsymbol{l}}(A) \prod_{j=1}^{r} \frac{B_{l_j}(x_j)}{l_j!}.$$

ただし $\sum_{|\boldsymbol{l}|=r} := \sum_{l_1,\dots,l_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, l_1+\cdots+l_r=r}$ とおいた.

$C_{\boldsymbol{l}}(A)$ の部分は, さらに以下のように "elementary function" で書ける.

補題 27. $\boldsymbol{l} = (l_1, \dots, l_r)$ は $l_1, \dots, l_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, l_1 + \cdots + l_r = r$ を満たすとし

$$T_1(\boldsymbol{l}) := \{m \mid 1 \leq m \leq r,\ l_m > 0\}, \quad T_2(\boldsymbol{l}) := \{m \mid 1 \leq m \leq r,\ l_m = 0\}$$

とおく. 仮定

$$\text{Assump.} \quad p, q \in T_2(\boldsymbol{l}),\ p \neq q \Rightarrow a_{kp}a_{jp} - a_{kq}a_{jp} \neq 0$$

の元で

$$C_{\boldsymbol{l},j,k}(A) = -\sum_{p \in T_2(\boldsymbol{l})} \frac{1}{a_{jp}a_{kp}} \frac{\prod_{i \in T_1(\boldsymbol{l})} (a_{ji}a_{kp} - a_{jp}a_{ki})^{l_i-1}}{\prod_{q \in T_2(\boldsymbol{l}), q \neq p} (a_{jq}a_{kp} - a_{jp}a_{kq})} \log\left(1 + \frac{a_{kp}}{a_{jp}}\right),$$
$$C_{\boldsymbol{l},j,k}(A) + C_{\boldsymbol{l},k,j}(A) = \sum_{p \in T_2(\boldsymbol{l})} \frac{1}{a_{jp}a_{kp}} \frac{\prod_{i \in T_1(\boldsymbol{l})} (a_{ji}a_{kp} - a_{jp}a_{ki})^{l_i-1}}{\prod_{q \in T_2(\boldsymbol{l}), q \neq p} (a_{jq}a_{kp} - a_{jp}a_{kq})} \log\left(\frac{a_{jp}}{a_{kp}}\right).$$

証明. $C_{\boldsymbol{l},j,k}(A)$ の被積分関数は u の有理関数であり

$$\frac{\prod_{m \in T_1(\boldsymbol{l})} (a_{km}u + a_{jm})^{l_m-1} - \prod_{m=1}^{r} a_{jm}^{l_m-1} \prod_{m \in T_2(\boldsymbol{l})} (a_{km}u + a_{jm})}{u \prod_{m \in T_2(\boldsymbol{l})} (a_{km}u + a_{jm})}$$

と書ける.

- Assump より, 分母は互いに素な $|T_2(\boldsymbol{l})|$ 個の 1 次式と u の積.
- 分子は, 次数が $\sum_{m\in T_1(\boldsymbol{l})}(l_m-1)=|T_2(\boldsymbol{l})|$ の多項式で, 定数項は 0.

であるから, 分母分子を u で割った後

$$=\sum_{m\in T_2(\boldsymbol{l})}\frac{r_m}{a_{km}u+a_{jm}}\quad (r_m\in\mathbb{R})$$

の形に分解できる. r_m を求めるには $\lim_{u\to-\frac{a_{jm}}{a_{km}}}(a_{km}u+a_{jm})\times\cdots$ を計算すればよいから

$$r_m=-\frac{1}{a_{jm}}\frac{\prod_{i\in T_1(\boldsymbol{l})}(a_{ji}a_{km}-a_{jm}a_{ki})^{l_i-1}}{\prod_{q\in T_2(\boldsymbol{l}),q\neq m}(a_{jq}a_{km}-a_{jm}a_{kq})}$$

を得る. これと

$$\int_0^1\frac{du}{a_{km}u+a_{jm}}=\frac{1}{a_{km}}\log\left(1+\frac{a_{km}}{a_{jm}}\right)$$

を合わせて題意の前半を得る. 後半は前半よりただちに従う. □

5 Cone decomposition

この節では, 新谷氏によるコーン分解のテクニックを紹介する. これは (総実) 代数体の Dedekind ゼータ関数 や Hecke L 関数 の記述に応用することができる. その結果 Barnes の多重ガンマ関数と総実体の整数論をつなぐことにもなる.

5.1 準備

定義 28. (1) $\mathbb{Q}$ 上有限次元の拡大体 $F \subset \mathbb{C}$ を 代数体 と呼ぶ. また, 拡大次数 $[F:\mathbb{Q}] = \dim_{\mathbb{Q}} F$ を代数体 F の次数と呼ぶ.

(2) 代数体 F の 整数環, 単数群 を

$$\mathcal{O}_F := \{\alpha \in F \mid \exists f(x) = x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_n \in \mathbb{Z}[x] \text{ s.t. } f(\alpha) = 0\},$$
$$E_F := \mathcal{O}_F^\times$$

で定める. 整数環は F の部分環であり, 階数 $[F:\mathbb{Q}]$ の自由 $\mathbb{Z}$ 加群になることが知られている.

(3) 代数体 F から $\mathbb{C}$ への埋め込み (単射環準同型写像) 全体のなす集合を $\mathrm{Hom}(F,\mathbb{C})$ で表し, F の 実素点 の集合, 複素素点 の集合をそれぞれ

$$H_1 := \{\iota \in \mathrm{Hom}(F,\mathbb{C}) \mid \iota(F) \subset \mathbb{R}\}, \quad H_2 := \{\iota \in \mathrm{Hom}(F,\mathbb{C}) \mid \iota(F) \not\subset \mathbb{R}\}/\sim$$

で定める. ただし複素共役写像 ρ に対し

$$\iota \sim \iota' \overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} \iota' = \rho \circ \iota$$

と定める. また

$$r_1 := |H_1|, \quad r_2 := |H_2|$$

とおく. なお, 実素点, 複素素点を合わせて無限素点と呼び, $\infty_1, \infty_2, \infty_3, \ldots$ などの記号をあてる.

(4) $[F:\mathbb{Q}] = r_1$ のとき F は 総実体, $[F:\mathbb{Q}] = 2r_2$ のとき F は 総虚体 と呼ばれる (一般に $r_1 + 2r_2 = [F:\mathbb{Q}]$ を満たす).

(5) 代数体 F に対し

$$F_+ := \{\alpha \in F \mid \forall \iota \in H_1,\ \iota(\alpha) > 0\}$$

とおく. $\alpha \in F_+$ の元は 総正 である, などという. さらに

$$\mathcal{O}_{F,+} := \mathcal{O}_F \cap F_+, \quad E_{F,+} := E_F \cap F_+$$

などとおく.

定理 29 (Dirichlet's unit theorem)**.** F を代数体とし, 1 の冪根の個数, 実素点, 複素素点の個数をそれぞれ w, r_1, r_2 とおく. このとき

$$E_F \cong \mathbb{Z}/w\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{r_1+r_2-1}.$$

系 30. F が総実代数体であれば

$$E_{F,+} \cong \mathbb{Z}^{[F:\mathbb{Q}]-1}.$$

いくつか具体例を挙げる:

$F = \mathbb{Q}$ のとき

- $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Z}$.
- $H_1 = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{C}) = \{\mathrm{id}\}$.
- $r_1 = 1$, $r_2 = 0$.
- $E_{\mathbb{Q}} = \{\pm 1\}$, $E_{\mathbb{Q},+} = \{1\}$.

$F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ のとき

- $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})} = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
- $H_1 = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{C}) = \{\iota_\pm \colon \sqrt{2} \mapsto \pm\sqrt{2}\}$.
- $r_1 = 2$, $r_2 = 0$.
- $E_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})} = \{\pm(1+\sqrt{2})^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $E_{\mathbb{Q}(\sqrt{2}),+} = \{(1+\sqrt{2})^{2n} = (3+2\sqrt{2})^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

$F = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ のとき

- $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})} = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$.
- $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}(\sqrt{-1}), \mathbb{C}) = \{\mathrm{id}, \rho \colon \sqrt{-1} \mapsto -\sqrt{-1}\}$.
- $r_1 = 0$, $r_2 = 1$.
- $E_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1}),+} = E_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})} = \{\pm 1, \pm\sqrt{-1}\}$.

5.2 新谷の基本領域

定義 31. (1) 一次独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$C(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r) := \{t_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + t_r\boldsymbol{v}_r \mid t_i \in \mathbb{R}_+\}$$

を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ を基底とする (r-次元開単体的) **<u>cone</u>** と呼ぶ.

(2) n 次の総実体 F に対し $H_1 = \{\iota_1, \ldots, \iota_n\}$ の順番を固定して

$$F \otimes \mathbb{R} \overset{\cong}{\to} \mathbb{R}^n, \quad \alpha \otimes x \mapsto (\iota_1(\alpha)x, \ldots, \iota_n(\alpha)x)$$

と同一視する. $\mathbb{R}^n$ の cone で, 基底が全て F $(\subset F \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}^n)$ に含まれるものを F の cone と呼ぶ. なお基底を自然数倍しても cone は不変なので, 基底は $\mathcal{O}_F$ の元としても良い.

(3) (2) と同じ同一視 $F \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ において $\mathbb{R}_+^n$ に対応する部分集合を $F \otimes \mathbb{R}_+$ で表す.

定理 32. F を n 次総実代数体とし, 次の作用を考える:

$$E_{F,+} \curvearrowright F \otimes \mathbb{R}_+, \quad u \in E_{F,+}, \alpha \otimes x \in F \otimes \mathbb{R}_+, \ u(\alpha \otimes x) := (u\alpha) \otimes x.$$

このとき, 商 $F \otimes \mathbb{R}_+/E_{F,+}$ の基本領域 (完全代表系) D として, 有限個の F の cone の非交和として書けるものが取れる. すなわち

$$\begin{aligned}&\exists v_{ij} \in \mathcal{O}_{F,+} \ (j \in J, 1 \leq i \leq r(j), |J| < \infty, r(j) \in \mathbb{N})\\ &\text{s.t. } F \otimes \mathbb{R}_+ = \coprod_{u \in E_{F,+}} uD, \quad D = \coprod_{j \in J} C(v_{j1}, \ldots, v_{jr(j)}).\end{aligned}$$

このような D を, 総実体 F の <u>新谷の基本領域</u> と呼ぶことにする.

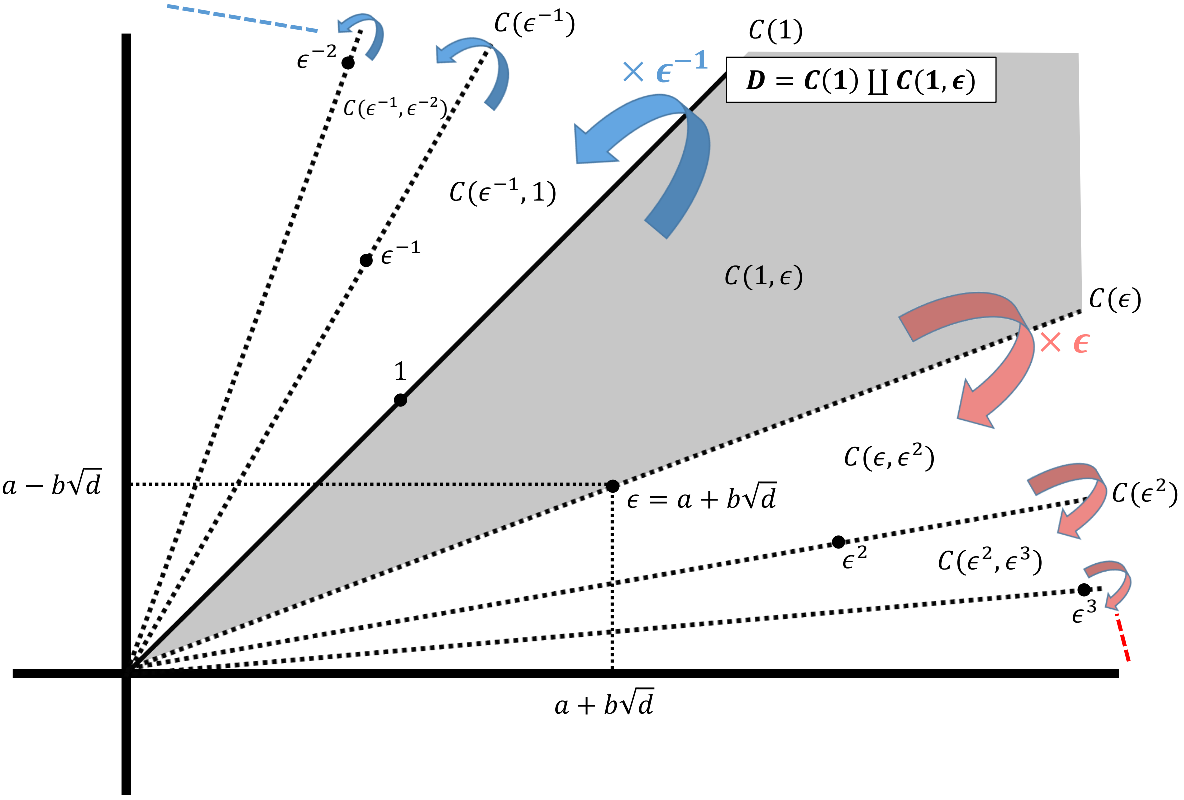
いくつか具体例を挙げる:

$F = \mathbb{Q}$ のとき

- $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+$, $E_{\mathbb{Q},+} = \{1\}$.
- $D = C(1) = \mathbb{R}_+ = \mathbb{Q} \otimes \mathbb{R}_+/E_{\mathbb{Q},+}$.

$F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $[F : \mathbb{Q}] = 2$ のとき

- $F \otimes \mathbb{R}_+ \cong \mathbb{R}_+^2$, $(a + b\sqrt{d}) \otimes 1 \mapsto (a + b\sqrt{d}, a - b\sqrt{d})$, $E_{F,+} = \langle \exists\epsilon \rangle$.
- $D = C(1) \coprod C(1, \epsilon)$, $F \otimes \mathbb{R}_+ = \coprod_{n \in \mathbb{Z}} \epsilon^n D$.



5.3 ゼータ関数と L 関数

命題 33. F を代数体とする．整数環のイデアル $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_F, \neq (0)$ と，元 $\alpha \in F, \neq 0$ の積として表せる F の部分加群

$$\alpha\mathfrak{a} = \{\alpha a \in F \mid a \in \mathfrak{a}\}$$

を F の **分数イデアル** と呼ぶ．区別するために，通常のイデアル $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_F, \neq (0)$ は **整イデアル** と呼ぶ．

(1) 分数イデアル $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset F$ の積イデアルを

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} := \{\sum_{i=1}^{k} a_i b_i \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ a_i \in \mathfrak{a},\ b_i \in \mathfrak{b}\}$$

で定義する．積 $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ は F の分数イデアルとなり，分数イデアル全体のなす集合 I_F は，この積を演算として群となる．とくに

(a) I_F の単位元は $(1) = \mathcal{O}_F$.

(b) 分数イデアル $\mathfrak{a} \in I_F$ の逆元は

$$\mathfrak{a}^{-1} = \{\alpha \in F \mid \alpha\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_F\}$$

で与えられる．

(2) $\mathcal{O}_F$ は Dedekind 整域と呼ばれる性質を満たす．とくに 素イデアル分解の一意性 が成り立つ．すなわち

$$\mathfrak{a} \in I_F \Rightarrow \text{互いに異なる素イデアル } \mathfrak{p}_i \text{ と整数 } e_i \neq 0 \text{ が存在して}$$
$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{e_r} \text{ の形に積の順番を除いて一意的に書ける.}$$

証明に関して．Dedekind 環論による．省略． □

例えば $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ に対して

- 整数環は $\mathcal{O}_F = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
- $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ は一意分解整域ではなく, 素因数分解できない．例えば 6 は

$$6 = 2 * 3 = (1 + \sqrt{-5}) * (1 - \sqrt{-5})$$

  というように, 既約元 $2, 3, (1 + \sqrt{-5}), (1 - \sqrt{-5})$ の積として二通りに表せる．

- 一方で単項イデアル $(6) = 6\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ は

$$(6) = (2, 1 + \sqrt{-5})(2, 1 - \sqrt{-5})(3, 1 + \sqrt{-5})(3, 1 - \sqrt{-5})$$

  というように素イデアル $(2, 1 + \sqrt{-5}), (2, 1 - \sqrt{-5}), (3, 1 + \sqrt{-5}), (3, 1 - \sqrt{-5})$ の積として一意的に書ける．実際

$$\begin{aligned}
&(2, 1 + \sqrt{-5})(2, 1 - \sqrt{-5}) = (4, 2 + 2\sqrt{-5}, 2 - 2\sqrt{-5}, 6) = (2), \\
&(3, 1 + \sqrt{-5})(3, 1 - \sqrt{-5}) = (9, 3 + 3\sqrt{-5}, 3 - 3\sqrt{-5}, 6) = (3), \\
&\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]/(2, 1 \pm \sqrt{-5}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \\
&\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]/(3, 1 \pm \sqrt{-5}) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

定義 34. (1) $\mathfrak{a} \in I_F$ に対し, その素イデアル分解が $\mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{e_r}$ で与えられるとき $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}_i}\mathfrak{a} := e_i \in \mathbb{Z}$ とおく．すなわち

$$\mathfrak{a} \in I_F \Rightarrow \mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{a}}.$$

(2) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in I_F$ に対して $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 1 \overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{a} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{b} = 0$.

(3) $\alpha, \beta \in F^\times$ と, 整イデアル $\mathfrak{f}$ を考える．$(\mathfrak{f}, (\alpha\beta)) = 1$ のとき以下を定める．

$$\alpha \equiv \beta \bmod^* \mathfrak{f} \overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} 0 < \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{f} \Rightarrow \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{f} \leq \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\alpha - \beta).$$

(4) 整イデアル $\mathfrak{f} \subset \mathcal{O}_F$, および, 実素点の部分集合 $\{\infty_1, \dots, \infty_r\} \subset H_1$ をとる. このとき

$$
\begin{aligned}
I_{\mathfrak{f}} &:= \{\mathfrak{a} \in I_F \mid (\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = 1\}, \\
P_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_r} &:= \{(\alpha) \in I_F \mid \alpha \in F^\times,\ (\mathfrak{f}, (\alpha)) = 1,\ \alpha \equiv 1 \bmod^* \mathfrak{f},\ \infty_1(\alpha), \dots, \infty_r(\alpha) > 0\}, \\
C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_r} &:= I_{\mathfrak{f}} / P_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_r}
\end{aligned}
$$

とおく. ただし $I_F \supset I_{\mathfrak{f}} \supset P_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_r}$ は部分群になっており, $C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_r} = I_{\mathfrak{f}}/P_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_r}$ は剰余群を表している. $C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_r}$ を <u>$\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_r$ を法とするイデアル類群</u> と呼び, $\mathfrak{a} \in I_{\mathfrak{f}}$ の属するイデアル類を $[\mathfrak{a}] \in C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_r}$ で表す. $H_1 = \{\infty_1, \dots, \infty_{r_1}\}$ とするとき $C_{(1)\infty_1\cdots\infty_{r_1}}$, $C_{(1)}$ をそれぞれ <u>狭義イデアル類群</u>, <u>(広義) イデアル類群</u> と呼ぶ.

命題 35. 代数体 F の整イデアル $\mathfrak{a}$ に対し, その <u>ノルム</u> を

$$N\mathfrak{a} := |\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}|.$$

で定める.

(1) 剰余環 $\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}$ は有限環である. すなわち $N\mathfrak{a} \in \mathbb{N}$. さらにラグランジュの定理より $\overline{N\mathfrak{a}} = \overline{0} \in \mathcal{O}_F/\mathfrak{a}$, すなわち

$$N\mathfrak{a} \in \mathfrak{a},\ \mathfrak{a}^{-1} \subset (N\mathfrak{a})^{-1}\mathcal{O}_F.$$

(2) ノルムは整イデアルの積と可換 ($N(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = N\mathfrak{a}N\mathfrak{b}$) である.

証明の概略. (1) アーベル群として $\mathcal{O}_F, \mathfrak{a} \cong \mathbb{Z}^{[F:\mathbb{Q}]}$.

(2) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ が互いに素である場合は中国剰余定理から従う. よって素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して $N(\mathfrak{p}^n) = (N\mathfrak{p})^n$ を示すことに帰着される. これは完全列 $0 \to \mathfrak{p}^{n-1}/\mathfrak{p}^n \to \mathcal{O}_F/\mathfrak{p}^n \to \mathcal{O}_F/\mathfrak{p}^{n-1} \to 0$ と同型 $\mathcal{O}_F/\mathfrak{p} \cong \mathfrak{p}^{n-1}/\mathfrak{p}^n$ を利用して帰納的に示すことができる. □

定理 36. (1) 代数体 F の <u>**Dedekind ゼータ関数**</u> を

$$\zeta_F(s) := \sum_{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_F} N\mathfrak{a}^{-s} \quad (\mathrm{Re}(s) > 1)$$

で定める. ただし $\mathfrak{a}$ は $\mathcal{O}_F$ のイデアル全体を動く. $\mathrm{Re}(s) > 1$ でこの級数は広義一様絶対収束し, 正則関数となる. さらに全平面に有理型に解析接続され, $s = 1$ でのみ 1 位の極をもつ.

(2) 群準同型 $\chi\colon C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_r} \to \mathbb{C}^\times$ を, $\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_r$ を法とするイデアル類群の <u>**Hecke 指標**</u> と呼び, 付随する <u>**Hecke L 関数**</u> を

$$L(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_F} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s} \quad \mathrm{Re}(s) > 1$$

で定義する. ただし $\mathfrak{a}$ は整イデアル全体を動き

$$\chi(\mathfrak{a}) = \begin{cases} \chi([\mathfrak{a}]) & (\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = 1 \\ 0 & (\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) \neq 1 \end{cases}$$

とおく. $\mathrm{Re}(s) > 1$ でこの級数は広義一様絶対収束し, 同じ範囲で正則関数となる. さらに全平面に有理型に解析接続され, $s = 1$ でのみ高々 1 位の極をもつ. χ が自明指標 (i.e., $\chi(C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_r}) = \{1\}$) でなければ, $L(s, \chi)$ は全平面で正則である.

(3) イデアル類 $c \in C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_r}$ に付随する 部分ゼータ関数 を

$$\zeta(s, c) = \sum_{\mathfrak{a} \in c} N\mathfrak{a}^{-s} \quad \mathrm{Re}(s) > 1$$

で定義する. ただし $\mathfrak{a}$ は c に属する整イデアル全体を動く. $\mathrm{Re}(s) > 1$ でこの級数は広義一様絶対収束し, 同じ範囲で正則関数となる. さらに全平面に有理型に解析接続され, $s = 1$ でのみ 1 位の極をもつ.

証明に関して. 標準的な整数論の専門書を参照. □

命題 37. イデアル類群 $C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_r}$ は有限群となる. また $\mathfrak{f}\infty_1 \cdots \infty_r$ を法とするイデアル類群の Hecke 指標全体のなす群を $\hat{C}_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_r}$ とおくとき

$$L(s, \chi) = \sum_{c \in C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_r}} \chi(c)\zeta(s, c) \quad (\chi \in \hat{C}_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_r}),$$

$$\zeta(s, c) = \frac{1}{|C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_r}|} \sum_{\chi \in \hat{C}_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_r}} \chi(c) L(s, \chi) \quad (c \in C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_r})$$

が成り立つ.

証明の概略. イデアル類群の有限性は Minkowski の定理やイデール群の位相的性質に帰着させることができる. 後半は, 一般に有限アーベル群 G とその指標群 $\hat{G}$ に対して

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) = \begin{cases} 0 & (\chi \neq 1) \\ |G| & (\chi = 1) \end{cases}$$

が成り立つことによる. □

課題 8. $F = \mathbb{Q}$ とし, 法として (f) または $(f)\infty$ ($f \in \mathbb{N}$, $\infty = \mathrm{id} \in H_1 = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{C})$) を考える.

(1) $(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^\times \to C_{(f)\infty},\ a \bmod f\ (a > 0) \mapsto [(a)]$ が同型となることを示せ.

(2) $(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^\times/\{\pm 1 \bmod f\} \to C_{(f)},\ a \bmod f \mapsto [(a)]$ が同型となることを示せ.

(3) イデアル類 $[(a)] \in C_{(f)\infty}$ $(1 \le a \le f,\ (a,f) = 1)$ に付随する部分ゼータ関数 $\zeta(s,[(a)])$ を Hurwitz ゼータ関数で書き表せ.

注意 38. 類体論により, 以下が言える.

(1) F の有限次アーベル拡大 K を考える. このとき K/F の導手 $\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_r$ と, Artin 写像と呼ばれる全射群準同型写像

$$\mathrm{Art}\colon C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_r} \to \mathrm{Gal}(K/F)$$

が存在する.

(2) 位数有限の 1 次元ガロア表現 (群準同型写像) $\phi\colon \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathbb{C}^\times$ を考える. $\ker\phi$ の固定部分体を $K := \overline{F}^{\ker\phi}$ とし, (1) の Artin 写像をとる. このとき合成写像

$$\chi := \phi \circ \mathrm{Art}\colon C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_r} \to \mathbb{C}^\times$$

は Hecke 指標となり, Artin L 関数 $L(s,\phi)$ は

$$L(s,\phi) = L(s,\chi)$$

を満たす.

とくに, イデアル類群の Hecke 指標に付随する Hecke L 関数 は, Artin L 関数の特別な場合だと思える.

5.4 総実体の部分ゼータ関数

以下, 新谷氏による総実体上の部分ゼータ関数の記述を紹介する. 以下では

- n 次の総実体 F.
- 新谷の基本領域 $D = \coprod_{j\in J} C(\boldsymbol{v}_j)$, $\boldsymbol{v}_j = (v_{j1},\dots,v_{jr(j)}) \in \mathcal{O}_{F,+}^{r(j)}$, $|J| < \infty$, $r(j) \in \mathbb{N}$,
- 狭義イデアル類群 $C_{(1)\infty_1\cdots\infty_n}$ の整イデアルからなる完全代表系 $\{\mathfrak{a}_\mu\}_{\mu=1,\dots,h_+}$ $(h_+ = |C_{(1)\infty_1\cdots\infty_n}|)$.
- 法 $\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_n$.

を固定して考える. 簡単のため, 実素点は全体 $(\{\infty_1,\dots,\infty_n\} = H_1,\ n = r_1 = [F:\mathbb{Q}])$ の場合を考えている. このとき

$$c \in C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_n} \Rightarrow \mathfrak{a}_c := \exists!\mathfrak{a}_\mu \text{ s.t. } [\mathfrak{a}_\mu\mathfrak{f}] = \overline{c} \in C_{(1)\infty_1\cdots\infty_n}$$

が成り立つ. ここで自然な射影 $C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_n} \to C_{(1)\infty_1\cdots\infty_n}$ の像を $\overline{c}$ で表した. とくに

$$\mathfrak{a} \in c \Rightarrow [\mathfrak{a}_c\mathfrak{f}] = [\mathfrak{a}] \Leftrightarrow \exists z \in F_+ \text{ s.t. } z\mathfrak{a}_c\mathfrak{f} = \mathfrak{a} \Leftrightarrow \exists z \in (\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-1} \cap F_+ \text{ s.t. } z\mathfrak{a}_c\mathfrak{f} = \mathfrak{a}.$$

よって

$$\{\mathfrak{a} \in c \mid \mathfrak{a} \text{ は整イデアル } \} = \{z\mathfrak{a}_c\mathfrak{f} \mid z \in (\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-1} \cap F_+,\ z\mathfrak{a}_c\mathfrak{f} \in c\}$$

と書ける. ただし右辺の表記 $z\mathfrak{a}_c\mathfrak{f}$ は一意的でない: すなわち

$$z, z' \in (\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-1} \cap F_+ \text{ に対し } z\mathfrak{a}_c\mathfrak{f} = z\mathfrak{a}_c\mathfrak{f} \Leftrightarrow z' \in zE_{F,+}$$

であるから, 過不足無く書くと

$$\begin{aligned} &\{\mathfrak{a} \in c \mid \mathfrak{a} \text{ は整イデアル } \} = \big(\{z \in (\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-1} \cap F_+ \mid z\mathfrak{a}_c\mathfrak{f} \in c\}/\sim\big) \cdot \mathfrak{a}_c\mathfrak{f}, \\ &z \sim z' \overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} z' \in zE_{F,+} \end{aligned}$$

である. 同じものを, 同値関係 $\sim$ の完全代表系 (新谷の基本領域) D を使って書くと

$$= \{z \in (\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-1} \cap D \mid z\mathfrak{a}_c\mathfrak{f} \in c\} \cdot \mathfrak{a}_c\mathfrak{f} = \coprod_{j \in J} \{z \in (\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-1} \cap C(\boldsymbol{v}_j) \mid z\mathfrak{a}_c\mathfrak{f} \in c\} \cdot \mathfrak{a}_c\mathfrak{f}$$

となる. よって部分ゼータ関数は

$$\zeta(s, c) = N(\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-s} \sum_{j \in J} \sum_{z \in (\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-1} \cap C(\boldsymbol{v}_j),\ z\mathfrak{a}_c\mathfrak{f} \in c} Nz^{-s}$$

と書ける.

命題 39.

$$R(c, \boldsymbol{v}_j) := R(c, \boldsymbol{v}_j, \{\mathfrak{a}_\mu\}) := \{\boldsymbol{x} \in (\mathbb{Q} \cap (0,1])^{r(j)} \mid \boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{v}_j \in (\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-1},\ (\boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{v}_j)\mathfrak{a}_c\mathfrak{f} \in c\}$$

とおく.

(1) $R(c, \boldsymbol{v}_j)$ は有限集合である.

(2) $\{z \in (\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-1} \cap C(\boldsymbol{v}_j) \mid z\mathfrak{a}_c\mathfrak{f} \in c\} = \displaystyle\coprod_{\boldsymbol{x} \in R(c, \boldsymbol{v}_j)} \{(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{m})\,{}^t\boldsymbol{v}_j \mid \boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{r(j)}\}$.

証明. $r := r(j)$ のように j を省略してかく.

(1) $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_r) \in R(c, \boldsymbol{v})$ となるような各成分 x_i の分母が有界であることを言えばよい. $\mathcal{O}_F$ は階数 $n := [F : \mathbb{Q}]$ の自由 $\mathbb{Z}$ 加群であったから,

$$\mathcal{O}_F = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}b_i \quad (b_i \in \mathcal{O}_F)$$

と書ける. よって $\boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{v} \in (\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-1} \subset N(\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-1}\mathcal{O}_F$ より

$$N(\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})\boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}\,{}^t(b_1\ \cdots\ b_n) \quad (\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^n)$$

と表せる. 一方で $v_i \in \mathcal{O}_F$ より

$$ {}^t\boldsymbol{v} = B\,{}^t(b_1\ \cdots\ b_n) \quad (B \in M_{r\times n}(\mathbb{Z})) $$

の形で書ける. あわせて

$$ N(\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})\boldsymbol{x}B = \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^n $$

ここで $v_1, \ldots, v_r$ は一次独立 $\Rightarrow$ B は階数 r $\Rightarrow$ B の右逆行列 $C \in M_{n\times r}(\mathbb{Q})$ が存在, が導ける (例えば基底の延長定理より). よって C の分母の最小公倍数を d とおけば

$$ \boldsymbol{x} \in \frac{1}{dN(\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})}\mathbb{Z}^n $$

となる.

(2) 左辺を R とおく. まず $1 \le i \le r$ に対して以下の主張が成り立つことをみる.

$$ \begin{aligned} & z \in R \Rightarrow z + v_i \in R, \\ & z = \boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{v} \in R,\ x_i > 1 \Rightarrow z - v_i \in R. \end{aligned} $$

R の条件のうち

$$ \begin{aligned} & z \in (\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-1} \Rightarrow z \pm v_i \in (\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-1}, \\ & z \in C(\boldsymbol{v}) \Rightarrow z + v_i \in C(\boldsymbol{v}), \\ & z \in C(\boldsymbol{v}), x_i > 1 \Rightarrow z - v_i \in C(\boldsymbol{v}) \end{aligned} $$

は自明であろう (一つ目は $v_i \in \mathcal{O}_F \subset (\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-1}$ より). さらに

$$ \begin{aligned} & z, v_i \in C(\boldsymbol{v}) \cap F \subset F_+, \\ & z \in (\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-1}, z\mathfrak{a}_c\mathfrak{f} \in c \subset I_\mathfrak{f} \Rightarrow z^{-1} \in \mathfrak{f} \Rightarrow (z+v_i)/z = 1 + v_i/z \equiv 1 \bmod^* \mathfrak{f} \end{aligned} $$

より

$$ [z\mathfrak{a}_c\mathfrak{f}] = [(z+v_i)\mathfrak{a}_c\mathfrak{f}] $$

が成り立つ. $z - v_i$ も同様に議論でき, 主張が従う.

($R \subset \coprod \cdots$) $z = \boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{v} \in R$ とする. R の定義より $x_i > 0$ なので, その整数部分を m_i とおけば, 示した主張を繰り返し使って $(x_1 - m_1, \ldots, x_r - m_r) \in R(c, \boldsymbol{v})$ を得る.

($R \supset \coprod \cdots$) 示した主張より明らか. $\square$

系 40. $z \in F$ の, 実素点 ∞_i (に対応する埋め込み $\in \mathrm{Hom}(F, \mathbb{R})$) での像を $z^{(i)} := \infty_i(z) \in \mathbb{R}$ で表す. ベクトル $\boldsymbol{z} \in F^r$ に関しても同様に $\boldsymbol{z}^{(i)} \in \mathbb{R}^r$ を定義し $A_j := \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_j^{(1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_j^{(n)} \end{bmatrix}$ とおく. このとき

$$ \zeta(s, c) = N(\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-s} \sum_{j \in J} \sum_{\boldsymbol{x} \in R(c, \boldsymbol{v}_j)} \zeta(s, A_j, \boldsymbol{x}). $$

さらに Shintani's formula を適用して次を得る.

系 41.

$$\zeta'(0,c) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in J} \sum_{\boldsymbol{x} \in R(c,\boldsymbol{v}_j)} \log \Gamma_{r(j)}(\boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{v}_j^{(i)}, \boldsymbol{v}_j^{(i)})$$
$$- \zeta(0,c) \log N(\mathfrak{a}_c \mathfrak{f}) + \sum_{j \in J} \frac{(-1)^{r(j)}}{n} \sum_{|\boldsymbol{l}|=r(j)} C_{\boldsymbol{l}}(A_j) \sum_{\boldsymbol{x} \in R(c,\boldsymbol{v}_j)} \prod_{m=1}^{r(j)} \frac{B_{l_m}(x_m)}{l_m!}.$$

注意 42. 総実代数体の部分ゼータ関数や Hecke L 関数の $s=0$ での微分値は, 後に紹介する Stark 単数や CM 周期との関係が予想される, 重要な不変量である. 新谷氏の結果により, これらは多重ガンマ関数と elementary function で書き表わすことができる. さらに吉田氏は以下のアイデアを実現した: 微分値の主要項である多重ガンマ関数は

$$\sum_{i=1}^{n} \leftrightarrow \sum_{\iota \in \mathrm{Hom}(F,\mathbb{R})}$$

に関して分解されてる. 他の補正項も同様の分解が行えれば, 不変量や予想式を

$$\zeta'(0,c) = \sum_{\iota \in \mathrm{Hom}(F,\mathbb{R})} X(c,\iota)$$

の形に細分できる.

6 Yoshida's class invariant

この節での目的を最初に述べる.

- F を n 次総実体とする.
- 実埋め込み全体に順番をつけて $\mathrm{Hom}(F,\mathbb{R})=\{\iota_1,\ldots,\iota_n\}$ とおく. これらは実素点 $H_1=\{\infty_1,\ldots,\infty_n\}$ と対応している.
- 整イデアル $\mathfrak{f}$ と全ての実素点の積 $\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_n$ を法とするイデアル類群 $C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_n}$ を考える.
- イデアル類 $c\in C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_n}$ に付随する部分ゼータ関数 $\zeta(s,c)$ を考える.

部分ゼータ関数の $s=0$ での微分値 (系 41) を分解して

$$\zeta'(0,c)=\sum_{i=1}^{n}X(c,\iota_i)$$

と表す. 実際は以下のデータも必要になる.

- 新谷の基本領域 $D=\coprod_{j\in J}C(\boldsymbol{v}_j)$ $\boldsymbol{v}_j=(v_{j1},\ldots,v_{jr(j)})\in\mathcal{O}_{F,+}^{r(j)}$ $(|J|<\infty)$.
- 狭義イデアル類群の整イデアルからなる完全代表系 $\{\mathfrak{a}_\mu\}$.

不変量 $X(c,\iota_i)$ の定義は, D, $\{\mathfrak{a}_\mu\}$ の取り方にもよっていて

$$X(c,\iota_i):=X(c,\iota_i;D,\{\mathfrak{a}_\mu\}):=G(c,\iota_i;D,\{\mathfrak{a}_\mu\})+W(c,\iota_i;D,\{\mathfrak{a}_\mu\})+V(c,\iota_i;D,\{\mathfrak{a}_\mu\})$$

の形に定義される. ただし $W(c,\iota_i;D,\{\mathfrak{a}_\mu\})$ の定義は [Y] における定義から少し修正したものを紹介する.

6.1 $G(c,\iota)$

定義 43.

$$G(c,\iota_i):=G(c,\iota_i;D,\{\mathfrak{a}_\mu\}):=\sum_{j\in J}\sum_{\boldsymbol{x}\in R(c,\boldsymbol{v}_j,\{\mathfrak{a}_\mu\})}\log\Gamma_{r(j)}(\boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{v}_j^{(i)},\boldsymbol{v}_j^{(i)}).$$

命題 44. 新谷の基本領域 $D=\coprod_{j\in J}C(\boldsymbol{v}_j)$ と狭義イデアル類群の完全代表系 $\{\mathfrak{a}_\mu\}$ の取り換えは, 以下の 3 パターンの操作の繰り返しで尽くされる.

(I) 一つの $j_0\in J$ に関し $C(\boldsymbol{v}_{j_0})=\coprod_{l\in L}C(\boldsymbol{v}_l)$ と分解して

$$D=\coprod_{j\in J}C(\boldsymbol{v}_j)\Rightarrow D=\left(\coprod_{j\in J-\{j_0\}}C(\boldsymbol{v}_j)\right)\coprod\left(\coprod_{l\in L}C(\boldsymbol{v}_l)\right).$$

なお, cone の基底の取り換え ($|L|=1$ の場合) もここに含める.

(II) 一つの $j_0 \in J$ と $\epsilon \in E_{F,+}$ に対して

$$D = \coprod_{j \in J} C(\boldsymbol{v}_j) \Rightarrow D = \left(\coprod_{j \in J - \{j_0\}} C(\boldsymbol{v}_j) \right) \coprod C(\epsilon \boldsymbol{v}_{j_0}).$$

(III) $\mathfrak{a}_c = \mathfrak{a}_{\mu_0}$ となる μ_0 と $\alpha \in \mathfrak{a}_{\mu_0}^{-1} \cap F_+$ に対して

$$\mathfrak{a}_{\mu_0} \Rightarrow \alpha \mathfrak{a}_{\mu_0},$$
$$C(\boldsymbol{v}_j) \Rightarrow \alpha^{-1} C(\boldsymbol{v}_j) = C(\boldsymbol{v}'_j) \ (\forall j \in J).$$

ここで $\boldsymbol{v}'_j$ は $\alpha^{-1} C(\boldsymbol{v}_j) = C(\boldsymbol{v}'_j)$, $v'_j \in \mathcal{O}_{F,+}^{r(j)}$ を満たすものをとる ($\alpha^{-1} \boldsymbol{v}_j$ を自然数倍して分母を払うなどすればよい).

証明の概略. 新谷の基本領域の取り換えが (I), (II) で尽くされることに関しては, 詳しい議論が [Y, Lemma 3.13, p84] にある. 狭義イデアル類群の完全代表系の取り換えは, (III) の操作をした上で (I), (II) により元の新谷の基本領域に戻せばよい. □

命題 45. $G(c, \iota_i; D, \{\mathfrak{a}_\mu\})$ は, 操作 (I), (II), (III) により以下のように変化する.

(I) 不変.

(II) $G(c, \iota_i; D, \{\mathfrak{a}_\mu\}) - \displaystyle\sum_{\boldsymbol{x} \in R(c, \boldsymbol{v}_j, \{\mathfrak{a}_\mu\})} \zeta_{r(j)}(0, \boldsymbol{v}_j^{(i)}, \boldsymbol{x}\, {}^t\boldsymbol{v}_j^{(i)}) \log(\epsilon^{(i)})$.

(III) $G(c, \iota_i; D, \{\mathfrak{a}_\mu\}) + \displaystyle\sum_{j \in J} \sum_{\boldsymbol{x} \in R(c, \boldsymbol{v}_j, \{\mathfrak{a}_\mu\})} \zeta_{r(j)}(0, \boldsymbol{v}_j^{(i)}, \boldsymbol{x}\, {}^t\boldsymbol{v}_j^{(i)}) \log(\alpha^{(i)})$.

証明の準備として少し議論を行う. 離散部分集合 $Z \subset F$ に対し

$$\zeta(s, Z) := \zeta_{(i)}(s, Z) := \sum_{z \in Z} (z^{(i)})^{-s},$$
$$G(Z) := G_{(i)}(Z) := \zeta'(0, Z)$$

と定義する. ただし一行目の右辺がある領域で収束し, 有理型解析接続を持つ場合にのみ限る. とくにこのプリント中では

$$\zeta(s, Z) = \text{ Barnes の多重ゼータ関数の有限和}$$

の形になるものに限る. 明らかな性質として

$$\zeta(s, Z_1 \coprod Z_2) = \zeta(s, Z_1) + \zeta(s, Z_2),$$
$$\zeta(s, \lambda Z) = (\lambda^{(i)})^{-s} \zeta(s, Z)$$

が成り立つ. とくに

$$\begin{aligned}\zeta(0, Z_1 \coprod Z_2) &= \zeta(0, Z_1) + \zeta(0, Z_2),\\ G(Z_1 \coprod Z_2) &= G(Z_1) + G(Z_2),\\ \zeta(0, \lambda Z) &= \zeta(0, Z),\\ G(\lambda Z) &= G(Z) - \zeta(0, Z)\log(\lambda^{(i)}) \end{aligned} \tag{6.1}$$

が言える. また

$$\begin{aligned}G(c, \iota_i; D, \{\mathfrak{a}_\mu\}) &= G(\coprod_{j\in J,\ \boldsymbol{x}\in R(c,\boldsymbol{v}_j,\{\mathfrak{a}_\mu\})} \left\{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{m})\,{}^t\boldsymbol{v}_j \mid \boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r(j)}\right\})\\ &\overset{\text{命題 39-(2)}}{=} G(\coprod_{j\in J}\{z\in(\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-1}\cap C(\boldsymbol{v}_j) \mid z\mathfrak{a}_c\mathfrak{f}\in c\})\\ &= G(\{z\in(\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-1}\cap D \mid z\mathfrak{a}_c\mathfrak{f}\in c\}) \end{aligned} \tag{6.2}$$

である.

証明. (I) cone を細分しても D 自体は不変なので明らか.

(II) $C(\boldsymbol{v}) \Rightarrow C(\epsilon\boldsymbol{v})$ により

$$\begin{aligned}\{z\in(\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-1}\cap C(\boldsymbol{v}) \mid z\mathfrak{a}_c\mathfrak{f}\in c\} \Rightarrow &\{z\in(\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-1}\cap C(\epsilon\boldsymbol{v}) \mid z\mathfrak{a}_c\mathfrak{f}\in c\}\\ &= \epsilon\{z\in(\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-1}\cap C(\boldsymbol{v}) \mid z\mathfrak{a}_c\mathfrak{f}\in c\}\end{aligned}$$

なので (6.1), (6.2) より従う.

(III) (II) と同様の議論で示せる. 課題とする. □

課題 9. (III) の場合の証明を完成させよ. ヒント: 以下の等式に帰着できる.

$$\{z\in(\alpha\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-1}\cap\alpha^{-1}C(\boldsymbol{v}_j) \mid z\alpha\mathfrak{a}_c\mathfrak{f}\in c\} = \alpha^{-1}\{z\in(\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-1}\cap C(\boldsymbol{v}_j) \mid z\mathfrak{a}_c\mathfrak{f}\in c\}.$$

6.2 $W(c, \iota)$

$W(c, \iota)$ に関してのみ [Y] とは少し異なる定義を用いる.

命題 46. 代数体 F の元 $\alpha\in F$ に対し, 絶対ノルムを

$$N_{F/\mathbb{Q}}(\alpha) := \prod_{\iota\in\mathrm{Hom}(F,\mathbb{C})}\iota(\alpha) \quad (\in\mathbb{Q})$$

で定める. このとき, 単項イデアル $(\alpha)\subset\mathcal{O}_F$ $(\alpha\in\mathcal{O}_F)$ に対し

$$N((\alpha)) = |N_{F/\mathbb{Q}}(\alpha)|$$

が成り立つ. さらに $\alpha\in\mathcal{O}_{F,+}$ なら右辺の絶対値が外れる.

証明. $V := F \otimes \mathbb{R}$ を $n := [F:\mathbb{Q}]$ 次元 $\mathbb{R}$ ベクトル空間と見て α 倍写像

$$f\colon V \to V,\ \beta \otimes x \mapsto (\alpha\beta) \otimes x$$

の行列式 $\det f$ を考える. 新谷の基本領域のときの同一視

$$V \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n,\ \beta \otimes x \mapsto (\iota_1(\beta)x, \dots, \iota_n(\beta))$$

を考えると

$$\det f = \det \begin{bmatrix} \iota_1(\alpha) & & \\ & \ddots & \\ & & \iota_n(\alpha) \end{bmatrix} = N_{F/\mathbb{Q}}(\alpha)$$

となる. $\mathcal{O}_F = \mathbb{Z}^n$ と見れば, 線形写像の性質より

$$[\mathcal{O}_F : (\alpha)] = [\mathcal{O}_F : f(\mathcal{O}_F)] = |\det f|$$

であるので題意を得る. □

定義 47. 各 $\iota \in \mathrm{Hom}(F, \mathbb{R})$ に対し, 準同型写像 $\log_\iota\colon I_F \to \mathbb{R}$ を以下で定める.

- 各素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し, 単項イデアル $\mathfrak{p}^{h_+} = (\alpha_\mathfrak{p})$ の生成元 $\alpha_\mathfrak{p} \in \mathcal{O}_{F,+}$ を一つずつ固定する. ここで h_+ は狭義イデアル類群の位数で, ラグランジュの定理より $\mathfrak{p}^{h_+} \in P_{(1)\infty_1\cdots\infty_n}$ が分かる. (例えば $\alpha_\mathfrak{p} \in D$ と約束しても良い.)
- 素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し $\log_\iota \mathfrak{p} = \frac{1}{h_+} \log \iota(\alpha_\mathfrak{p})$.
- 一般の分数イデアル $\mathfrak{a}$ に対しては

  $$\log_\iota \mathfrak{a} := \sum_{\mathfrak{p}} \mathrm{ord}_\mathfrak{p} \mathfrak{a} \cdot \log_\iota \mathfrak{p} = \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\mathrm{ord}_\mathfrak{p} \mathfrak{a}}{h_+} \left(\log \iota(\alpha_\mathfrak{p})\right).$$

  $\log_\iota$ の定義と上の命題より, 直ちに

  $$\log(N\mathfrak{a}) = \sum_{i=1}^{n} \log_{\iota_i} \mathfrak{a}$$

  が従う.

定義 48.

$$W(c, \iota_i) := W(c, \iota_i; D, \{\mathfrak{a}_\mu\}) := -\zeta(0, c) \log_{\iota_i}(\mathfrak{a}_c \mathfrak{f})$$

命題 49. $W(c, \iota_i; D, \{\mathfrak{a}_\mu\})$ は, 操作 (I), (II), (III) により以下のように変化する.

(I) 不変.

(II) 不変.

(Ⅲ) $W(c,\iota_i;D,\{\mathfrak{a}_\mu\})-\zeta(0,c)\log_{\iota_i}((\alpha))$.

証明. (I), (Ⅱ) は明らか. (Ⅲ) は $\log_{\iota_i}$ の準同型性から従う. $\square$

注意 50. 定理 24 より

$$\begin{aligned}&\zeta(0,c)\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in J}(-1)^{r(j)}\sum_{|\boldsymbol{l}|=r(j)}(v_1^{(i)})^{l_1-1}\cdots(v_{r(j)}^{(i)})^{l_{r(j)}-1}\sum_{\boldsymbol{x}\in R(c,\boldsymbol{v}_j,\{\mathfrak{a}_\mu\})}\frac{B_{l_1}(x_1)}{l_1!}\cdots\frac{B_{l_{r(j)}}(x_{r(j)})}{l_{r(j)}!}\end{aligned}$$

である. さらに以下で紹介する命題 57 を使えば

$$=\sum_{j\in J}(-1)^{r(j)}\sum_{|\boldsymbol{l}|=r(j)}v_1^{l_1-1}\cdots v_{r(j)}^{l_{r(j)}-1}\sum_{\boldsymbol{x}\in R(c,\boldsymbol{v}_j,\{\mathfrak{a}_\mu\})}\frac{B_{l_1}(x_1)}{l_1!}\cdots\frac{B_{l_{r(j)}}(x_{r(j)})}{l_{r(j)}!}$$

とも書ける.

6.3 $V(c,\iota)$

以下で与える $V(c,\iota)$ の定義は技巧的に見えるが, 後の命題を見れば “自然な分割” であることが分かる.

定義 51.

$$\begin{aligned}&V(c,\iota_i):=V(c,\iota_i;D,\{\mathfrak{a}_\mu\})\\&:=\sum_{j\in J}(-1)^{r(j)}\sum_{|\boldsymbol{l}|=r(j)}\left(\sum_{\substack{1\le k\le n\\k\ne i}}\frac{C_{\boldsymbol{l},i,k}(A_j)+C_{\boldsymbol{l},k,i}(A_j)}{n}-\frac{C_{\boldsymbol{l}}(A_j)}{n^2}\right)\sum_{\boldsymbol{x}\in R(c,\boldsymbol{v}_j)}\prod_{m=1}^{r(j)}\frac{B_{l_m}(x_m)}{l_m!}.\end{aligned}$$

命題 52. $V(c,\iota_i;D,\{\mathfrak{a}_\mu\})$ は, 操作 (I), (Ⅱ), (Ⅲ) により以下のように変化する.

(I) 不変.

(Ⅱ) $V(c,\iota_i;D,\{\mathfrak{a}_\mu\})$

$$+\sum_{\boldsymbol{x}\in R(c,\boldsymbol{v}_j,\{\mathfrak{a}_\mu\})}\left(\zeta_{r(j)}(0,\boldsymbol{v}_j^{(i)},\boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{v}_j^{(i)})-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\zeta_{r(j)}(0,\boldsymbol{v}_j^{(k)},\boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{v}_j^{(k)})\right)\log(\epsilon^{(i)}).$$

(Ⅲ) $V(c,\iota_i;D,\{\mathfrak{a}_\mu\})$

$$\begin{aligned}&-\sum_{j\in J}\sum_{\boldsymbol{x}\in R(c,\boldsymbol{v}_j,\{\mathfrak{a}_\mu\})}\left(\zeta_{r(j)}(0,\boldsymbol{v}_j^{(i)},\boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{v}_j^{(i)})-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\zeta_{r(j)}(0,\boldsymbol{v}_j^{(k)},\boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{v}_j^{(k)})\right)\\&\qquad\times\left(\log(\alpha^{(i)})-\frac{1}{n}\log(N_{F/\mathbb{Q}}(\alpha))\right).\end{aligned}$$

証明の前に議論を行う. $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$ とおく. $C_{\boldsymbol{l},i,k}(A)$ の定義を良く見ると

$$C_{\boldsymbol{l},i,k}(A) = C_{\boldsymbol{l},1,2}(\left[\begin{smallmatrix} \boldsymbol{a}_i \\ \boldsymbol{a}_k \end{smallmatrix}\right])$$

となっていることが分かる. よって Shintani's formula の $n=2$ の場合を考えると

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s, \left[\begin{smallmatrix} \boldsymbol{a}_i \\ \boldsymbol{a}_k \end{smallmatrix}\right], \boldsymbol{x})|_{s=0} - \frac{\partial}{\partial s}\zeta_r(s, \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{a}_i)|_{s=0} - \frac{\partial}{\partial s}\zeta_r(s, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{a}_k)|_{s=0} \\
&= \frac{(-1)^r}{2}\sum_{|\boldsymbol{l}|=r}(C_{\boldsymbol{l},1,2}(\left[\begin{smallmatrix} \boldsymbol{a}_i \\ \boldsymbol{a}_k \end{smallmatrix}\right]) + C_{\boldsymbol{l},2,1}(\left[\begin{smallmatrix} \boldsymbol{a}_i \\ \boldsymbol{a}_k \end{smallmatrix}\right]))\prod_{j=1}^{r}\frac{B_{l_j}(x_j)}{l_j!} \\
&= \frac{(-1)^r}{2}\sum_{|\boldsymbol{l}|=r}(C_{\boldsymbol{l},i,k}(A) + C_{\boldsymbol{l},k,i}(A))\prod_{j=1}^{r}\frac{B_{l_j}(x_j)}{l_j!}.
\end{aligned}$$

となる. ここで以下の定義を導入する: 離散部分集合 $Z \subset F$ に対し

$$\zeta_{(i,k)}(s, Z) := \sum_{z\in Z}(z^{(i)}z^{(k)})^{-s},$$
$$G_{(i,k)}(Z) := \zeta'_{(i,k)}(0, Z)$$

と定義する. ただし

$$\zeta_{(i,k)}(s, Z) = \text{新谷ゼータ関数 } (n=2 \text{ の場合}) \text{ の有限和}$$

となる場合のみとする. このとき上の議論より

$$Z := \{z \in (\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-1} \cap D \mid z\mathfrak{a}_c\mathfrak{f} \in c\},$$
$$v_{h,k} := G_{(h,k)}(Z) - G_{(h)}(Z) - G_{(k)}(Z)$$

を用いて

$$V(c, \iota_i; D, \{\mathfrak{a}_\mu\}) = \frac{2}{n}\sum_{\substack{1\le k\le n \\ i\neq k}} v_{i,k} - \frac{1}{n^2}\sum_{\substack{1\le h,k\le n \\ h\neq k}} v_{h,k}$$

と書ける. また, やはり明らかな性質として

$$\begin{aligned}
\zeta_{(i,k)}(0, Z_1 \textstyle\coprod Z_2) &= \zeta_{(i,k)}(0, Z_1) + \zeta_{(i,k)}(0, Z_2), \\
G_{(i,k)}(Z_1 \textstyle\coprod Z_2) &= G_{(i,k)}(Z_1) + G_{(i,k)}(Z_2), \\
\zeta_{(i,k)}(0, \lambda Z) &= \zeta_{(i,k)}(0, Z), \\
G_{(i,k)}(\lambda Z) &= G_{(i,k)}(Z) - \zeta_{(i,k)}(0, Z)\left(\log(\lambda^{(i)}) + \log(\lambda^{(k)})\right)
\end{aligned}$$

が分かる. さらに定理 24 より

$$\zeta_{(i,k)}(0, Z) = \frac{1}{2}(\zeta_{(i)}(0, Z) + \zeta_{(k)}(0, Z))$$

が成り立つ.

証明の概略. 上記の関係式を用いて G の場合と類似の議論を行えば良い. □

6.4 $X(c,\iota)$

定義 53.

$$X(c,\iota_i) := X(c,\iota_i;D,\{\mathfrak{a}_\mu\}) := G(c,\iota_i;D,\{\mathfrak{a}_\mu\}) + W(c,\iota_i;D,\{\mathfrak{a}_\mu\}) + V(c,\iota_i;D,\{\mathfrak{a}_\mu\})$$

命題 54.

$$\zeta'(0,c) = \sum_{i=1}^{n} X(c,\iota_i;D,\{\mathfrak{a}_\mu\}).$$

証明の概略. 定義より明らか. □

定理 55. $X(c,\iota_i;D,\{\mathfrak{a}_\mu\})$ は, 操作 (I), (II), (III) により以下のように変化する.

(I) 不変.

(II) $X(c,\iota_i;D,\{\mathfrak{a}_\mu\}) - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{\boldsymbol{x}\in R(c,\boldsymbol{v}_j,\{\mathfrak{a}_\mu\})}\sum_{k=1}^{n}\zeta_{r(j)}(0,\boldsymbol{v}_j^{(k)},\boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{v}_j^{(k)})\log(\epsilon^{(i)})$.

(III) $X(c,\iota_i;D,\{\mathfrak{a}_\mu\}) - \zeta(0,c)\left(\log(\alpha^{(i)}) - \log_{\iota_i}((\alpha))\right)$.

とくに, いずれの場合も

$$X(c,\iota_i;D,\{\mathfrak{a}_\mu\}) + r\log(\epsilon^{(i)}) \quad (\exists r\in\mathbb{Q},\ \exists\epsilon\in E_{F,+})$$

の形である.

証明の概略. G,W,V に関する同様の命題を集めて題意を得る. ただし以下の 2 つの命題が必要である. □

命題 56. $\alpha\in F_+$ に対し

$$\exists r\in\mathbb{Q},\ \exists\epsilon\in E_{F,+}\ \text{s.t.}\ \log(\alpha^{(i)}) - \log_{\iota_i}((\alpha)) = r\log(\epsilon^{(i)}).$$

証明. 素イデアル分解 $(\alpha)=\prod_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\alpha)}$ を考える. $\log_{\iota_i}$ の定義より

$$\log_{\iota_i}((\alpha)) = \sum_{\mathfrak{p}}\frac{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\alpha)}{h_+}\log\alpha_{\mathfrak{p}}^{(i)}, \quad \mathfrak{p}^{h_+} = (\alpha_{\mathfrak{p}}).$$

一方で

$$\left(\alpha^{h_+}\right) = \prod_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}^{h_+\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\alpha)} = \left(\prod_{\mathfrak{p}}\alpha_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\alpha)}\right) \Rightarrow \exists\epsilon\in E_{F,+}\ \text{s.t.}\ \alpha^{h_+} = \epsilon\prod_{\mathfrak{p}}\alpha_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\alpha)}$$
$$\Rightarrow \log(\alpha^{(i)}) = \frac{1}{h_+}\left(\log(\epsilon^{(i)}) + \sum_{\mathfrak{p}}\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\alpha)\log(\alpha_{\mathfrak{p}}^{(i)})\right)$$

であるので, 題意を得る. □

命題 57. (系 16 より $\zeta_{r(j)}(0,\boldsymbol{v}_j^{(i)},\boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{v}_j^{(i)})\in\iota_i(F)$ であるが) 各 i に対し

$$\sum_{j\in J}\sum_{\boldsymbol{x}\in R(c,\boldsymbol{v}_j,\{\mathfrak{a}_\mu\})}\zeta_{r(j)}(0,\boldsymbol{v}_j^{(i)},\boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{v}_j^{(i)})\in\mathbb{Q}$$

が成り立つ. とくに

$$\sum_{j\in J}\sum_{\boldsymbol{x}\in R(c,\boldsymbol{v}_j,\{\mathfrak{a}_\mu\})}\zeta_{r(j)}(0,\boldsymbol{v}_j^{(i)},\boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{v}_j^{(i)})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in J}\sum_{\boldsymbol{x}\in R(c,\boldsymbol{v}_j,\{\mathfrak{a}_\mu\})}\zeta_{r(j)}(0,\boldsymbol{v}_j^{(i)},\boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{v}_j^{(i)})=\zeta(0,c).$$

証明. [Y, Theorem 6.2, p163 および Corollary 6.3, p164] を参照. □

系 58. $\mathbb{R}_+$ の (乗法に関する) 部分群

$$\iota_i(E_{F,+})^{\mathbb{Q}}:=\{(u^{(i)})^{\frac{1}{N}}\in\mathbb{R}_+\mid u\in E_{F,+},\ N\in\mathbb{N}\}$$

を考える. このとき

$$\exp(X(c,\iota_i))\in\mathbb{R}_+/\iota_i(E_{F,+})^{\mathbb{Q}}$$

は, 新谷の基本領域 D, 狭義イデアル類群の完全代表系 $\{\mathfrak{a}_\mu\}$ の選び方によらない.

注意 59. W の項を [Y] 中の定義とすると $\mathbb{R}_+/\iota_i(E_{F,+})^{\mathbb{Q}}\Rightarrow\mathbb{R}_+/\iota_i(F_+)^{\mathbb{Q}}$ となる.

6.5 $F=\mathbb{Q}$ の場合

- $D=C(1)=\mathbb{R}_+$.
- 狭義イデアル類群は自明群 ($h_+=1$) なので $\{\mathfrak{a}_\mu\}=\{(1)\}$ とする. $(1)=\mathbb{Z}$ の代わりに任意の整イデアルでもよい.
- 法を $(f)\infty$ ($f\in\mathbb{N}$) とする. このとき

$$C_{(f)\infty}=\{[(a)]\mid 1\le a\le f,\ (a,f)=1\}\quad(\cong(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^\times).$$

$1\le a\le f$, $(a,f)=1$ を一つとる. このとき

$$\zeta(s,[(a)])=\sum_{\mathfrak{a}\in[(a)]}N\mathfrak{a}^{-s}=\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\(m/a)\in P_{(f)\infty}}}m^{-s}=\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\m\equiv a \bmod f}}m^{-s}=\zeta_1(s,f,a),$$

$$\exp(X([(a)],\mathrm{id}))=\exp(\zeta'(0,[(a)]))=\Gamma_1(a,f)=\frac{f^{\frac{a}{f}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(\tfrac{a}{f}).$$

注意 60. $n=1$ なので, 部分ゼータ関数の微分値の "分解" は起きない. また, V の定義式中の $\sum_{1\le k\le n,k\ne i}$ が空集合上の和になるので V の項も現れない .

6.6 $[F:\mathbb{Q}]=2$ の場合

実二次体の場合の計算の仕方は [Y, pp94–134] 辺りに詳しく書いてあり，とくに [Y, (4.7), (4.8), p95] で公式の形にしてある．ここでは

- $F=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.
- イデアル類群の法 $=(4)\infty_1\infty_2$.

の例 [Y, Example 6.3, p128] を中心に，定義から計算してみる．良く知られている計算により

- $\iota_1=\mathrm{id}$, $\iota_2\colon\sqrt{5}\mapsto-\sqrt{5}$.
- $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}=\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$.
- $E_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}=\{\pm(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k\mid k\in\mathbb{Z}\}$, $E_{\mathbb{Q}(\sqrt{5}),+}=\langle\epsilon:=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\rangle$.
- $h_+=|C_{(1)\infty_1\infty_2}|=1$.
- $|C_{(4)\infty_1\infty_2}|=4$.

が分かる．よって

- $D=C(1)\coprod C(1,\epsilon)$.
- $\{\mathfrak{a}_\mu\}=\{(1)\}$.

とおいて良い．

6.6.1 イデアル類群

$C_{(4)\infty_1\infty_2}$ の要素を調べるには

$$\begin{aligned}&C_{(4)\infty_1\infty_2}\ni c_1:=[(1)],\\&[(1)]\neq[(3)]\quad\Rightarrow\quad c_2:=[(3)],\\&[(1)]=[(5)]\\&\quad\vdots\end{aligned}$$

という感じで，(4) と互いに素な整イデアルを動かしていって，互いに異なるイデアル類を 4 つ探せばよい．なお，今は $h_+=|C_{(1)\infty_1\infty_2}|=1$ より

任意の整イデアルは $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5}),+}$ の元で生成される単項イデアル

である．さらに n 次総実体 F と $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_F$, $((\alpha\beta), \mathfrak{f}) = 1$ に対し

$$[(\alpha)] = [(\beta)] \in C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_n} \Leftrightarrow \exists u \in E_F \text{ s.t. } \alpha \equiv u\beta \bmod \mathfrak{f},\ \alpha/u\beta \in F_+.$$

とくに今は $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5}),+}$, $(\alpha\beta, (2)) = 1$ に対し

$$[(\alpha)] = [(\beta)] \in C_{(4)\infty_1\infty_2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } \alpha \equiv \epsilon^k\beta \bmod (4)$$

である．よって整イデアルの生成元は

$$(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}/(4))^\times/\langle\epsilon \bmod (4)\rangle$$

の代表元で総正なもの ($\in \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5}),+}$ となるもの) を選んで来ればよい．$\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})} = \mathbb{Z}[\epsilon] = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\epsilon$ を利用して計算すると

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}/(4)\right)^\times &= \left\{\overline{a+b\epsilon} \mid 0 \le a, b \le 3,\ (a,b) \notin 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}\right\},\\ \langle\epsilon \bmod (4)\rangle &= \left\{\overline{1}, \overline{\epsilon}, \overline{\epsilon^2}\right\} = \{\overline{1+0\epsilon}, \overline{0+1\epsilon}, \overline{3+3\epsilon}\}\end{aligned}$$

であるから $(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}/(4))^\times$ の $\langle\epsilon \bmod (4)\rangle$ による剰余類分解は

$$\{1, \epsilon, 3+3\epsilon\} \coprod \{3, 3\epsilon, 1+\epsilon\} \coprod \{1+2\epsilon, 2+3\epsilon, 1+3\epsilon\} \coprod \{2+\epsilon, 3+\epsilon, 3+2\epsilon\} \tag{6.3}$$

と書ける (実際はそれぞれに mod(4) が付く)．それぞれの類から適当に (総正な) 元を選んで来れば

$$C_{(4)\infty_1\infty_2} = \{c_1 := [(1)], c_2 := [(3)], c_3 := [(4+\sqrt{5})], c_4 := [(6+\sqrt{5})]\}$$

が分かる．

課題 10. 同じく $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ として $C_{(5)\infty_1\infty_2}$ を求めてみよ．(位数 2 の群となる.)

6.6.2 $R(c, \boldsymbol{v}_j)$

G, W, V の計算のために

$$\begin{aligned}R(c_k, (1)) &:= \{x \in \mathbb{Q} \cap (0,1] \mid x \in (4)^{-1},\ (4x) \in c_k\},\\ R(c_k, (1,\epsilon)) &:= \{(x,y) \in (\mathbb{Q} \cap (0,1])^2 \mid x + y\epsilon \in (4)^{-1},\ (4x+4y\epsilon) \in c_k\}\end{aligned}$$

を求める．まず

$$(4)^{-1} = \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}}{4} = \frac{\mathbb{Z}}{4} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{4}\epsilon$$

より, それぞれ

$$x, y \in \left\{\tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{4}, \tfrac{3}{4}, 1\right\}$$

を動かせばよいことが分かる．よって類別 (6.3) より以下のデータを得る．

$$\begin{aligned}
&R(c_1,(1))=\left\{\tfrac{1}{4}\right\}, && R(c_1,(1,\epsilon))=\{(\tfrac{1}{4},1),(1,\tfrac{1}{4}),(\tfrac{3}{4},\tfrac{3}{4})\},\\
&R(c_2,(1))=\left\{\tfrac{3}{4}\right\}, && R(c_2,(1,\epsilon))=\{(\tfrac{3}{4},1),(1,\tfrac{3}{4}),(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4})\},\\
&R(c_3,(1))=\emptyset, && R(c_3,(1,\epsilon))=\{(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}),(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4}),(\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4})\},\\
&R(c_4,(1))=\emptyset, && R(c_4,(1,\epsilon))=\{(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4}),(\tfrac{3}{4},\tfrac{1}{4}),(\tfrac{3}{4},\tfrac{1}{2})\}
\end{aligned}$$

が得られる．

6.6.3 $G(c,\iota)$

G の項を計算する．定義に代入すると

$$\begin{aligned}
G(c_1,\iota_i)=&\log\Gamma_1(\tfrac{1}{4},1)+\log\Gamma_2(\tfrac{1}{4}+\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))\\
&+\log\Gamma_2(1+\tfrac{1}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))+\log\Gamma_2(\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))
\end{aligned}$$

であるが, 課題 5-(2) より

$$\Gamma_1(\tfrac{1}{4},1)\Gamma_2(\tfrac{1}{4}+\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))=\Gamma_2(\tfrac{1}{4},(1,\epsilon^{(i)}))$$

が分かる．結局

$$G(c_1,\iota_i)=\log\left(\Gamma_2(\tfrac{1}{4},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(1+\tfrac{1}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))\right).$$

と書ける．同様に求めると

$$\begin{aligned}
G(c_2,\iota_i)&=\log\left(\Gamma_2(\tfrac{3}{4},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(1+\tfrac{3}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))\right),\\
G(c_3,\iota_i)&=\log\left(\Gamma_2(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))\right),\\
G(c_4,\iota_i)&=\log\left(\Gamma_2(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))\right)
\end{aligned}$$

となる．

6.6.4 $W(c,\iota)$

W の項を計算するために次を決める．

- $\log_\iota\colon I_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}\to\mathbb{R}$ の定義中の $\alpha_{\mathfrak{p}}$ は D からとると決める．とくに $\log_{\iota_i}(\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})=\log 4$.

注意 50 を使って $\zeta(0,c_k)$ 計算すると

$$\begin{aligned}
&\zeta(0,c_1)\\
&=-B_1(\tfrac{1}{4})+\epsilon\left(\tfrac{B_2(1)}{2}+\tfrac{B_2(\frac{1}{4})}{2}+\tfrac{B_2(\frac{3}{4})}{2}\right)+\left(B_1(\tfrac{1}{4})B_1(1)+B_1(1)B_1(\tfrac{1}{4})+B_1(\tfrac{3}{4})B_1(\tfrac{3}{4})\right)\\
&\quad+\epsilon^{-1}\left(\tfrac{B_2(\frac{1}{4})}{2}+\tfrac{B_2(1)}{2}+\tfrac{B_2(\frac{3}{4})}{2}\right)\\
&=\tfrac{1}{4}+\tfrac{\epsilon}{16}+\tfrac{-3}{16}+\tfrac{\epsilon^{-1}}{16}=\tfrac{1}{4}.
\end{aligned}$$

となる．同様に計算すれば

- $\zeta(0,c_1)=\frac{1}{4}$, $\zeta(0,c_2)=\frac{1}{4}$, $\zeta(0,c_3)=-\frac{1}{4}$, $\zeta(0,c_4)=-\frac{1}{4}$.

がわかる．よって

$$\begin{aligned} W(c_1,\iota_i) &= -\tfrac{1}{2}\log 2,\\ W(c_2,\iota_i) &= -\tfrac{1}{2}\log 2,\\ W(c_3,\iota_i) &= \tfrac{1}{2}\log 2,\\ W(c_4,\iota_i) &= \tfrac{1}{2}\log 2 \end{aligned}$$

である．

6.6.5 $V(c,\iota)$

V の定義を今の場合に書き下すと $A := \left[\begin{smallmatrix} 1 & \epsilon^{(1)} \\ 1 & \epsilon^{(2)} \end{smallmatrix}\right]$ とおいて

$$V(c_k,\iota_i) = \frac{1}{4}\sum_{|\boldsymbol{l}|=2}(C_{\boldsymbol{l},1,2}(A)+C_{\boldsymbol{l},2,1}(A))\sum_{\boldsymbol{x}\in R(c_k,(1,\epsilon))}\prod_{m=1}^{2}\frac{B_{l_m}(x_m)}{l_m!}.$$

となり, i によらないことが分かる ($n>2$ の場合はもっと複雑である)．補題 27 により

$$C_{\boldsymbol{l},1,2}(A)+C_{\boldsymbol{l},2,1}(A) = \begin{cases} \left(\frac{\epsilon^{(1)}}{1}-\frac{\epsilon^{(2)}}{1}\right)\log\left(\frac{1}{1}\right)=0 & (\boldsymbol{l}=(0,2)) \\ 0 & (\boldsymbol{l}=(1,1)) \\ \left(\frac{1}{\epsilon^{(1)}}-\frac{1}{\epsilon^{(2)}}\right)\log\left(\frac{\epsilon^{(1)}}{\epsilon^{(2)}}\right)=-2\sqrt{5}\log\epsilon & (\boldsymbol{l}=(2,0)) \end{cases}$$

が分かり, 代入して

$$V(c_k,\iota_i) = \frac{-\sqrt{5}\log\epsilon}{4}\sum_{(x,y)\in R(c_k,(1,\epsilon))}B_2(x)$$

を得る．よって

$$\begin{aligned} V(c_1,\iota_i) &= \tfrac{-\sqrt{5}}{32}\log\epsilon,\\ V(c_2,\iota_i) &= \tfrac{-\sqrt{5}}{32}\log\epsilon,\\ V(c_3,\iota_i) &= \tfrac{\sqrt{5}}{32}\log\epsilon,\\ V(c_4,\iota_i) &= \tfrac{\sqrt{5}}{32}\log\epsilon \end{aligned}$$

となる．

6.6.6 $\exp(X(c,\iota))$

以上をまとめておく.

命題 61. $F=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ のイデアル類 $c_1=[(1)], c_2=[(3)], c_3=[(4+\sqrt{5})], c_4=[(6+\sqrt{5})]\in C_{(4)\infty_1\infty_2}$ に対して

$$\begin{aligned}
\exp(X(c_1,\iota_i)) &= 2^{-\frac{1}{2}}\epsilon^{\frac{-\sqrt{5}}{32}}\cdot\Gamma_2(\tfrac{1}{4},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(1+\tfrac{1}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)})),\\
\exp(X(c_2,\iota_i)) &= 2^{-\frac{1}{2}}\epsilon^{\frac{-\sqrt{5}}{32}}\cdot\Gamma_2(\tfrac{3}{4},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(1+\tfrac{3}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)})),\\
\exp(X(c_3,\iota_i)) &= 2^{\frac{1}{2}}\epsilon^{\frac{\sqrt{5}}{32}}\cdot\Gamma_2(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)})),\\
\exp(X(c_4,\iota_i)) &= 2^{\frac{1}{2}}\epsilon^{\frac{\sqrt{5}}{32}}\cdot\Gamma_2(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{4}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)}))\Gamma_2(\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}\epsilon^{(i)},(1,\epsilon^{(i)})).
\end{aligned}$$

ただし $\epsilon=\epsilon^{(1)}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\epsilon^{(2)}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ である.

7 Stark conjecture

この節では Stark 予想と多重ガンマ関数の関係を紹介する. ただし, 類体論を前提としていないため, 弱い形での予想・命題の紹介となる. 実際の Stark 予想 (予想群) はより多くの場合に, より細かい性質まで定式化されている.

7.1 代数性

定義 62. F を n 次総実体とし, その実素点 (実埋め込み) に番号を付けて

$$\mathrm{Hom}(F, \mathbb{R}) = \{\iota_1, \ldots, \iota_n\} = \{\infty_1, \ldots, \infty_n\}$$

で表す. $\mathfrak{f}$ を整イデアルとし, イデアル類群

$$C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_n} = I_{\mathfrak{f}}/P_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_n}$$

を考える.

(1) $i = 1, \ldots, n$ に対し $\nu_i \in \mathcal{O}_F$ で

$$\nu_i \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}, \quad \begin{cases} \nu_i^{(k)} > 0 & (i \neq k) \\ \nu_i^{(i)} < 0 \end{cases}$$

を満たすものをひとつとる.

(2) $s_i := [(\nu_i)] \in C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_n}$ とおく.

このイデアル類 s_i は (1) の元の取り方によらない. (さらに s_i は Artin 写像で実素点 ∞_i に付随する複素共役写像へ移る [Y, §5.1, Chap. 3, p108-].)

以下の予想は rank 1 abelian Stark conjecture の一部 (実素点が完全分解する場合, かつ Stark 単数の代数性のみ) である.

予想 63. 自明な例外 ($F = \mathbb{Q}$, $\mathfrak{f} = (1)$, $\zeta(s, c) = \zeta(s, cs_i) = \zeta(s)$) 以外の場合を考える. 任意の $c \in C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_n}$ と任意の $k = 1, \ldots, n$ に対し

$$\exp(\zeta'(0, c) + \zeta'(0, cs_k)) \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}.$$

自明な例外以外では

$$\zeta(0, c) + \zeta(0, cs_k) = 0$$

が成り立つ ([Y, Lemma 5.2, p109]) ので, Stark 予想は L 関数の先頭項に関する予想群 (Beilinson's conjecture, Bloch-Kato conjecture, 玉河数予想, など) の仲間である.

新谷公式と, これを利用して定義した前節の X 不変量を用いれば, 予想 63 を以下に書き換えることができる.

予想 64. 自明な例外を除き, 任意の $c \in C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_n}$ と任意の $k = 1, \ldots, n$ に対し

$$\prod_{i=1}^{n} \exp(X(c, \iota_i) + X(cs_k, \iota_i)) \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}.$$

以下の定理は吉田氏により $n = 2$ の場合に示され, 筆者が一般の n に拡張した [K., On the algebraicity of some products of special values of Barnes' multiple gamma function, to appear in *Amer. J. Math.*]. §8 で証明の概略を与える.

定理 65. $n \geq 2$ とする. このとき任意の $c \in C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_n}$ に対し

$$i \neq k \Rightarrow \exp(X(c, \iota_i) + X(cs_k, \iota_i)) \in \iota_i(E_{F,+})^{\mathbb{Q}}.$$

より詳しく以下が言える： 新谷の基本領域 D, 狭義イデアル類群の完全代表系 $\{\mathfrak{a}_\mu\}$, および k を固定して考える. このとき任意の $c \in C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_n}$ に対し

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \exists u = u_c \in E_{F,+} \text{ s.t. } \forall i \neq k,\ \exp(X(c, \iota_i) + X(cs_k, \iota_i)) = (u^{(i)})^{\frac{1}{N}}.$$

この定理により予想 63 は以下に書き換えられた.

予想 66. 自明な例外を除き, 任意の $c \in C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_n}$ と任意の $k = 1, \ldots, n$ に対し

$$\exp(X(c, \iota_k) + X(cs_k, \iota_k)) \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}.$$

7.2 $F = \mathbb{Q}$ の場合

§6.5 と同じ状況を考える. $1 \leq a \leq f$, $(a, f) = 1$ に対し

$$[(a)] \in C_{(f)\infty} \quad \Rightarrow \quad \exp(X([(a)], \mathrm{id})) = \frac{f^{\frac{a}{f} - \frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \Gamma(\tfrac{a}{f})$$

であった. $s := s_1$ は

$$\nu_1 = 1 - f \Rightarrow s = [(1 - f)] = [(f - 1)]$$

であり,

$$[(a)]s = [(a)][(f - 1)] = [(af - a)] \overset{af - a \equiv f - a \bmod f}{=} [(f - a)]$$

なので, 予想 63 は

$$\begin{aligned} \exp(\zeta'(0, [(a)])) \exp(\zeta'(0, [(a)]s)) &= \exp(X([(a)], \mathrm{id})) \exp(X([(f - a)], \mathrm{id})) \\ &= \frac{1}{2\pi} \Gamma(\tfrac{a}{f}) \Gamma(\tfrac{f-a}{f}) \end{aligned}$$

が代数的数であることを言っている. この場合は Euler's reflection formula (と Euler の公式 $e^{it} - e^{-it} = 2i \sin t$) より

$$= \frac{1}{2 \sin(\frac{a}{f}\pi)} = \frac{i}{e^{\frac{a\pi i}{f}} - e^{-\frac{a\pi i}{f}}} = \frac{i}{\zeta_{2f}^{a} - \zeta_{2f}^{-a}} \qquad (\zeta_k := e^{\frac{2\pi i}{k}}\text{: 1 の原始 } k \text{ 乗根})$$

となり, 予想 63 が示される.

注意 67. $u([(a)]) := \exp(\zeta'(0,[(a)]))\exp(\zeta'(0,[(a)]s))$ $(1 \le a \le f,\ (a,f)=1)$ とおく.

(1) 円分体の場合の類体論は, 群としての同型

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^\times & \xrightarrow{\cong} & C_{(f)\infty} & \xrightarrow{\mathrm{Art},\cong} & \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_f)/\mathbb{Q}) \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ a \bmod f & \mapsto & [(a)] & \mapsto & [\sigma_a\colon \zeta_f \mapsto \zeta_f^a] \end{array} \qquad (1 \le a \le f,\ (a,f)=1)$$

を与える. さらに $1 \le a, b \le f$, $(ab, f) = 1$ に対して

$$u([(a)])^2 = \frac{-1}{\zeta_f^a + \zeta_f^{-a} - 2} \in \mathbb{Q}(\zeta_f),$$
$$\sigma_b\left(u([(a)])^2\right) = u([(ab)])^2$$

が成り立っていることが分かる.

(2) $u([(a)])^2$ は <u>円単数</u> と呼ばれる. 実際に f が素数の冪でない場合は $\mathbb{Q}(\zeta_f + \zeta_f^{-1})$ の単数となる.

(3) $\mathbb{Q}(\zeta_f + \zeta_f^{-1}, u([(a)]))$ も $\mathbb{Q}$ 上のアーベル拡大となっている.

本来の Stark 予想では, 代数性だけでなく, これら (1), (2), (3) に対応する部分も定式化されている. なお [K., Fermat curves and a refinement of the reciprocity law on cyclotomic units, to appear in *J. Reine Angew. Math.*] において $\exp(\zeta'(0,[(a)]))\exp(\zeta'(0,[(a)]s))$ への相互法則 (1) を

$$\exp(\zeta'(0,[(a)]))\times \text{“補正項” への相互法則}$$

に分解している.

7.3 $[F:\mathbb{Q}]=2$ の場合

命題 61 と同じ状況 ($F=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $C_{(4)\infty_1\infty_2}$) を考える.

$$\nu_1 = 1-4\sqrt{5} \ \Rightarrow\ s_1 = [(1-4\sqrt{5})] \overset{(1-4\sqrt{5})(\frac{-1-\sqrt{5}}{2})=\frac{19+3\sqrt{5}}{2}}{=} [(5+3\epsilon)] \overset{(6.3)}{=} c_3,$$
$$\nu_2 = 1+4\sqrt{5} \ \Rightarrow\ s_2 = [(1+4\sqrt{5})] \overset{(1+4\sqrt{5})(\frac{1+\sqrt{5}}{2})=\frac{21+5\sqrt{5}}{2}}{=} [(3+5\epsilon)] \overset{(6.3)}{=} c_4$$

が分かる. $c_1c_3=c_3$, $c_1c_4=c_4$, $c_2c_3=c_4$, $c_2c_4=c_3$ であるから, 予想 63 は

$$\exp(X(c_1,\iota_1))\exp(X(c_3,\iota_1))\exp(X(c_1,\iota_2))\exp(X(c_3,\iota_2)),$$
$$\exp(X(c_2,\iota_1))\exp(X(c_4,\iota_1))\exp(X(c_2,\iota_2))\exp(X(c_4,\iota_2)),$$
$$\exp(X(c_1,\iota_1))\exp(X(c_4,\iota_1))\exp(X(c_1,\iota_2))\exp(X(c_4,\iota_2)),$$
$$\exp(X(c_2,\iota_1))\exp(X(c_3,\iota_1))\exp(X(c_2,\iota_2))\exp(X(c_3,\iota_2))$$

の代数性を言っており, 予想 66 は

$$\begin{aligned}
&\exp(X(c_1,\iota_1))\exp(X(c_3,\iota_1)),\\
&\exp(X(c_2,\iota_1))\exp(X(c_4,\iota_1)),\\
&\exp(X(c_1,\iota_2))\exp(X(c_4,\iota_2)),\\
&\exp(X(c_2,\iota_2))\exp(X(c_3,\iota_2))
\end{aligned}$$

の代数性を言っている. これらを課題 6 を使ってまとめると, それぞれ

$$\begin{aligned}
&\exp(X(c_1,\iota_1))\exp(X(c_3,\iota_1))\\
&=\Gamma_2(\tfrac{1}{4},(1,\tfrac{1}{2}\epsilon))\Gamma_2(1+\tfrac{1}{4}\epsilon,(1,\epsilon))\Gamma_2(\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{4}\epsilon,(1,\epsilon))\Gamma_2(\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}\epsilon,(\tfrac{1}{2},\epsilon)),\\
&\exp(X(c_2,\iota_1))\exp(X(c_4,\iota_1))\\
&=\Gamma_2(\tfrac{3}{4},(1,\tfrac{1}{2}\epsilon))\Gamma_2(1+\tfrac{3}{4}\epsilon,(1,\epsilon))\Gamma_2(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\epsilon,(\tfrac{1}{2},\epsilon))\Gamma_2(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\epsilon,(1,\epsilon)),\\
&\exp(X(c_1,\iota_2))\exp(X(c_4,\iota_2))\\
&=\Gamma_2(\tfrac{1}{4},(1,\epsilon'))\Gamma_2(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\epsilon',(\tfrac{1}{2},\epsilon'))\Gamma_2(\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{4}\epsilon',(1,\tfrac{1}{2}\epsilon'))\Gamma_2(\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}\epsilon',(1,\epsilon')),\\
&\exp(X(c_2,\iota_2))\exp(X(c_3,\iota_2))\\
&=\Gamma_2(\tfrac{3}{4},(1,\epsilon'))\Gamma_2(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\epsilon',(1,\tfrac{1}{2}\epsilon'))\Gamma_2(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\epsilon',(1,\epsilon'))\Gamma_2(\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{4}\epsilon',(\tfrac{1}{2},\epsilon'))
\end{aligned}$$

となる. ただし $\epsilon=\epsilon^{(1)}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\epsilon'=\epsilon^{(2)}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ である. [Y, Example 6.3, p128] ではこれらの値が求められており, 以下が分かる.

$$\begin{aligned}
\exp(X(c_1,\iota_1))\exp(X(c_3,\iota_1))&=\sqrt{\epsilon_0}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{\frac{1}{2}},\\
\exp(X(c_2,\iota_1))\exp(X(c_4,\iota_1))&=\sqrt{\epsilon_0}^{-1}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{-\frac{1}{2}},\\
\exp(X(c_1,\iota_2))\exp(X(c_4,\iota_2))&=(1+\sqrt{\epsilon_0})^{\frac{1}{2}},\\
\exp(X(c_2,\iota_2))\exp(X(c_3,\iota_2))&=(1+\sqrt{\epsilon_0})^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

ただし $\epsilon_0=\epsilon^{\frac{1}{2}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ である. なお $K:=\mathbb{Q}(\sqrt{\epsilon_0})$ に対し

$$\begin{aligned}
&[K:\mathbb{Q}]=4,\quad r_1=2,\quad r_2=1,\\
&E_K=\left\{\pm\sqrt{\epsilon_0}^k(1+\sqrt{\epsilon_0})^l \mid k,l\in\mathbb{Z}\right\}
\end{aligned}$$

である.

注意 68. 一般に, 大多数の $\exp(X(c_k,\iota_i))$ は (おそらく) 超越数であり, 正しいペアを掛け合わせると, それらの超越数部分がキャンセルして代数的数になっている. §9 において, この超越数部分に関する議論を行う.

8 Monomial relations on multiple gamma functions.

定理 65 の証明の概略を述べる.

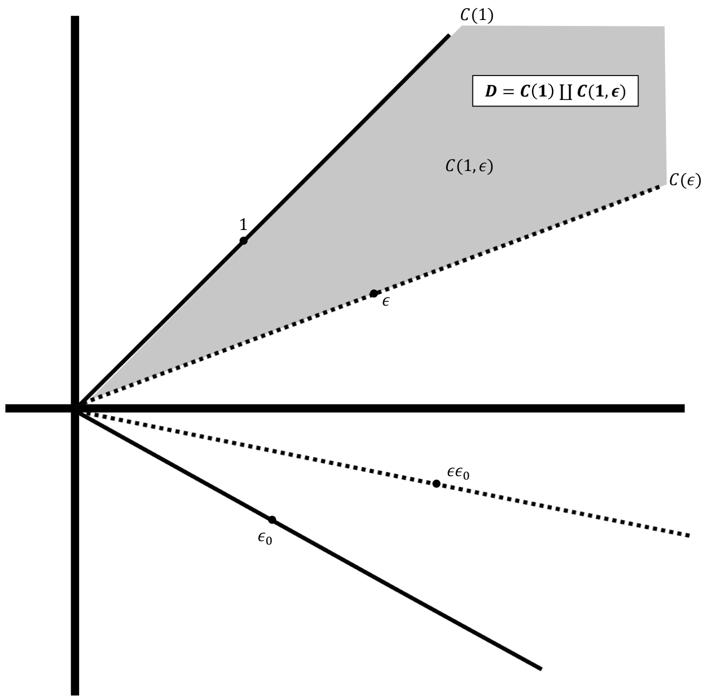
8.1 $[F:\mathbb{Q}]=2$ の場合

$[F:\mathbb{Q}]=2$ の場合は吉田氏による [Y, Theorem 5.8, p116, Theorem 5.12, p123]. 更に, この場合は $(u^{(i)})^{\frac{1}{N}}$ が具体的に与えられている. 簡単のため以下を仮定する.

- $[F:\mathbb{Q}]=2$.
- $\exists\epsilon_0\in E_F$ s.t. $\epsilon_0^2=\epsilon$, $\epsilon_0^{(1)}>0$, $\epsilon_0^{(2)}<0$.
- $C_{\mathfrak{f}\infty_1\infty_2}\ni s_2\neq[(1)]$.

命題 61 と §7.3 はこの場合に当たる. 証明のポイントは以下の領域を考えることである:

$$\mathfrak{D}:=C(1)\coprod C(1,\epsilon_0)\coprod C(\epsilon_0).$$



1 次元の cone (半直線) は, 上から順に $C(1),C(\epsilon),C(\epsilon_0\epsilon),C(\epsilon_0)$ となる. また

$$\mathfrak{D}\not\subset\mathbb{R}_+^2. \text{ とくに } \iota_1(\mathfrak{D})\subset\mathbb{R}_+,\ \iota_2(\mathfrak{D})\not\subset\mathbb{R}_+.$$

$$D\coprod\epsilon_0D=\mathfrak{D}-\epsilon\mathfrak{D}. \tag{8.1}$$

となっている. $\mathfrak{D}$ の部分集合 X で, いくつかの cone の和集合として書けるものに対して

$$Z(X) := Z(c \cup cs_2, X, \{\mathfrak{a}_\mu\}) := \left\{z \in X \cap (\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-1} \mid z\mathfrak{a}_c\mathfrak{f} \in c \cup cs_2\right\}$$

という集合を考える. 命題 39 と同様に

- $R(c\cup cs_2, \boldsymbol{v}) := R(c\cup cs_2, \boldsymbol{v}, \{\mathfrak{a}_\mu\}) := \{\boldsymbol{x} \in (\mathbb{Q}\cap(0,1])^r \mid \boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{v} \in (\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-1},\ (\boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{v})\mathfrak{a}_c\mathfrak{f} \in c\cup cs_2\}$ は有限集合である
- $Z(C(\boldsymbol{v})) = \coprod_{\boldsymbol{x}\in R(c\cup cs_2,\boldsymbol{v})}\{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{m})\,{}^t\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}\}$.

が言える. ただし以下の二点に注意.

- $[(\nu_2)] = [(\nu_2\epsilon_0)] = [(1)] \in C_{(1)\infty_1\infty_2}$ より $\mathfrak{a}_c = \mathfrak{a}_{cs_2}$ である.
- $C(\boldsymbol{v}) \not\subset \mathbb{R}^2_+$ より "$z, v_i \in C(\boldsymbol{v}) \Rightarrow (z+v_i)/z \in F_+$" が言えない. $\iota_1(C(\boldsymbol{v})) \subset \mathbb{R}_+$ ではあるので

  $$z\mathfrak{a}_c\mathfrak{f} \in c \Rightarrow (z+v_i)\mathfrak{a}_c\mathfrak{f} \in c \cup c_{s_2}$$

  は言える. (ここに $c\cup cs_2$ が効いている.)

よって $\iota_1(\mathfrak{D}) \subset \mathbb{R}_+$ より, 命題 45 の証明中の

$$\zeta(s, Z(X)) := \zeta_{(1)}(s, Z(X)) = \sum_{z\in Z(X)} z^{-s}$$

が定義できる.

補題 69. (1) $Z(D) = \{z \in D\cap(\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-1} \mid z\mathfrak{a}_c\mathfrak{f} \in c\}\coprod\{z \in D\cap(\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-1} \mid z\mathfrak{a}_c\mathfrak{f} \in cs_2\}$. とくに

$$G(Z(D)) = G(c, \iota_1) + G(cs_2, \iota_1),$$
$$\zeta(0, Z(D)) = \zeta(0, c) + \zeta(0, cs_2) \in \mathbb{Q}.$$

(2) $u = \epsilon_0, \epsilon$ に対して $Z(uX) = uZ(X)$.

証明. (1) 前半は自明 ($s_2 \neq [(1)]$ を仮定しているので非交和). $\zeta(0, Z(D))$ に関しては命題 57 より.

(2) $Z(uX) = \{z \in uX\cap(\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-1} \mid z\mathfrak{a}_c\mathfrak{f} \in c\cup cs_2\} \overset{u\in E_F}{=} u\{z \in X\cap(\mathfrak{a}_c\mathfrak{f})^{-1} \mid z\mathfrak{a}_c\mathfrak{f} \in c\cup cs_2\} = uZ(X)$. □

$D\coprod\epsilon_0 D = \mathfrak{D} - \epsilon\mathfrak{D}$ より以下の (8.2), (8.3) は同じ値である.

$$\begin{aligned}
&G(Z(D)) + G(Z(\epsilon_0 D))\\
&\overset{\text{補題 69-(2)}}{=} G(Z(D)) + G(\epsilon_0 Z(D))\\
&\overset{(6.1)}{=} 2G(Z(D)) - \zeta(0, Z(D))\log\epsilon_0\\
&\overset{\text{補題 69-(1)}}{=} 2G(c,\iota_1) + 2G(cs2,\iota_1) - (\zeta(0,c)+\zeta(0,cs_2))\log\epsilon_0, \qquad (8.2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
G(Z(\mathfrak{D})) - G(Z(\epsilon\mathfrak{D})) &\overset{\text{補題 }69\text{-}(2)}{=} G(Z(\mathfrak{D})) - G(\epsilon Z(\mathfrak{D})) \\
&\overset{(6.1)}{=} \zeta(0, Z(\mathfrak{D})) \log \epsilon.
\end{aligned} \tag{8.3}
$$

よって

$$
G(c, \iota_1) + G(cs_2, \iota_1) = \frac{1}{2}(\zeta(0, c) + \zeta(0, cs_2)) \log \epsilon_0 + \frac{1}{2}\zeta(0, Z(\mathfrak{D})) \log \epsilon
$$

という表記を得た．なお $\zeta(0, Z(\mathfrak{D})) \in \mathbb{Q}$ とは限らない．同様に W, V の項も明示的に計算すると

$$
X(c, \iota_1) + X(cs_2, \iota_1) = r \log \epsilon \quad (r \in \mathbb{Q})
$$

の形になることが分かる．

注意 70. $\iota_2(\mathfrak{D}) \not\subset \mathbb{R}_+$ なので，$X \subset \mathfrak{D}$ に対して $\zeta_{(2)}(s, Z(X))$ は定義できない．これが $\exp(X(c, \iota_2)) \exp(X(cs_2, \iota_2))$ や $\exp(X(c, \iota_1)) \exp(X(cs_1, \iota_1))$ の代数性が示せない (Stark 予想が難しい) ことの理由である．

8.2 一般の場合の証明のポイント

8.2.1 新谷の基本領域の “対称性”

(8.1) の一般化として以下が成り立つ．

補題 71. F を任意の総実体とする．このとき新谷の基本領域 D, 元 $\nu \in F$, 部分集合 $X_t \subset F \otimes \mathbb{R}$, 総正単数 $\epsilon_t \in E_{F,+}$ $(t \in T,\ |T| < \infty)$ が存在して以下を満たす:

- 各 X_t は有限個の cone の非交和として表せる．
- $i = 1, \ldots, n-1$ に対して $\iota_i(X_t) \subset \mathbb{R}_+$.
- $i = 1, \ldots, n-1$ に対して $\iota_i(\nu), \ldots, \iota_{n-1}(\nu) > 0$. また $\iota_n(\nu) < 0$
- $(D \coprod \nu D) \uplus \left(\biguplus_{t \in T} \epsilon_t X_t\right) = \biguplus_{t \in T} X_t$. ただし $\uplus$ は multiset としての和を表す．

(8.1) の状況で言えば $|T| = 1$, $X_1 = C(1) \coprod C(1, \epsilon_0) \coprod C(\epsilon_0)$, $\epsilon_1 = \epsilon$, $\nu = \epsilon_0$ となる．

8.2.2 V の取り扱い

吉田氏は V を明示的に計算していたが，一般には $\zeta_{(i,k)}(s, Z)$ の収束の問題がある．$\zeta_{(i,k)}(s, Z)$ が仮に定義できたとして，導かれる多重ゼータ値の関係式を形式的に証明した．論文中では色々な補題を作って証明したが, 基本的に次のアイデアで証明できる．(さらに [A. Baker, Linear forms in the logarithms of algebraic numbers II, *Mathematika* **14** (1967), pp102–107] にある log の一次独立性の議論も合わせる．)

- $\zeta_{(i,k)}(s,Z)$ が定義できる場合に導かれる多重ゼータ値の関係式は $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{v}_i$ の成分達の有理式 $P(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{v}_i \mid i=1,2,3)=0$ の形である.
- 本当に定義できる場合は, この有理式 $P(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{v}_i \mid i=1,2,3)=0$ が導ける.
- 無限個の $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{v}_i$ に対して成り立つので $P(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{v}_i \mid i=1,2,3)=0$ は不変式.
- $\zeta_{(i,k)}(s,Z)$ が定義できなくても必要な多重ゼータ値の関係式 $P(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{v}_i \mid i=1,2,3)=0$ が得られた.

9 Yoshida's conjecture

9.1 CM 周期

定義 72. 総実体の総虚な 2 次拡大を <u>**CM 体**</u> と呼ぶ. とくに CM 体の次数は必ず偶数である.

虚二次体は CM 体である. また円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ も $\mathbb{Q}(\zeta_m+\zeta_m^{-1})=\mathbb{Q}(\cos(\frac{2\pi}{m}))$ が総実体になるため, CM 体である ($m\geq 3$).

定理 73. K を $2n$ 次の CM 体とする. 代数体 L 上定義されたアーベル多様体 A が <u>K による虚数乗法をもつ</u> とは

$$\exists\theta\colon K\overset{\cong}{\to}\mathrm{End}(A)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$$

となることである. このとき以下が成り立つ.

(1) A が K による虚数乗法をもつとき $[K:\mathbb{Q}]=2\dim A$.

(2) A の正則一次微分形式全体のなす集合を $\Omega^1(A)$ で表す. このとき $\Omega^1(A)$ は $\dim A$ 次元 L ベクトル空間となる. A が K による虚数乗法をもつとき, K の作用

$$K\overset{\theta}{\cong}\mathrm{End}(A)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\curvearrowright\Omega^1(A)\otimes_L\mathbb{C}$$

は, n 個の $\sigma_i\in\mathrm{Hom}(K,\mathbb{C})$ を用いて $\bigoplus_{i=1}^n\sigma_i$ と同値となる. とくに $\sigma\in\Phi$ に対して

$$\exists\omega_\sigma\in\Omega^1(A),\neq 0 \text{ s.t. } \forall z\in K,\ z\cdot\omega_\sigma=\omega_\sigma\otimes\sigma(z).$$

この $\Phi=\{\sigma_1,\ldots,\sigma_n\}$ を A の CM 型と呼ぶ.

(3) A が K による虚数乗法をもつとき A の CM 型 Φ は

$$\Phi\coprod\Phi\rho=\mathrm{Hom}(K,\mathbb{C})$$

を満たす. ここで $\rho\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ は複素共役写像を表し $\Phi\rho=\{\rho\circ\sigma\mid\sigma\in\Phi\}$ である. 逆にこの関係をみたす Φ に対し, Φ を CM 型とするアーベル多様体 A が必ず存在する.

例えば $K=\mathbb{Q}(i)$ で虚数乗法をもつアーベル多様体は, 楕円曲線 $E_1\colon y^2=x^3-x$ が取れる. $\Omega^1(E_1)=\mathbb{Q}\frac{dx}{y}$ であり

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{Q}(i) & \overset{\theta}{\to} & \mathrm{End}(E_1)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\\ \cup & & \cup\\ i & \mapsto & [(x,y)\mapsto(-x,iy)]\end{array}$$

とおけば

$$i \cdot \frac{dx}{y} = \frac{dx}{y} \circ [(x,y) \mapsto (-x, iy)] = \frac{d(-x)}{iy} = i\frac{dx}{y} = \frac{dx}{y} \otimes i$$

なので $\Phi = \{\mathrm{id}\}$, $\omega_{\mathrm{id}} = \frac{dx}{y}$ となる. 一方で θ を

$$\theta \colon \mathbb{Q}(i) \to \mathrm{End}(E_1) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \quad i \mapsto [(x,y) \mapsto (-x, -iy)]$$

に取り換えれば $\Phi = \{\rho\}$, $\omega_\rho = \frac{dx}{y}$ である.

定義 74. 複素数 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して

$$\alpha \sim \beta \overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} \beta \neq 0,\ \alpha/\beta \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

とくに $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^\times$ であれば

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \alpha \equiv \beta \bmod \overline{\mathbb{Q}}^\times \\ &\Leftrightarrow \alpha \bmod \overline{\mathbb{Q}}^\times = \beta \bmod \overline{\mathbb{Q}}^\times \in \mathbb{C}^\times/\overline{\mathbb{Q}}^\times \end{aligned}$$

である. α または $\beta \in \mathbb{C}^\times/\overline{\mathbb{Q}}^\times$ でも同じ記号を用いることとする.

定理 75. K を $2n$ 次の CM 体とする. 各元 $\sigma \in \mathrm{Hom}(K, \mathbb{C})$ で (形式的に) 生成される $\mathbb{Z}$-加群

$$I_K := \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{Hom}(K,\mathbb{C})} \mathbb{Z}\sigma$$

を考える. このとき以下を満たす双線形写像

$$p_K(*,*) \colon I_K \times I_K \to \mathbb{C}^\times/\overline{\mathbb{Q}}^\times$$

が存在して以下を満たす.

(1) A が K による虚数乗法をもつとし, CM 型 $\Phi = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ を $\sum_{i=1}^n \sigma \in I_K$ と同一視する. このとき, 各 $\sigma \in \Phi$ と任意の閉曲線 $\gamma \subset A(\mathbb{C})$ に対し

$$\int_\gamma \omega_\sigma \sim \pi p_K(\sigma, \Phi)$$

が成り立つ.

(2) $\forall \xi, \eta \in I_K$, $p_K(\xi\rho, \eta) \sim p_K(\xi, \eta\rho) \sim p_K(\xi, \eta)^{-1}$.

(3) $\forall \xi, \eta \in I_K$, $\forall \gamma \colon K' \overset{\cong}{\to} K$, $p_{K'}(\gamma\xi, \gamma\eta) \sim p_K(\xi, \eta)$.

(4) 体の拡大 $K \subset L$ に対し, 二種類の線形写像を

$$\operatorname{Inf}\colon I_K \to I_L,\ \operatorname{Hom}(K,\mathbb{C}) \ni \sigma \mapsto \sum_{\substack{\tau \in \operatorname{Hom}(L,\mathbb{C}) \\ \tau|_K = \sigma}} \tau,$$
$$\operatorname{Res}\colon I_L \to I_K,\ \operatorname{Hom}(L,\mathbb{C}) \ni \sigma \mapsto \sigma|_K$$

で定める. K, L が CM 体であるとき

$$p_K(\xi, \operatorname{Res}(\eta)) \sim p_L(\operatorname{Inf}(\xi), \eta),\ p_K(\operatorname{Res}(\eta), \xi) \sim p_L(\eta, \operatorname{Inf}(\xi)) \quad (\xi \in I_K,\ \eta \in I_L).$$

先の例より

$$p_{\mathbb{Q}(i)}(\mathrm{id}, \mathrm{id}) \sim p_{\mathbb{Q}(i)}(\rho, \rho) \sim \pi^{-1} 2 \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - x}} = \pi^{-1} B(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}) = \pi^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})}$$

が分かる. 一般に円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ $(n \geq 3)$ の場合の CM 周期は, おおよそ以下のように計算できる. フェルマー曲線を

$$F_n\colon x^n + y^n = 1$$

で定める. これ自体はアーベル多様体ではないが, このヤコビ多様体を既約分解したものが $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ による虚数乗法を持つことが知られている. また $\Omega^1(F_n)$ の基底は

$$\eta_{r,s,t} := x^{r-1} y^{s-n} dx \quad (0 < r, s, t < n,\ r + s + t = n)$$

で与えられる. 適切な積分路により

$$\int_\gamma \eta_{r,s,t} = B(\tfrac{r}{n}, \tfrac{s}{n})$$

となり, $p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}$ の任意の値はベータ関数で (ゆえに Γ 関数でも) 書くことができる. 具体的には [Y, Theorem 2.5, p71] より

$$\begin{aligned} &\sigma_a := [\zeta_n \mapsto \zeta_n^a] \in \operatorname{Hom}(\mathbb{Q}(\zeta_n), \mathbb{C}) \quad (a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times), \\ &\Rightarrow p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\sigma_a, \sigma_b) \sim \pi^{-\frac{\delta_{ab}}{2}} \prod_{\substack{c=1 \\ (c,n)=1}}^{n-1} \Gamma(\tfrac{c}{n})^{\sum_{\eta \in \widehat{(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}^\times_-} \frac{\eta(a^{-1}bc)}{L(0,\eta)\varphi(n)}} \end{aligned} \tag{9.1}$$

と書ける. ただし $\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$ (トーシェント関数) であり, $\eta \in \widehat{(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}^\times_- := \{\chi \in \operatorname{Hom}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times, \mathbb{C}^\times) \mid \chi(-1) = -1\}$ に対し

$$L(0, \eta) = -\frac{1}{n} \sum_{\substack{c=1 \\ (c,n)=1}}^{n-1} \eta(c) c$$

であり,

$$\delta_{ab} := \begin{cases} 1 & (a = b) \\ -1 & (a = -b) \\ 0 & (a \neq \pm b) \end{cases}$$

とおいた.

課題 11. (9.1) を用いて以下を求めよ.

(1) $p_{\mathbb{Q}(i)}(\mathrm{id}, \mathrm{id})$.

(2) $p_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(\mathrm{id}, \mathrm{id})$.

課題 12. (9.1) において, Γ 関数の指数部分 $\sum_{\eta \in (\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}})^\times_-} \frac{\eta(a^{-1}bc)}{L(0,\eta)\varphi(n)}$ が有理数になることを示せ.

9.2 吉田予想

予想 76 (Yoshida's conjecture)**.** K を CM 体とする. p_K の各値は $(\mathrm{mod}\,\overline{\mathbb{Q}}^\times$ で) いくつかの $\exp(X(c, \mathrm{id}))$ の有理数乗の積で表せる. ただし F は K の正規閉包の総実部分体を動き, c はその適当な法のイデアル類を動く. (実際は明示公式あり.)

もとの予想式は p_K を $\exp(X(c, \mathrm{id}))$ で表す式だが, 以下の形に変形できる. 正確には K が CM 体の場合は Yoshida's conjecture と同値な主張であるが, それを一般の K に拡張してある.

予想 77. F を n 次総実体, K をそのアーベル拡大とし, K は CM 体を含むと仮定する. 以下を準備する.

- K/F の導手 (の有限部分) を $\mathfrak{f}_{K/F}$ で表す. とくに Artin 写像

$$\mathrm{Art}\colon C_{\mathfrak{f}_{K/F}\infty_1\cdots\infty_n} \to \mathrm{Gal}(K/F)$$

  が定まる.

- K_{CM} を K に含まれる最大の CM 体とする. Inf を線形に $I_{K_{\mathrm{CM}}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to I_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ へ拡張する.

- $p_{K_{\mathrm{CM}}}$ を線形に $I_{K_{\mathrm{CM}}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \times I_{K_{\mathrm{CM}}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to \mathbb{C}^\times/\overline{\mathbb{Q}}^\times$ へ拡張する.

F の整イデアル $\mathfrak{f}$ で $\mathfrak{f}_{K/F}$ を割り切るものをとり, 自然な射影と Artin 写像との合成

$$\mathrm{Art}_{\mathfrak{f}}\colon C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_n} \to C_{\mathfrak{f}_{K/F}\infty_1\cdots\infty_n} \to \mathrm{Gal}(K/F)$$

を考える. このとき, 各 $\tau \in \mathrm{Gal}(K/F)$ に対し

$$\prod_{\substack{c \in C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_n} \\ \mathrm{Art}_{\mathfrak{f}}(c)=\tau}} \exp(X(c,\mathrm{id})) \sim \pi^{\zeta_{\mathfrak{f}}(0,\tau)} p_{K_{\mathrm{CM}}}(\tau|_{K_{\mathrm{CM}}}, \mathrm{Inf}^{-1}(\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)} \zeta_{\mathfrak{f}}(0,\sigma)\sigma))$$

が成り立つ. ただし

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(0,\tau) = \sum_{\substack{c \in C_{\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_n} \\ \mathrm{Art}_{\mathfrak{f}}(c)=\tau}} \zeta(0,c)$$

である. なお類体論により, 任意の $\mathfrak{f}$ に対し $\mathrm{Art}_{\mathfrak{f}}$ が単射となる K が存在することが分かる. また $X(c,\iota;D,\{\mathfrak{a}_\mu\}) = X(\iota(c),\mathrm{id};\iota(D),\{\iota(\mathfrak{a}_\mu)\})$ に注意.

例として $K/F = \mathbb{Q}(\sqrt{\epsilon_0})/\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ($\epsilon_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$) を考える. [Y, Example 6.3, p128] で扱っている場合であり, このプリントの命題 61 と §7.3 の場合である. このとき $\mathfrak{f}_{K/F} = (4)$, $K_{\mathrm{CM}} = \mathbb{Q}(\sqrt{5},\sqrt{-1})$ となる. 以下が分かる:

$$G := \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})} \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{20})\Gamma(\frac{3}{20})\Gamma(\frac{7}{20})\Gamma(\frac{9}{20})}{\Gamma(\frac{11}{20})\Gamma(\frac{13}{20})\Gamma(\frac{17}{20})\Gamma(\frac{19}{20})} \right)^{\frac{1}{4}}$$

とおくとき

$$\pi p_{\mathbb{Q}(\sqrt{5},\sqrt{-1})}(\mathrm{id},\mathrm{id})^2 \sim G$$

である. また計算により

$$\begin{aligned}
\exp(X(c_1,\iota_1)) &= 80^{-\frac{1}{8}}\epsilon_0^{\frac{1}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{\frac{1}{4}}G^{\frac{1}{4}}, \\
\exp(X(c_2,\iota_1)) &= 80^{-\frac{1}{8}}\epsilon_0^{-\frac{5}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{-\frac{1}{4}}G^{\frac{1}{4}}, \\
\exp(X(c_3,\iota_1)) &= 80^{\frac{1}{8}}\epsilon_0^{\frac{3}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{\frac{1}{4}}G^{-\frac{1}{4}}, \\
\exp(X(c_4,\iota_1)) &= 80^{\frac{1}{8}}\epsilon_0^{\frac{1}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{-\frac{1}{4}}G^{-\frac{1}{4}}, \\
\exp(X(c_1,\iota_2)) &= 80^{-\frac{1}{8}}\epsilon_0^{\frac{1}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{\frac{1}{4}}G^{\frac{1}{4}}, \\
\exp(X(c_2,\iota_2)) &= 80^{-\frac{1}{8}}\epsilon_0^{\frac{3}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{-\frac{1}{4}}G^{\frac{1}{4}}, \\
\exp(X(c_3,\iota_2)) &= 80^{\frac{1}{8}}\epsilon_0^{-\frac{3}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{-\frac{1}{4}}G^{-\frac{1}{4}}, \\
\exp(X(c_4,\iota_2)) &= 80^{\frac{1}{8}}\epsilon_0^{-\frac{1}{8}}(1+\sqrt{\epsilon_0})^{\frac{1}{4}}G^{-\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

が分かり, 予想 77 と合致する.

9.3 考察

前小節の例では $\exp(X(c_1,\iota_1)) \sim \exp(X(c_2,\iota_1)) \sim \exp(X(c_1,\iota_2)) \sim \exp(X(c_2,\iota_2)) \sim \exp(X(c_3,\iota_1))^{-1} \sim \exp(X(c_4,\iota_1))^{-1} \sim \exp(X(c_3,\iota_2))^{-1} \sim \exp(X(c_4,\iota_2))^{-1}$ となっている.

これらは予想 77 の主張に含まれている. これらの関係式のうち, 定理 65 が言っているのは

$$\exp(X(c_1,\iota_1))\exp(X(c_4,\iota_1)),\ \exp(X(c_2,\iota_1))\exp(X(c_3,\iota_1)),$$
$$\exp(X(c_1,\iota_2))\exp(X(c_3,\iota_2)),\ \exp(X(c_2,\iota_2))\exp(X(c_4,\iota_2))$$

の代数性と単数性であり, Stark 予想が言っているのは

$$\exp(X(c_1,\iota_2))\exp(X(c_4,\iota_2)),\ \exp(X(c_2,\iota_2))\exp(X(c_3,\iota_2)),$$
$$\exp(X(c_1,\iota_1))\exp(X(c_3,\iota_1)),\ \exp(X(c_2,\iota_1))\exp(X(c_4,\iota_1))$$

の代数性と単数性 (と相互法則) である. さらに $\iota_2(c_1) = c_1$, $\iota_2(c_2) = c_2$, $\iota_2(c_3) = c_4$, $\iota_2(c_4) = c_3$ より

$$\frac{\exp(X(c_1,\iota_1))}{\exp(X(c_1,\iota_2))},\ \frac{\exp(X(c_2,\iota_1))}{\exp(X(c_2,\iota_2))},\ \frac{\exp(X(c_3,\iota_1))}{\exp(X(c_4,\iota_2))},\ \frac{\exp(X(c_4,\iota_1))}{\exp(X(c_3,\iota_2))}$$

の代数性と単数性が従う (法 $\mathfrak{f}$ が有理整数, ゆえに $\iota_2(\mathfrak{f}) = \mathfrak{f}$ なのが効いている). すなわち予想 77 から代数性が導かれる場合は, 単数性も成り立っている.

さて, 以下のような問題を考える.

(1) $\prod_{i=i}^{k} \exp(X(c_i,\iota_i\}))^{n_i} \in \overline{\mathbb{Q}}$ ($n_i \in \mathbb{Z}$. F も動いて良い) となる条件は？

(2) (1) を満たすとき常に単数 (Gross-Stark 単数と呼ばれる場合は p 単数) となるか？

(3) (1) を満たすとき $\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{Q}}) \Rightarrow \sigma(\prod_{i=i}^{k} \exp(X(c_i,\iota_i;D_i,\{\mathfrak{a}_{i,\mu}\}))^{n_i}) =???$

Stark 予想はこの一部と考えることができる. Stark 予想に帰着できない場合があるか？