類体構成の具体例, 及び p 進周期との関係について

東京理科大学 理工学部 加塩朋和 *
E-mail: kashio_tomokazu@ma.noda.tus.ac.jp

2019 年 3 月 5 日 (火) ～ 3 月 7 日 (木)
坂内研究室 プロジェクト研究集会

会場：ハートピア熱海

*2010 年 2 月 1 日～3 月 31 日 坂内研究室 所属

導入

問題： どんな代数体 (代数的数, 代数的整数) があるか？

e.g., 円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ $(\zeta_n := \exp(\frac{2\pi i}{n}))$, 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$.

Theorem (クロネッカー・ウェーバーの定理)

$K/\mathbb{Q}$: 有限次アーベル拡大 $\Rightarrow \exists n$ s.t. $K \subset \mathbb{Q}(\zeta_n)$.

$$\rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}(\zeta_n) & & \{1\} \\ | & & \cap \\ K & \overset{\text{ガロア対応}}{\leftrightarrow} & \text{部分群} \\ | & & \cap \\ \mathbb{Q} & & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \end{array}$$

$\{K \mid K/\mathbb{Q}\text{: 有限次アーベル拡大}\} \twoheadleftarrow \{(n, S) \mid S \subset (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\}$.

類体論

$k = \mathbb{Q} \Rightarrow k$: 代数体 (固定)

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{Q}(\zeta_n) & & \{1\} & & H_\mathfrak{f} & & \{1\} & & I_\mathfrak{f} \\
| & & \cap & & | & & \cap & & \cap \\
K & \leftrightarrow & \text{部分群} & \Rightarrow & K & \leftrightarrow & \text{部分群} & \leftrightarrow & \text{部分群} \\
| & & \cap & & | & & \cap & & \cap \\
\mathbb{Q} & & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times & & k & & \mathrm{Cl}(k,\mathfrak{f}) := P_\mathfrak{f}/I_\mathfrak{f} & & P_\mathfrak{f}
\end{array}.
$$

- $\mathfrak{f}$: 整因子 $= \mathfrak{f}_0\mathfrak{f}_\infty$, $\mathfrak{f}_0 \subset \mathcal{O}_k$, $\mathfrak{f}_\infty = \rho_1 \cdots \rho_t$, $[\rho_i : k \hookrightarrow \mathbb{R}] \in \{$ 実素点 $\}$.
- $I_\mathfrak{f} := \{\mathfrak{a} \mid (\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = 1\}$, $P_\mathfrak{f} := \langle (\alpha) \mid {}_{\rho_1(\alpha),\ldots,\rho_t(\alpha)>0}^{\alpha \equiv 1 \mod \mathfrak{f}} \rangle$.

Theorem

- $\forall \mathfrak{f}$, $\exists H_\mathfrak{f}/k$: 有限次アーベル拡大 s.t. $\mathrm{Art}\colon \mathrm{Cl}(k,\mathfrak{f}) \cong \mathrm{Gal}(H_\mathfrak{f}/k)$.
- K/k: 有限次アーベル拡大 $\Rightarrow \exists \mathfrak{f}$ s.t. $K \subset H_\mathfrak{f}$.

- $H_\mathfrak{f}$: $\mathfrak{f}$ を法とする射類体 (ray class field), $\mathfrak{f} \fallingdotseq$ "素点の分岐の様子".

$H_\mathfrak{f}, K = ? \rightsquigarrow$ 類体構成問題 (Hilbert の第 12 問題)

有理数体上の類体構成

$\mathbb{Z}$: PID, i.e., $h_{\mathbb{Q}} = |\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}, 1)| = 1$.

$$\begin{array}{rcccc}
\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}, (n)) & = & \frac{\langle (a) | (a,n)=1 \rangle}{\langle (a) | a \equiv 1 \bmod n \rangle} & \cong & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times / \{\pm 1\}, \\
 & & \overline{(\pm a)} & \mapsto & \pm a \bmod n, \\
\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}, (n)\mathrm{id}) & = & \frac{\langle (a) | (a,n)=1 \rangle}{\langle (a) | a \equiv 1 \bmod n,\ a>0 \rangle} & \cong & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times, \\
 & & \overline{(a)}\ (a>0) & \mapsto & a \bmod n.
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{実素点 id も分岐} & H_{(n)\mathrm{id}} & = & \mathbb{Q}(\zeta_n) & & \{1\} \\
| & | & & & & \cap \\
p \mid n \text{ のみ分岐} & H_{(n)} & = & \mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1}) & \leftrightarrow & \{\pm 1\} \\
| & | & & & & \cap \\
2, 3, 5, \ldots, \text{実素点 id} & \mathbb{Q} & & & & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times
\end{array}$$

虚 2 次体上の類体構成 (≒ クロネッカーの青春の夢)

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d}),\ \text{実素点無し} \Rightarrow \mathfrak{f} = \mathfrak{f}_0 \subset \mathcal{O}_k.$$

$$\rightsquigarrow \quad 1 \to (\mathcal{O}_k/\mathfrak{f})^\times/\mathcal{O}_k^\times \to \mathrm{Cl}(k,\mathfrak{f}) \to \mathrm{Cl}(k,1) \to 1$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} H_{\mathfrak{f}} \\ | \\ H_1 \\ | \\ k \end{array} \begin{array}{l} \left.\right) \ (\mathcal{O}_k/\mathfrak{f})^\times/\mathcal{O}_k^\times \\ \\ \left.\right) \ \mathrm{Cl}(k,1) \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c} H \\ | \\ H \\ | \\ k \end{array}}\right) \ \mathrm{Cl}(k,\mathfrak{f})$$

Theorem

$$E\colon y^2 = x^3 + ax + b\ (a, b \in H_1),\ \mathrm{End}(E) \cong \mathcal{O}_k$$

$$\rightsquigarrow k(j_E) = H_1,\ H_{\mathfrak{f}} = H_1(x^{\frac{|\mathcal{O}_k^\times|}{2}}(E[\mathfrak{f}])).$$

- j_E: j-不変量, $E[\mathfrak{f}] = \{P \in E(\mathbb{C}) \mid \forall \alpha \in \mathfrak{f},\ \alpha P = O_E\}$: $\mathfrak{f}$-ねじれ点.
- $x(E[\mathfrak{f}]) = \{P \in E[\mathfrak{f}]$ の x 座標 $\}$, $\frac{|\mathcal{O}_k^\times|}{2} = 1, 2, 3$.

虚 2 次体上の類体構成 (≒ クロネッカーの青春の夢)

e.g., $k=\mathbb{Q}(i) \rightsquigarrow E\colon y^2=x^3+x$, $[i\colon (x,y)\mapsto(-x,iy)]\in \mathrm{End}(E)$

- $j(E)=1728 \rightsquigarrow H_1=k(1728)=k$.
- $(1+i)(x,y)=(x,y)+(-x,iy)=(\frac{-iy^2}{2x^2},\frac{(1+i)y^3+(-2+2i)x^3y}{4x^3})$
  $\rightsquigarrow E[1+i]=\{(x,y)\in E(\mathbb{C}) \mid x=0\}\cup O_E=\{O_E,(0,0)\}$
  $\rightsquigarrow H_{1+i}=k(0^2)=k$.
- $2(x,y)=(\frac{-8xy^2+(9x^4+6x^2+1)}{4y^2},\frac{-8y^4+(36x^3+12x)y^2+(-27x^6-27x^4-9x^2-1)}{8y^3})$
  $\rightsquigarrow E[2]=\{(x,y)\in E(\mathbb{C}) \mid y=0\}\cup O_E=\{O_E,(0,0),(i,0),(-i,0)\}$
  $\rightsquigarrow H_2=k(0^2,i^2,(-i)^2)=k$.
- $2(1+i)(x,y)=(\frac{\cdots}{8x^4y^2(1-x^2)^2},\frac{\cdots}{32x^6y^3(1-x^2)^3})$
  $\rightsquigarrow E[2(1+i)]=\{O_E,(0,0),(\pm i,0),(\pm 1,*)\} \rightsquigarrow H_{2(1+i)}=k$.
- $4(x,y)=(\frac{\cdots}{16y^2(x-1)(x+1)(x^4+6x^2+1)},\frac{\cdots}{64y^3(x-1)^3(x+1)^3(x^4+6x^2+1)^3})$
  $\rightsquigarrow E[4]=\{O_E,(0,0),(\pm i,0),(\pm 1,*),(\pm\sqrt{-3\pm 2\sqrt{2}},*)\}$
  $\rightsquigarrow H_4=k((\sqrt{-3\pm 2\sqrt{2}})^2)=k(\sqrt{2})=\mathbb{Q}(\sqrt{-1},\sqrt{2})=\mathbb{Q}(\zeta_8)$.
- $\cdots\Rightarrow k=H_1=H_{1+i}=H_2=H_{2(1+i)}\overset{2}{\subset}H_4\overset{2}{\subset}\cdots$.

虚 2 次体上の類体構成 ($\fallingdotseq$ クロネッカーの青春の夢)

Remark

1. Proof $\cdots$ 虚数乗法論.
2. $P \in E[\mathfrak{f}]$ の x 座標 $\fallingdotseq \dfrac{\wp \text{ 関数}}{\text{CM 周期}}$.

$\square$

虚 2 次体上の類体の整数環

$$\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\zeta_n)} = \mathbb{Z}[\zeta_n],\ \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\zeta_n+\zeta_n^{-1})} = \mathbb{Z}[\zeta_n+\zeta_n^{-1}],\ \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})} = \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \text{ or } \mathbb{Z}[\tfrac{1+\sqrt{d}}{2}].$$

Theorem ($k=\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, Schertz)

下記例外を除いて $\mathcal{O}_{H_\mathfrak{f}} = \mathcal{O}_{H_1}[\exists\theta]$ (Relative Power Integral Bases):

(∗) $d = 1, 3$,
(a) $2, 3$: (k で) 分岐, $\mathfrak{f} = \mathfrak{p}^r \nmid 2$,
(b) 2: 惰性, $3 = \mathfrak{p}_3^2$, $\mathfrak{f} = \mathfrak{p}_3^r$,
(c) $2 = \mathfrak{p}_2^2$, 3: 惰性, $\mathfrak{f} = \mathfrak{p}_2^r$.

Theorem (Cougnard-Fleckinger†, 関川 ‡, etc)

- 以下の $(d, \mathfrak{f})$ に対して $H_\mathfrak{f}/H_1$ は RPIB: case (a) $(19, \mathfrak{p}_{11}), (43, \mathfrak{p}_{11})$, case (b) $(51, (3)), (123, (3))$, case (c) $(10, (4))^{\ddagger}$.
- RPIB でない: case (a) $(d, \mathfrak{f}) = (19, \mathfrak{p}_7)^{\dagger,\ddagger}, (19, (3)), (43, (3)), (67, (3)), (163, (3)), (67, (4)), (163, (4))$, case (b) $(267, (3))$.

※ (†) ⋯ Baker の手法, (‡) ⋯ 基本単数 (計算機) + 代数的整数論. □

Stark 予想 (rank one abelian case, 実素点の場合)

K/k: $\mathfrak{f}$ を導手とする有限次アーベル拡大, $\mathrm{Cl}(k\mathfrak{f}) \overset{\mathrm{Art}}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Gal}(K/k) \ni \sigma$.

$$\zeta(s,\sigma) := \sum_{\substack{\mathfrak{a}\subset\mathcal{O}_k \\ (\mathfrak{a},\mathfrak{f}_0)=1 \\ \mathrm{Art}(\overline{\mathfrak{a}})=\sigma}} N\mathfrak{a}^{-s} \quad (\text{部分ゼータ関数}).$$

Conjecture

k: 総実体, ∃ 実素点 $K \hookrightarrow \mathbb{R}$ のとき

- $u(\sigma) := \exp(-2\zeta'(0,\sigma)) \in K^\times$
- $\tau(u(\sigma)) = u(\tau\sigma)$ $(\sigma,\tau \in \mathrm{Gal}(K/k))$
- $u(\sigma)$ は "なんとか-単数", $K\left(\sqrt{u(\sigma)}\right)/k$: アーベル拡大.

$u(\sigma)$ は Stark 単数と呼ばれる.

※ $\mathrm{ord}_{s=0}\zeta(s,\sigma) = \#\{$ 完全分解する k の実素点 $\}$.

Stark 予想 (rank one abelian case, 実素点の場合)

Example ($k = \mathbb{Q}$)

- $H_{(n)} = \mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1}) = \mathbb{Q}(\cos(\frac{2\pi}{n}))$.
- $\mathrm{Gal}(H_{(n)}/\mathbb{Q}) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times/\{\pm 1\} \ni [\sigma_{\pm a} \colon \zeta_n + \zeta_n^{-1} \mapsto \zeta_n^a + \zeta_n^{-a}]$.
- $\zeta(s, \sigma_{\pm a}) = \sum_{\mathbb{N} \ni k \equiv \pm a \bmod n} k^{-s}$ (Hurwitz ゼータ関数).
- $u(\sigma_{\pm a}) := \exp(-2\zeta'(0, \sigma_{\pm a})) \overset{\text{Lerch}}{=} \left(\frac{2\pi}{\Gamma(\frac{a}{n})\Gamma(\frac{n-a}{n})}\right)^2 \overset{\text{Euler}}{=} (2\sin(\frac{a\pi}{n}))^2$
  $\overset{\text{Euler}}{=} 2 - (\zeta_n^a + \zeta_n^{-a})$.

Remark

1. ある条件下 ($u(\sigma) \neq 1$ かつ 巡回拡大, など) で $K = k(u(\sigma))$
   総実体上の Stark 単数 = [多重ガンマ関数の積 $*$ 補正項] (新谷公式)
   $\rightsquigarrow$ 類体構成.
2. 様々な一般化 (複素/有限素点, higher rank, non-abel, p 進類似, integral refinement) がある.
3. 証明済: $k = \mathbb{Q}, \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, $\mathrm{Gal} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l$, p 進類似 (Gross-Stark). □

Stark 単数と整数環

Recall

$$\mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})/\mathbb{Q} \rightsquigarrow u(\sigma_{\pm a}) = 2 - (\zeta_n^a + \zeta_n^{-a})$$
$$\rightsquigarrow \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})} = \mathbb{Z}[\zeta_n + \zeta_n^{-1}] = \mathbb{Z}[u(\sigma_{\pm 1})]$$
$\rightsquigarrow H_{(n)}/\mathbb{Q}$: Stark 単数 $u := u(\sigma_{\pm 1})$ が PIB を与えている.

Example ($k = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathfrak{f}_0 = \mathfrak{p}_{11}$)

- $\mathrm{Cl}(k, \mathfrak{f}_0 \rho_2) = \mathrm{Gal}(H_{\mathfrak{f}_0 \rho_2}/k) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- $u := u(\mathrm{id}) = \prod_{(x_1, x_2) \in R} \Gamma_2(x_1 + x_2 \epsilon, (1, \epsilon))^{*}$ 補正項
  $= 0.4643126132\ldots$,
  最小多項式 $= x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 1$.
- $\mathcal{O}_{H_{\mathfrak{f}_0 \rho_2}} = \mathcal{O}_k[u]$, i.e., u: RPIB

※ $h := \#\mathrm{Cl}(k, 1)$, $h_+ := \#\mathrm{Cl}(k, \rho_2)$, $h_{++} := \#\mathrm{Cl}(k, \rho_1 \rho_2) = 1$,
総正基本単数 $\epsilon = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

$H_{\mathfrak{f}_0\rho_2}/k=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の RPIB？ $(h=h_+=h_{++}=1)$

$\mathfrak{f}_0$	$\mathrm{Cl}(k,\mathfrak{f}_0\rho_2)$	RPIB？
$\mathfrak{p}_{11}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	u
2^2	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	u
$\mathfrak{p}_{19}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	u
$\mathfrak{p}_{29}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	u
$\mathfrak{p}_{31}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	u
$3\sqrt{5}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	u
$\sqrt{5}\mathfrak{p}'_{11}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	u
$\mathfrak{p}_{59}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	u
2^3	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$\exists$※
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$(u-1)/\sqrt{5}$
$2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	$\exists$
$\mathfrak{p}_{79}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$(u-1)/3$
$2^2\sqrt{5}$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$\exists$

$\sqrt{5}\mathfrak{p}'_{19}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$(u+1)/\pi_{11}$
$3\mathfrak{p}'_{11}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$(u+1)/\sqrt{5}$
$\mathfrak{p}_{101}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$\exists$
$\mathfrak{p}'_{11}\mathfrak{p}_{11}$	$\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$	$\exists$
$2\mathfrak{p}_{31}$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	$\exists$
$\mathfrak{p}_{131}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	u
$\mathfrak{p}_{139}$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	$\exists$
$2^2 3$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$\exists$
$\sqrt{5}\mathfrak{p}'_{29}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$\exists$
$\mathfrak{p}_{151}$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	$\exists$
$\sqrt{5}\mathfrak{p}'_{31}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$(u+1)/3$
$3\mathfrak{p}'_{19}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	u
$2^2\mathfrak{p}'_{11}$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$k(u)\subsetneq H_{\mathfrak{f}_0\rho_2}$
$3\mathfrak{p}'_{31}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$(u-201)/\sqrt{5}\pi_{101}$

※ $\frac{(-13+3\sqrt{5})*u+(-5+3\sqrt{5})*u'+(11-5\sqrt{5})*u''+(11-5\sqrt{5})*u'''}{8}$, etc.

Stark 単数と整数環

$H_{\mathfrak{f}_0\rho_2}/k=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ の RPIB？ $(h=h_+=h_{++}=1)$

$\mathfrak{f}_0$	$\mathrm{Cl}(k,\mathfrak{f}_0\rho_2)$	RPIB？
$\mathfrak{p}_7$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	u
4	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$(u-1)/\sqrt{2}$

$\mathfrak{p}_{23}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	u
$2\mathfrak{p}_7$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$(u-1)/\sqrt{2}$
$\mathfrak{p}_{31}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$(u-1-\sqrt{2})/2$

$H_{\mathfrak{f}_0\rho_2}/k=\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ の RPIB？ $(h=h_+=1,\ h_{++}=2)$

$2\sqrt{3}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$(u-1-2\sqrt{3})/4$
$\mathfrak{p}_{23}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$(u-10)/\sqrt{3}\pi_{11}$

$k=\mathbb{Q}(\sqrt{10})$, $h=h_+=h_{++}=2$. とくに $k\subsetneq H_{(1)\rho_2}$

$\mathfrak{f}_0$	$H_{\mathfrak{f}_0\rho_2}/k,\ \mathrm{Cl}(k,\mathfrak{f}_0\rho_2)=\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$H_{\mathfrak{f}_0\rho_2}/H_{(1)\rho_2}$
$\mathfrak{p}_3$	$\frac{(50-17\sqrt{10})u+(55-16\sqrt{10})u'+(70-19\sqrt{10})u''+(65-23\sqrt{10})u'''}{15}$	u
$2\mathfrak{p}_3'$	$\frac{(100-32\sqrt{10})u+(50-19\sqrt{10})u'+(-190+59\sqrt{10})u''+(-260+82\sqrt{10})u'''}{120}$	$(u-1)/\pi_2$

※ $N(\mathfrak{f}_0)$ small(?), $[H_{\mathfrak{f}_0\rho_2}:H_{(1)\rho_2}]=2\Rightarrow u$ または $\frac{u\pm1}{*}$ で RPIB？ □

Stark 単数と CM 周期 (吉田予想)

Recall

$$
\begin{array}{ccccl}
H_{(n)\mathrm{id}} & = & \mathbb{Q}(\zeta_n) & \cdots & \text{総虚 (さらに CM 体)} \\
| & & & & \\
H_{(n)} & = & \mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1}) & \cdots & \text{∃ 実素点, Stark 予想} \\
| & & & \Big) & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times/\{\pm 1\} \ni \sigma_{\pm a} \\
\mathbb{Q} & & & &
\end{array}
\Bigg) (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \ni \sigma_a
$$

$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})/\mathbb{Q})$, $\sigma_a, \sigma_{-a} \mapsto \sigma_{\pm a}$

$\rightsquigarrow \zeta(s, \sigma_{\pm a}) = \zeta(s, \sigma_a) + \zeta(s, \sigma_{-a})$

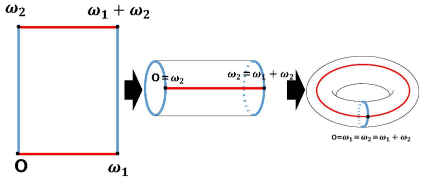
$\rightsquigarrow \exp(\zeta'(0, \sigma_{\pm a})) = \exp(\zeta'(0, \sigma_a)) \exp(\zeta'(0, \sigma_{-a}))$

問題. $\exp(\zeta'(0, \sigma_a)) \overset{\text{Lerch}}{=} \Gamma(\frac{a}{n}) \frac{n^{\frac{1}{2} - \frac{a}{n}}}{\sqrt{2\pi}} = ?\ \ (0 < a < n,\ (a, n) = 1)$

Stark 単数と CM 周期 (吉田予想)

Recall: 楕円曲線の周期

- $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$, $\mathbb{C}/\Lambda$: 複素トーラス.
- $\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)$: ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数.
- $\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$, $(g_2 := 60 \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda} \omega^{-4}$, $g_3 := 140 \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda} \omega^{-6})$.
- $\mathbb{C}/\Lambda \overset{\Phi(\overline{z}) := (\wp(z), \wp'(z))}{\cong} E: y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$, $dz = \frac{d\wp(z)}{\wp'(z)} \leftrightarrow \frac{dx}{y}$.
- ω_i: 周期 $= \int_0^{\omega_i} dz = \int_{\Phi(0 \sim \omega_i)} \frac{dx}{y}$. (像 $\Phi(0 \sim \omega_i)$ は $E(\mathbb{C})$ の閉路)



Stark 単数と CM 周期 (吉田予想)

Example

$E\colon y^2 = x^3 - x.$

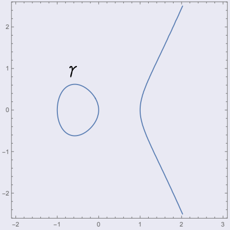
$\int_\gamma \frac{dx}{y} = 2\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^3-x}} \overset{x=-\sqrt{t}}{=} \int_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{3}{4}}(1-t)^{\frac{1}{2}}}$

$= B(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})}.$

※ $E\colon y^2 = x^3 - x$ は “虚数乗法” をもつ:

$\mathrm{End}(E) = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}$,

“$\sqrt{-1}$” : $(x, y) \mapsto (-x, iy)$.



Theorem (Rohrlich, 坂内-大坪)

$F_n\colon x^n + y^n = 1$: フェルマー曲線, $\eta_{r,s} := x^{r-1}y^{s-n}dx$: 第二種微分形式.

$\rightsquigarrow$ $\exists\gamma$: 閉路 s.t. $\int_\gamma \eta_{r,s} = B(\frac{s}{n}, \frac{s}{n}) = \frac{\Gamma(\frac{r}{n})\Gamma(\frac{s}{n})}{\Gamma(\frac{r+s}{n})}$.

※ $J(F_n)$ の既約成分は $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ $(m \mid n)$ の虚数乗法をもつアーベル多様体.

Stark 単数と CM 周期 (吉田予想)

Theorem (Rohrlich, 坂内-大坪)

$F_n : x^n + y^n = 1$, $\eta_{r,s} := x^{r-1}y^{s-n}dx$, $\exists\gamma$: 閉路 s.t. $\int_\gamma \eta_{r,s} = \frac{\Gamma(\frac{r}{n})\Gamma(\frac{s}{n})}{\Gamma(\frac{r+s}{n})}$.

Recall

$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})/\mathbb{Q})$, $\sigma_a \mapsto \sigma_{\pm a}$.

$\exp(\zeta'(0, \sigma_{\pm a})) = \exp(\zeta'(0, \sigma_a)) \exp(\zeta'(0, \sigma_{-a}))$,

$\exp(\zeta'(0, \sigma_a)) \overset{\text{Lerch}}{=} \Gamma(\frac{a}{n}) \frac{n^{\frac{1}{2} - \frac{a}{n}}}{\sqrt{2\pi}} = ? \overset{\text{Rohrlich, 坂内-大坪}}{\doteqdot}$ 円分体の CM 周期.

Corollary

$\mathbb{Q}$ 上のスターク単数: $u(\sigma_{\pm a}) := \exp(-2\zeta'(0, \sigma_{\pm a})) \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$.

Proof.

カップ積: $H^1(F_n) \times H^1(F_n) \to H^2(F_n) \cong H^1(\mathbb{G}_m)$ (Lefschetz motive),
$(\int_\gamma \eta_{r,s}, \int_{\gamma'} \eta_{n-r,n-s}) \mapsto \int_{\gamma\cup\gamma'} \eta_{r,s} \cup \eta_{n-r,n-s} \doteqdot \oint \frac{dx}{x} = 2\pi i$. $\square$

Stark 単数と CM 周期 (吉田予想)

円分体の CM 周期の関係式 $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$ 上の Stark 単数の代数性 $\cdots$ 一般化？

Theorem (新谷公式 $\cdots$ Lerch の公式の一般化)

K/k: 有限次アーベル拡大, $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)$, $\zeta(s,\sigma) = \sum_{\mathrm{Art}(\bar{\mathfrak{a}})=\sigma} N\mathfrak{a}^{-s}$.

$$k\text{: 総実体} \Rightarrow \exp(\zeta'(0,\sigma)) = \prod_{\rho\colon k \hookrightarrow \mathbb{R}} \exp(X(\sigma,\rho)).$$

$\exp(X(\sigma,\rho)) := \prod$ Barnes の多重ガンマ関数 $\times$ 補正項.

Conjecture (吉田予想 $\cdots$ Rohrlich の公式の一般化)

$$\text{(オリジナル) 任意の CM 周期} \equiv \prod \exp(X(\tau,\rho))^{\text{有理数}} \bmod \overline{\mathbb{Q}}^{\times},$$

$$\text{(拡張)} \quad \text{任意の} \exp(X(\tau,\rho)) \equiv \prod \text{CM 周期}^{\text{有理数}} \bmod \overline{\mathbb{Q}}^{\times}.$$

※ 吉田予想の拡張は総実体上の Stark 単数の代数性 $u(\sigma) \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ を含む.
(K-, On the algebraicity of some products of special values of Barnes' multiple gamma function. Amer. J. Math. 140 (2018), no. 3, 617-651)

数値例, $k=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $K=\mathbb{Q}(\sqrt{2\sqrt{5}-26})=H_{(\frac{13-\sqrt{5}}{2})}$

$$\exp(X(\mathrm{id},\mathrm{id}))=\prod_{(x_1,x_2)\in R}\Gamma_2(x_1+\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}x_2,(1,\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}))*\frac{(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{\frac{19\sqrt{5}}{123}}}{\frac{13-\sqrt{5}}{2}}$$
$$=2.3777801110\ldots\qquad(\mathrm{id}\in\mathrm{Gal}(K/k),\ \mathrm{id}\colon k\hookrightarrow\mathbb{R}).$$

$R:=\{(\frac{1}{41},\frac{5}{41}),(\frac{2}{41},\frac{10}{41}),(\frac{4}{41},\frac{20}{41}),(\frac{5}{41},\frac{25}{41}),(\frac{8}{41},\frac{40}{41}),(\frac{9}{41},\frac{4}{41}),(\frac{10}{41},\frac{9}{41}),(\frac{16}{41},\frac{39}{41}),(\frac{18}{41},\frac{8}{41}),$
$(\frac{20}{41},\frac{18}{41}),(\frac{21}{41},\frac{23}{41}),(\frac{23}{41},\frac{33}{41}),(\frac{25}{41},\frac{2}{41}),(\frac{31}{41},\frac{32}{41}),(\frac{32}{41},\frac{37}{41}),(\frac{33}{41},\frac{1}{41}),(\frac{36}{41},\frac{16}{41}),(\frac{37}{41},\frac{21}{41}),(\frac{39}{41},\frac{31}{41}),(\frac{40}{41},\frac{36}{41})\}.$

$C\colon y^2=\frac{7+\sqrt{41}}{2}x^6+(-10-2\sqrt{41})x^5+10x^4+\frac{41+\sqrt{41}}{2}x^3+(3-2\sqrt{41})x^2+\frac{7-\sqrt{41}}{2}x+1,$
$C'\colon y^2=\frac{7-\sqrt{41}}{2}x^6+(-10+2\sqrt{41})x^5+10x^4+\frac{41-\sqrt{41}}{2}x^3+(3+2\sqrt{41})x^2+\frac{7+\sqrt{41}}{2}x+1.$
$\rightsquigarrow J(C), J(C')$ は K の虚数乗法を持つアーベル多様体.
$\omega_{\mathrm{id}}=\frac{2dx}{y}+\frac{(\sqrt{5}-1)xdx}{y}$ (C 上), $\omega'_{\mathrm{id}}:=\frac{2dx}{y}+\frac{(\sqrt{5}-1)xdx}{y}$ (C' 上).
$\rightsquigarrow \int\omega_{\mathrm{id}}=-0.4929\ldots-0.8116\ldots i,\ \int\omega'_{\mathrm{id}}=-0.4443\ldots-0.3099\ldots i.$

$$\text{吉田予想}\rightsquigarrow \pi^{-1}\int\omega_{\mathrm{id}}\int\omega'_{\mathrm{id}}\equiv\exp(X(\mathrm{id},\mathrm{id}))\mod\overline{\mathbb{Q}}^\times$$

$$\pi^{-1}\int\omega_{\mathrm{id}}\int\omega'_{\mathrm{id}}\fallingdotseq\exp(X(\mathrm{id},\mathrm{id}))\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{14}{41}}\frac{\sqrt{-8\sqrt{5}+20+(\sqrt{5}+15)\sqrt{2\sqrt{5}-26}}}{80}\qquad\square$$

Coleman's Frobenius matrices ⇒ Anderson-Gross-Koblitz

Theorem (Coleman, $p \nmid n$)

絶対フロベニウス $\Phi \curvearrowright H^1_{dR}(F_n, \mathbb{Q}_p) = \bigoplus \mathbb{Q}_p \eta_{r,s}$ $(\eta_{r,s} = x^{r-1} y^{s-n} dx)$.

$$\rightsquigarrow \Phi = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \dfrac{\Gamma_p(\frac{a+b}{n})}{\Gamma_p(\frac{a}{n})\Gamma_p(\frac{b}{n})} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \ \Gamma_p(z) := \lim_{\mathbb{N} \ni k \to z} (-1)^{k-1} \prod_{p \nmid i = 1}^{k-1} i.$$

"Corollary" (Gross-Koblitz, Anderson)

$$\prod_{i=0}^{f-1} \Gamma_p\left(\left[\frac{ap^i}{n}\right]\right) = \text{“ガウス和”} \in \mathbb{Q}(\zeta_n) \ (f\text{: } \overline{p} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \text{ の位数}).$$

"Proof".

$J(F_n) = \prod A_i$, $A_i \leftrightarrow \chi_i \quad \rightsquigarrow \quad H^1_{dR}(F_n, \mathbb{Q}_p) = \oplus_i H(M(\chi_i))$,
$\mathfrak{P} \mid p \rightsquigarrow \Phi^{\deg \mathfrak{P}}|_{H(M(\chi_i))} = \chi_i(\mathfrak{P})$. □

※ local なことから global なことが分かる $\rightsquigarrow$ 類体構成. 一般化？

Gross-Stark 予想

Anderson-Gross-Koblitz 公式 の一般化: $k=\mathbb{Q}\rightsquigarrow k$: 総実体

- Gross-Stark 予想: $\frac{L_p^{(r_p(\chi))}(\chi\omega,0)}{r!L(\chi,0)}=\mathcal{R}_p(\chi)\prod_{\mathfrak{p}|p,\ \chi(\mathfrak{p})\neq 1}(1-\chi(\mathfrak{p}))$.
  (Dasgupta-Darmon-Pollack, Ventullo, Dasgupta-Kakde-Ventullo)
- K-Yoshida 予想 (ver.1): p 進 $\log$ 多重ガンマ関数 $\in\log_p(k^{ab})$.
- Dasgupta 予想: p 進乗法的積分 $\in k^{ab}$.

Example ($k=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $K=\mathbb{Q}(\sqrt{\frac{13+\sqrt{5}}{2}}i)=H_{\mathfrak{p}_{41}\rho_1\rho_2}$, $p=59$)

- k は総実, K は総虚 $\Rightarrow$ (無限素点の) Stark 単数はない.
- GS: $r_p(\chi)=2$, $\frac{L_p^{(2)}(\chi\omega,0)}{2L(\chi,0)}\fallingdotseq\det\begin{pmatrix}\log_p(p\text{-unit}) & \log_p(p\text{-unit})\\ \log_p(p\text{-unit}) & \log_p(p\text{-unit})\end{pmatrix}$.
- KY: $\sum\log_p\Gamma_{2,p}(*,(*,*))-$ "補正項" $\fallingdotseq\log_p(-\sqrt{\frac{13+\sqrt{5}}{2}}i+\frac{1-\sqrt{5}}{2}-1)$.

Coleman's Frobenius matrices の一般化？

Gross-Stark 単数と p 進周期

Coleman's Frobenius matrices の一般化？

フェルマー曲線 F_n ($J(F_n)$ の既約成分) の一般化:
$\rightsquigarrow$ 一般の CM 体 K で虚数乗法を持つアーベル多様体
$\rightsquigarrow$ CM 体 K の代数的 Hecke 指標 χ に付随するモチーフ $M(\chi)$.
ただし, $\eta_{r,s} \in H^1_{dR}(F_n)$ のような

"自然な基底" $\in H^1_{dR}(M(\chi))$ は存在しない (？)

ので, 絶対フロベニウス作用の表現行列は基底の取り方に依存.

$\rightsquigarrow$ KY 予想 ver.2: $\Phi^f|_{H^1_{dR}(M(\chi))} \equiv p$ 進多重ガンマ関数 $\mathrm{mod}(K^\times)^{\mathbb{Q}}$.

精密化 へのアイデア: "比" [CM 周期: p 進周期] は well-defined

- 副作用: 更に多重ガンマ関数も必要
- 副産物: (実素点の) Stark 予想も巻き込める.

Gross-Stark 単数と p 進周期

M: “モチーフ” (e.g., E, $J(F_n)$), $\eta \in H_{dR}(M)$, $\gamma \in H^B(M)$

$$\rightsquigarrow \text{双線形写像 } \int : H^B(M) \times H_{dR}(M) \to \mathbb{C},\ (\gamma, \eta) \mapsto \int_\gamma \eta.$$

B_{dR}: Fontaine の “p 進周期環” (p 進 Hodge 理論)

$$\rightsquigarrow \text{(別の) 双線形写像 } \int_p : H^B(M) \times H_{dR}(M) \to B_{dR},\ (\gamma, \eta) \mapsto \int_{p,\gamma} \eta.$$

χ: CM 体 K の代数的 Hecke 指標

$$\rightsquigarrow M = M(\chi)\text{: } K \text{ 上定義された } K^* := \tilde{K}(\mathrm{Im}(\chi)) \text{ 係数のモチーフ}$$
$$\text{(i.e., } L(s, M) = (L(s, \rho \circ \chi))_{\rho\colon K^* \hookrightarrow \mathbb{C}})$$

M: 階数 1, γ, η_σ: 基底 (i.e., $H^B(M) = K\gamma$, $H_{dR}(M) = \bigoplus_{\sigma\colon K \hookrightarrow K^*} K^* \eta_\sigma$)

$\rightsquigarrow [P_{\sigma,\chi} : P_{p,\sigma,\chi}] := [\int_\gamma \eta_\sigma : \int_{p,\gamma} \eta_\sigma] \in (\mathbb{C}^\times \times B_{dR}^\times)/\overline{\mathbb{Q}}^\times$: γ, η_σ によらない.

さらに $\mathrm{mod}\,\mu_\infty$ なら χ の infinite type と σ のみによる.

虚数乗法をもつ $\Rightarrow$ 潜在的に良い還元をもつ

$$\rightsquigarrow \int_{p,\gamma} \eta \in B_{cris}\overline{\mathbb{Q}}_p \curvearrowleft \Phi^{\deg \tau} \otimes \tau \text{ } (\tau \in W \text{ (Weil Group)} \subset \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p))$$

Gross-Stark 単数と p 進周期 (arXiv:1706.03198)

Definition (k 総実体, K/k: 有限次アーベル拡大, K: CM 体)

χ: K の代数的 Hecke 指標 s.t. inf. type $= \displaystyle\sum_{\tau \in \mathrm{Gal}(K/k)} w_K \zeta(0, \tau^{-1})\tau.$

Conjecture ($\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)$)

1. (吉田予想の拡張) $\exp(X(\sigma, \mathrm{id}))$ (:≒ 多重 Γ 関数) $\equiv P_{\sigma,\chi}^{\frac{1}{w_K}} \bmod \overline{\mathbb{Q}}^\times$.
2. $G(\sigma) := \dfrac{\exp(X(\sigma,\mathrm{id}))P_{p,\sigma,\chi}^{\frac{1}{w_K}}}{P_{\sigma,\chi}^{\frac{1}{w_K}}} \in B_{cris}\overline{\mathbb{Q}}_p/\mu_\infty$, $\tau \in W \cap \mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}})$

$$(\Phi^{\deg \tau} \otimes \tau)(G(\sigma)) \equiv p \text{ 進多重 } \Gamma \text{ 関数} \cdot G(\tau\sigma) \mod \mu_\infty.$$

Theorem

1. 証明済: K: アーベル体, かつ (p: $k/\mathbb{Q}$ で惰性 又は $\mathfrak{p}$: K/k で分岐).
2. KY 予想 ver.1,2 (GS 予想の細分) を含む.
3. Stark 予想の一部分 ($\tau(u(\sigma)) \equiv u(\tau\sigma) \bmod \mu_\infty$) を含む.