On a common refinement of Stark units and Gross-Stark units. (arXiv:1706.03198)

Tomokazu Kashio*

2019 年 3 月 13 日 10:40-11:30

概 要

実素点に関する Stark 予想は, 多重ガンマ関数の積で Stark 単数と呼ばれる代数的数を表す公式を与える. Stark 単数は多くの場合で単数となり, またある種の相互法則を満たすことも予想されている. 一方で吉田予想は, 多重ガンマ関数の別の積で CM 周期と呼ばれる幾何的不変量の超越数部分を表す公式を与える. 講演者はこれまでに, Stark 予想の "代数性部分" と吉田予想を, 一つの予想式に統一できることを発見した. 今回はこの "Archimedean" な予想の下で, (p 進 Hodge 理論の) p 進周期環に値をとる不変量を構成し, さらに Stark 予想の "相互法則" の部分と, Stark 予想の p 進類似 (Gross-Stark 予想) の両方を細分する予想を紹介する.

1 Introduction: フェルマー曲線 vs. 円単数 (とガウス和)

(あまり知られていないと思うが) フェルマー曲線 $F_n\colon x^n + y^n = 1$ を使って

$$\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-a}{n}\right) \in \pi\overline{\mathbb{Q}}$$

を示せる. ただし, 実際は

$$\frac{\pi}{\Gamma(\frac{a}{n})\Gamma(1-\frac{a}{n})} = \sin\frac{a\pi}{n} \ (\fallingdotseq \text{円単数}) \quad (\text{Euler})$$

より直ちに従う.

"PROOF". $\eta_{r,s} := x^r y^{s-n}\frac{dx}{x}$ とおく (第二種微分形式). このとき $\exists\gamma$: 閉路 s.t.

$$\int_\gamma \eta_{r,s} = \frac{\Gamma(\frac{r}{n})\Gamma(\frac{s}{n})}{\Gamma(\frac{r+s}{n})} \ \left(= B(\tfrac{r}{n},\tfrac{s}{n}) = \int_0^1 t^{\frac{r}{n}}(1-t)^{\frac{s}{n}}dt\right) \quad (\text{Rohrlich, 坂内-大坪}).$$

*Tokyo University of Science, kashio_tomokazu@ma.noda.tus.ac.jp

更にカップ積

$$\begin{array}{rclcl} \cup\colon H^1(F_n)\times H^1(F_n) & \to & H^2(F_n) & \cong & H^1(\mathbb{G}_m)\ \text{(Lefschetz motive)}, \\ (\int_\gamma \eta_{r,s}, \int_{\gamma'} \eta_{n-r,n-s}) & \mapsto & \int_{\gamma\cup\gamma'} \eta_{r,s}\cup\eta_{n-r,n-s} & \risingdotseq & \oint \frac{dx}{x} = 2\pi i \end{array}$$

を考えると

$$B\left(\frac{r}{n},\frac{s}{n}\right)B\left(\frac{n-r}{n},\frac{n-s}{n}\right)\in\pi\overline{\mathbb{Q}}$$

を得る. β 関数 $\Rightarrow$ Γ 関数は初等的議論 (e.g., $B(\frac{1}{3},\frac{1}{3})^2B(\frac{2}{3},\frac{2}{3})=\frac{\Gamma(\frac{1}{3})^4}{\Gamma(\frac{4}{3})}=3\Gamma(\frac{1}{3})^3$). $\square$

講演者はこの一般化を考え,

吉田予想 (改) が, 素実体上の Stark 単数の代数性 $u(\sigma)\in\overline{\mathbb{Q}}$ を含む (AJM, 2018)

ことを示した.

一方で, フェルマー曲線上の絶対フロベニウスの公式

$$\Phi \curvearrowright H^1_{dR}(F_n,\mathbb{Q}_p)=\bigoplus\mathbb{Q}_p\eta_{r,s} \text{ の表現行列} \risingdotseq \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & B_p(\frac{r}{n},\frac{s}{n}) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \quad \text{(Coleman)}$$

を使って

$$\prod_{i=0}^{f-1}\Gamma_p\left(\left\langle\frac{ap^i}{n}\right\rangle\right)= \text{“ガウス和”} \in\mathbb{Q}(\zeta_n) \quad \text{(Anderson-Gross-Koblitz 公式)}$$

や

$$\sigma_b\left(\frac{\Gamma(\frac{a}{n})\Gamma(\frac{n-a}{n})}{\pi}\right)\equiv\frac{\Gamma(\frac{ab}{n})\Gamma(\frac{n-ab}{n})}{\pi} \mod \mu_\infty \quad (\sigma_b(\zeta_n)=\zeta_n^b)$$

を導ける. 前者はよく知られている[1]. 後者 (Crelle, 2018) もやはり Euler より従うが, local (archimedean (Rohrlich) + p-adic (Coleman)) な計算から global なことが分かるという面白さがある. 今日のはこの一般化を話す:

§2 円単数 $\rightsquigarrow$ Stark 単数, Rohrlich $\rightsquigarrow$ 吉田予想.

§3 Coleman $\rightsquigarrow$ 予想式 (arXiv:1706.03198).

§4 予想式 $\Rightarrow$ Stark 単数の相互法則: $\tau(u(\sigma))\equiv u(\tau\sigma) \mod \mu_\infty$.

なお時間のため省略するが

予想式 $\Rightarrow$ Gross-Koblitz の一般化 $\overset{\text{K-吉田}}{\underset{}{\overset{\text{AJM, 2008}}{\Rightarrow}}}$ (rank one abelian) Gross-Stark 予想 (proved).

[1] ヤコビ多様体を分解 $J(F_n)=\prod A_i$ すると, 各成分は円分体の虚数乗法をもつアーベル多様体. よって代数的 Hecke 指標と対応 $A_i\leftrightarrow\chi_i$ しており, 絶対フロベニウス作用は, 指標の特殊値を与える: $\Phi^{\deg\mathfrak{P}}|_{H^1_{dR}(A_i)}=\chi_i(\mathfrak{P})$ $(\mathfrak{P}\mid p)$.

2 吉田予想 vs. Stark 予想

2.1 Stark 予想 (rank one abelian case, 実素点の場合)

K/k: 有限次アーベル拡大, $\zeta(s,\sigma) := \sum_{\mathrm{Art}(\mathfrak{a})=\sigma} N\mathfrak{a}^{-s}$ ($\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)$, 部分ゼータ関数).

Conjecture (Stark 予想の一部)**.** k: 総実体, $\exists$ 実素点 ρ: $K \hookrightarrow \mathbb{R}$ (i.e[2], $\zeta(0,\sigma)=0$) なら

$$u(\sigma) := \exp(-2\zeta'(0,\sigma)) \in K^\times \text{ s.t. } \tau(u(\sigma)) = u(\tau\sigma) \quad (\sigma,\tau \in \mathrm{Gal}(K/k))$$

更に $u(\sigma)$ は "単数"[3]. この $u(\sigma)$ を Stark 単数と呼ぶ.

Example.

- $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n+\zeta_n^{-1})/\mathbb{Q}) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times/\{\pm 1\} \ni [\sigma_{\pm a}\colon \zeta_n+\zeta_n^{-1} \mapsto \zeta_n^a+\zeta_n^{-a}]$.
- $\zeta(s,\sigma_{\pm a}) = \displaystyle\sum_{\mathbb{N}\ni k\equiv \pm a \bmod n} k^{-s}$: Hurwitz ゼータ関数.
- $u(\sigma_{\pm a}) := \exp(-2\zeta'(0,\sigma_{\pm a})) \overset{\text{Lerch}}{=} \left(\dfrac{2\pi}{\Gamma(\frac{a}{n})\Gamma(\frac{n-a}{n})}\right)^2 \overset{\text{“PROOF”}}{\in} \overline{\mathbb{Q}}$.

2.2 CM 周期 (F_n 上の積分 $\int_\gamma \eta_{r,s}$ の一般化)

CM 体 K の複素埋め込み $\sigma,\tau \in \mathrm{Hom}(K,\mathbb{C})$ に対して, 志村の周期記号

$$p_K(\sigma,\tau) \in \mathbb{C}^\times/\overline{\mathbb{Q}}^\times$$

が定まり[4], CM-type (K,Ξ) のアーベル多様体 $A/\overline{\mathbb{Q}}$ と, "K-eigen" 正則微分形式 η_σ ($\sigma\in\Xi$) に対して以下を満たす.

$$\pi \prod_{\tau\in\Xi} p_K(\sigma,\tau) \equiv \int_\gamma \eta_\sigma \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times.$$

Example. $(rs(r+s),n)=1$ のとき

$$\int_\gamma \eta_{r,s} \equiv \pi \prod_{\tau\in\Xi_{r,s}} p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\mathrm{id},\tau) \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times, \quad \Xi_{r,s} = \left\{\sigma_b \;\middle|\; \substack{1\le b\le m,\ (b,n)=1 \\ \langle\frac{br}{n}\rangle+\langle\frac{bs}{n}\rangle+\langle\frac{b(n-r-s)}{n}\rangle=1}\right\}.$$

---

[2] $\mathrm{ord}_{s=0}\zeta(s,\sigma) = \min(\#\{$ 分解する無限素点 $\}, \#\{$ 無限素点, 分岐素点 $\})$

[3] $S := \{k$ の無限素点, K/k での分岐素点 $\})$ とおく. $\#S>2$ なら $u(\sigma)$ は $\rho|_k$-unit. $S=\{\rho|_k, v\}$ なら S-unit で, $w \mid v$ に対し $|u(\sigma)|_w$ が一定となるもの.

[4] $K = \mathrm{End}(A)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ のとき, CM-type $\Xi = \Xi_A \subset \mathrm{Hom}(K,\mathbb{C})$ を

$$\begin{array}{cccccl} K & \curvearrowright & H^1_{dR}(A,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{[K:\mathbb{C}]} & = & \bigoplus_{\sigma\in\mathrm{Hom}(K,\mathbb{C})}\sigma & \text{(表現として埋め込みが全部現れる)} \\ & & \cup & & \cup & \\ K & \curvearrowright & H^0(A,\Omega^1_A) \cong \mathbb{C}^{[K:\mathbb{C}]/2} & = & \bigoplus_{\sigma\in\Xi}\sigma & \text{(半分だけ現れる).} \end{array}$$

で定める. さらに

- $K \curvearrowright \mathbb{C}\cdot\eta_\sigma \subset H^1_{dR}(A,\mathbb{C})$ as $k^*(\eta_\sigma) = \sigma(k)\eta_\sigma$.
- γ: 閉路で $\int_\gamma \eta_\sigma \neq 0$ となるもの.

2.3 吉田予想

Theorem (新谷公式: Lerch の公式の一般化)**.** k: 総実体のとき

$$\exp(\zeta'(0,\sigma)) = \prod \text{多重ガンマ関数} \times \text{補正項}.$$

もし $h_{k,+} = 1$ なら, 実素点 $\rho\colon k \hookrightarrow \mathbb{R}$, $k_+^\times/\mathcal{O}_{k,+}^\times$ の基本領域 (コーン分解) D に対し

$$\exp(X(\sigma,\rho)) := \exp\left(\frac{d}{ds} \sum_{\substack{z\in D\cap\mathcal{O}_{k,+} \\ \mathrm{Art}((z))=\sigma}} \rho(z)^{-s}\Big|_{s=0}\right) \times \text{補正項},$$
$$\exp(\zeta'(0,\sigma)) = \prod_{\rho\colon k\hookrightarrow\mathbb{R}} \exp(X(\sigma,\rho)).$$

($h_{k,+} > 1$ なら $\mathrm{Art}((z)\mathfrak{a}) = \sigma$ となる $\mathfrak{a}$ も必要). 公式の表示は $D, \mathfrak{a}$ の取り方によるが

$$\exp(X(\sigma,\rho)) \in \mathbb{C}^\times/\rho(\mathcal{O}_k^\times)^{\mathbb{Q}}$$

は well-defined (吉田).

Conjecture 1 (吉田予想 (改)[5]: Rohrlich の公式の一般化)**.** k: 総実体, K/k 有限次アーベル拡大, K_{CM}: 最大 CM 部分体, としたとき

$$\exp(X(\sigma,\mathrm{id})) \equiv \pi^{\zeta(0,\sigma)} \prod_{\sigma'\in\mathrm{Gal}(K/k)} p_{K_{CM}}(\sigma|_{K_{CM}},\sigma')^{\zeta(0,\sigma')} \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times.$$

Theorem 1 (AJM, 2018)**.** (改) は総実体上の Stark 単数の代数性 $u(\sigma) \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$ を含む.

3 p 進周期

Coleman の公式は, 具体的な基底 $\eta_{r,s}$ に対する $\Phi \curvearrowright H^1_{dR}(F_n)$ の表現行列
$\rightsquigarrow$ 基底に寄らない定式化 のアイデア: "比" [CM 周期: p 進周期] は well-defined.

副作用: 更に多重ガンマ関数も必要.　　副産物: (実素点の) Stark 予想も巻き込める.

Fontaine の "p 進周期環" B_{dR} (p 進 Hodge 理論) に対し "p 進積分" $\int_{p,\gamma}\eta \in B_{dR}$ が定義され, さらに "自然な分解[6]" により

$$p_{p,K}(\sigma,\tau) \in B_{dR}^\times/\overline{\mathbb{Q}}^\times, \quad \pi_p \prod_{\tau\in\Xi} p_{p,K}(\sigma,\tau) \equiv \int_{p,\gamma} \eta_\sigma \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times \ (\sigma \in \Xi)$$

とできる (Fontaine, Faltings, Tsuji, Blasius).

[5](オリジナル) は, $p_K(\sigma,\sigma') \equiv \prod \exp(X(\tau,\rho))^{\text{有理数}} \bmod \overline{\mathbb{Q}}^\times$ の形. $k = \mathbb{Q}$ の場合, (改) は Rohrlich より, (オリジナル) は, Rohrlich + Euler より従う.

[6]実際は "代数的 Hecke 指標に付随するモチーフ" を用いた.

Remark. (i) $p_K(\sigma,\tau), p_{p,K}(\sigma,\tau)$ それぞれは A,γ,η_σ の取り方によるが "同変的". すなわち "比" は well-defined. (μ_∞ は "分解" 操作でべき根を取る分):

$$[p_K(\sigma,\tau):p_{p,K}(\sigma,\tau)] \in (\mathbb{C}^\times \times B_{dR}^\times)/(\mu_\infty\times\mu_\infty)\overline{\mathbb{Q}}^\times.$$

(ii) A は虚数乗法をもつので, 潜在的に良い還元をもつ. よって Weil 群 $W \subset \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ に付随する絶対フロベニウス作用が考えられる:

$$\int_{p,\gamma}\eta \in B_{cris}\overline{\mathbb{Q}}_p \curvearrowleft \Phi^{\deg\tau}\otimes\tau =: \Phi_\tau \quad (\tau\in W).$$

Definition 1. k: 総実体, K/k: 有限次アーベル拡大, $K\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}}\hookrightarrow\mathbb{C},\mathbb{C}_p$ を固定し

$$\mathfrak{p}\mid p \leftrightarrow k\hookrightarrow\mathbb{C}_p,\quad \mathfrak{p}\mid \mathrm{cond}_{K/k}$$

を仮定する. 吉田予想が成立するという仮定の元

$$G(\sigma) := \frac{\exp(X(\sigma,\mathrm{id}))}{\pi^{\zeta(0,\sigma)}\prod_{\sigma'\in\mathrm{Gal}(K/k)} p_{K_{CM}}(\sigma|_{K_{CM}},\sigma')^{\zeta(0,\sigma')}} \frac{\pi_p^{\zeta(0,\sigma)}\prod_{\sigma'\in\mathrm{Gal}(K/k)} p_{p,K_{CM}}(\sigma|_{K_{CM}},\sigma')^{\zeta(0,\sigma')}}{\exp_p(X_p(\sigma,\mathrm{id}))}$$

$$\in (B_{cris}\overline{\mathbb{Q}}_p)^{\mathbb{Q}}/\mu_\infty.$$

ここで $\exp_p(X_p(\sigma,\mathrm{id}))$ は $\exp(X(\sigma,\mathrm{id}))$ の p 進類似[7] で, この定義に $\mathfrak{p}\mid\mathrm{cond}_{K/k}$ が必要. また $\exp(X(\sigma,\mathrm{id})),\exp_p(X_p(\sigma,\mathrm{id}))$ もやはり "同変的" で, 以下の "比" が well-defined.

$$[\exp(X(\sigma,\mathrm{id})):\exp_p(X_p(\sigma,\mathrm{id}))] \in (\mathbb{C}^\times\times\mathbb{C}_p^\times)/(\mu_\infty\times\mu_\infty)\overline{\mathbb{Q}}^\times.$$

Conjecture 2 (arXiv:1706.03198)**.** $\sigma\in\mathrm{Gal}(K/k)$, $\tau\in W\cap\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}})\subset\mathrm{Gal}(K/k)$.

(i) $\mathfrak{p}\mid\mathrm{cond}_{K/k}$ なら

$$\Phi_\tau(G(\sigma)) \equiv G(\tau\sigma) \mod \mu_\infty.$$

[7] 吉田氏の定義は $X(\sigma,\mathrm{id}) = \sum_{z,\mathbf{v}}\log\Gamma(z,\mathbf{v}) + \sum_{a,b} a\log b$ の形. 同じ $z,\mathbf{v},a,b$ 達を用いて

$$X_p(\sigma,\mathrm{id}) := \sum_{z,\mathbf{v}}\log_p\Gamma_p(z,\mathbf{v}) + \sum_{a,b} a\log_p b$$

と定める. また

$$\log\Gamma(z,\mathbf{v}) := \frac{d}{ds}\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_{\geq0}^r}(z+\mathbf{m}\cdot\mathbf{v})^{-s}|_{s=0},\quad \log_p\Gamma_p(z,\mathbf{v}) := \frac{d}{ds}\left[\sum_{\mathbf{m}\in\mathbf{Z}_{\geq0}^r}(z+\mathbf{m}\cdot\mathbf{v})^{-s}\right]_{p\text{ 進補間}}\Bigg|_{s=0}.$$

この p 進補間に $\mathfrak{p}\mid\mathrm{cond}_{K/k}$ を使う.

(ii) $\mathfrak{p} \nmid \mathrm{cond}_{K/k}$ の時は少し複雑[8].

4 主結果

Theorem 2. (i) $k = \mathbb{Q}$ の場合 Conjecture 2 は Coleman より従う.

(ii) $k \neq \mathbb{Q}$ でも, K が $\mathbb{Q}$ 上アーベルかつ (p: $k/\mathbb{Q}$ で惰性 又は $\mathfrak{p}$: K/k で分岐) で成立.

(iii) Conjectures 1, 2 は, Stark 予想の一部分 ($\tau(u(\sigma)) \equiv u(\tau\sigma) \bmod \mu_\infty$) を含む. (また, Gross-Koblitz 公式の一般化 = Gross-Stark 予想の細分も含む.)

Proof. (ii) $L(s,\psi) = \prod_{\substack{\chi \in \widehat{\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})} \\ \chi|_{\mathrm{Gal}(K/k)} = \psi}} L(s,\chi)$ ($\psi \in \widehat{\mathrm{Gal}(K/k)}$) とその p 進補間[9], 新谷公式とその p 進類似 (J.M. Kyoto U., 2005).

(iii) 複素共役 c に対して

$$G(\sigma)G(c\sigma) \overset{\cup|_{H^1}}{\fallingdotseq} \frac{\exp(X(\sigma,\mathrm{id}))\exp(X(c\sigma,\mathrm{id}))}{\exp_p(X_p(\sigma,\mathrm{id}))\exp_p(X_p(c\sigma,\mathrm{id}))} \overset{\text{JNT, 2019}}{\fallingdotseq} u(\sigma) \text{ (Stark 単数)}$$
$$\overset{\text{吉田予想 (改)}}{\in} \overline{\mathbb{Q}} \subset \overline{\mathbb{Q}}_p.$$

よって

$$\tau(u(\sigma)) \overset{\Phi_\tau|_{\overline{\mathbb{Q}}_p} = \tau}{\fallingdotseq} \Phi_\tau(G(\sigma)G(c\sigma)) \overset{\text{Conjecture 3}}{\equiv} G(\tau\sigma)G(c\tau\sigma) \fallingdotseq u(\tau\sigma).$$

これで $\mathfrak{p}$ の分解群 $\subset \mathrm{Gal}(K/k)$ に対して導けた. さらに $\mathfrak{p}$ も動かす. □

[8] $\tilde{K} \supset K$ s.t. $\mathfrak{p} \mid \mathrm{cond}_{\tilde{K}/k}$ を取っておいて

$$G(\sigma) := \frac{\exp(X(\sigma,\mathrm{id}))\pi_p^{\zeta(0,\sigma)} \prod_{\sigma' \in \mathrm{Gal}(K/k)} p_{p,K_{CM}}(\sigma|_{K_{CM}}, \sigma')^{\zeta(0,\sigma')}}{\pi^{\zeta(0,\sigma)} \prod_{\sigma' \in \mathrm{Gal}(K/k)} p_{K_{CM}}(\sigma|_{K_{CM}}, \sigma')^{\zeta(0,\sigma')}},$$
$$\Phi_{\mathrm{Frob}_\mathfrak{p}}(G(\sigma)) \equiv G(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p}\sigma) \cdot \frac{\text{補正項}}{\prod_{\substack{\tilde{\sigma} \in \mathrm{Gal}(\tilde{K}/k) \\ \tilde{\sigma}|_K = \mathrm{Frob}_\mathfrak{p}\sigma}} \exp_p(X_p(\tilde{\sigma},\mathrm{id}))}.$$

[9] $p, \mathfrak{p}$ に関する条件は, p 進補間する際の補正項のズレをなくすために必要.