On Coleman's formula for the absolute Frobenius on Fermat curves

Tomokazu Kashio*

2019 年 3 月 30 日 16:30-17:30

概 要

Coleman はフェルマー曲線上の絶対フロベニウス作用を p 進ベータ関数で表す公式を示した．これは CM 周期に関する Chowla-Selberg 公式や Rohrlich の公式の p 進類似としてよく知られている．関連して, 以下の三つの話題を取り扱う予定.

- CM 周期の p 進類似 (p 進周期) を使った言い換えを紹介する.
- ガウス和を p 進ガンマ関数で表す Gross-Koblitz 公式への応用はよく知られている．今回は "円単数の相互法則" の細分ともなることを紹介する.
- (不完全ではあるが) 別証明への取り組みを紹介する．ある種の連続性から Coleman の公式の大部分が復元できることを述べる.

1 導入

オイラーのガンマ関数 $\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ ($\mathrm{Re}(z) > 0$) を修正して

$$\Gamma_\infty(z) := \frac{\Gamma(z)}{\sqrt{2\pi}} \quad \left(\overset{\text{Lerch, } z>0}{=} \exp\left(\frac{d}{ds}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(z+k)^{-s}\right]\Big|_{s=0}\right)\right)$$

とおく．よく知られている関数等式

$$\text{相反公式: } \Gamma_\infty(z)\Gamma_\infty(1-z) = \frac{1}{2\sin \pi z},$$

$$\text{乗法公式: } \prod_{k=0}^{d-1}\Gamma_\infty(z+\tfrac{k}{d}) = d^{\frac{1}{2}-dz}\Gamma_\infty(dz) \quad (d \in \mathbb{N})$$

の "幾何的な意味" を考えてみる.

*Tokyo University of Science, kashio_tomokazu@ma.noda.tus.ac.jp

Definition 1 (志村の周期記号)**.** CM 体 K の虚数乗法をもつアーベル多様体

$$A/\overline{\mathbb{Q}} \text{ s.t. } K \cong \mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

に対し, 作用 $K \curvearrowright H^1_{dR}(A/\overline{\mathbb{Q}})$ を考えると全ての埋め込みが現れる:

$$H^1_{dR}(A/\overline{\mathbb{Q}}) = \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{Hom}(K,\mathbb{C})} \overline{\mathbb{Q}} \cdot \eta_\sigma \quad (K \overset{\sigma}{\curvearrowright} \eta_\sigma: \text{ “}K\text{-eigen” な第二種微分形式}).$$

これを正則微分形式に制限すると半分になり, A の CM 型 $\Xi = \Xi_A$ が定まる:

$$H^0(A, \Omega^1_A) = \bigoplus_{\sigma \in \Xi} \overline{\mathbb{Q}} \cdot \eta_\sigma \quad (\text{i.e., } \exists \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K \text{ s.t. } A(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{\frac{[K:\mathbb{Q}]}{2}}/\Xi(\mathfrak{a}),\ \eta_\sigma \leftrightarrow cdz_\sigma).$$

閉路積分 $\int_\gamma \eta_\sigma$ の超越数部分は (σ, Ξ) のみにより ($\because$ $\mathbb{C}^{\frac{[K:\mathbb{Q}]}{2}}/\Xi(\mathfrak{a}) \overset{\text{同種写像}}{\twoheadrightarrow} \mathbb{C}^{\frac{[K:\mathbb{Q}]}{2}}/\Xi(\mathfrak{b})$), さらに自然な “分解” が考えられて ($\because$ 志村の単項関係式), 志村の周期記号

$$p_K(\sigma,\tau) \in \mathbb{C}^\times/\overline{\mathbb{Q}}^\times \text{ s.t. } p_K(\sigma,\Xi) := \prod_{\tau \in \Xi} p_K(\sigma,\tau) \equiv \begin{cases} \pi^{-1}\int_\gamma \eta_\sigma & (\sigma \in \Xi) \\ \int_\gamma \eta_\sigma & (\sigma \notin \Xi) \end{cases} \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times$$

が定義される. 更に $I_K := \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{Hom}(K,\overline{\mathbb{Q}})} \mathbb{Q} \cdot \sigma$ 上の双線形写像へ拡張する:

$$I_K \times I_K \to \mathbb{C}^\times/\overline{\mathbb{Q}}^\times, \quad p_K\left(\sum_i l_i \cdot \sigma_i, \sum_j r_j \cdot \tau_j\right) := \prod_{i,j} p_K(\sigma_i,\tau_j)^{l_i r_j}.$$

Example 1. フェルマー曲線 F_n: $x^n + y^n = 1$ はアーベル積分の周期を周期記号で書ける ($\because$ ヤコビ多様体が円分体で虚数乗法を持つ): “K-eigen” な第二種微分形式全体は

$$\eta_{r,s} := x^r y^{s-n} \frac{dx}{x} \quad (0 < r,s < n,\ r+s \neq n. \text{ 正則 } \Leftrightarrow r+s<n)$$

となり, $r+s<n$, $(rs(r+s),n)=1$ なら

$$\int_\gamma \eta_{r,s} \equiv \pi p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\mathrm{id}, \Xi_{r,s}) \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times, \quad \Xi_{r,s} = \left\{ \sigma_b \mid {}^{1 \le b \le m,\ (b,n)=1}_{\langle \frac{br}{n} \rangle + \langle \frac{bs}{n} \rangle + \langle \frac{b(n-r-s)}{n} \rangle = 1} \right\}.$$

周期記号 (CM 周期) には多くの単項関係式が知られている. 例えば

(i) $p_K(\sigma,\tau)p_K(\sigma,\rho\circ\tau) \equiv 1$ (ρ: 複素共役写像. $\because$ polarization).

(ii) $p_K(\mathrm{Res}(X),Y) \equiv p_L(X, \mathrm{Inf}(Y))$ ($K \subset L$, $\mathrm{Res}(\tilde\sigma) := \tilde\sigma|_K$, $\mathrm{Inf}(\sigma) := \sum_{\tilde\sigma|_K = \sigma} \tilde\sigma$).

これらの関係式と

$$\exists \text{閉路 } \gamma \subset F_n(\mathbb{C}) \text{ s.t. } \int_\gamma \eta_{r,s} \in B\left(\frac{r}{n}, \frac{s}{n}\right) \cdot \mathbb{Q}(\zeta_n)^\times \quad (\text{Rohrlich})$$

より, $K=\mathbb{Q}(\zeta_n)$ ($\zeta_n=e^{\frac{2\pi i}{n}}$) の周期記号は全て求まる (吉田). これを "逆に解く" と

$$\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)\equiv\pi^{\frac{1}{2}-\langle\frac{a}{n}\rangle}p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}\left(\mathrm{id},\sum_{(b,n)=1}\left(\tfrac{1}{2}-\langle\tfrac{ab}{n}\rangle\right)\cdot\sigma_b\right)\mod\overline{\mathbb{Q}}^\times\quad(\sigma_b(\zeta_n):=\zeta_n^b).$$

この式が, ガンマ関数の関数等式の "幾何的意味" を与える:

"相反公式" $\Gamma_\infty(\frac{a}{n})\Gamma_\infty(\frac{n-a}{n})\in\overline{\mathbb{Q}}$	$\Leftarrow$	(i),
乗法公式 $\mod\overline{\mathbb{Q}}^\times$	$\Leftarrow$	(ii).

今日は, このような

$$\Gamma\text{ の関数等式}\quad\overset{\text{対応}}{\longleftrightarrow}\quad\text{周期 (記号) の単項関係式}$$

の p 進類似とその応用を紹介する.

2 Coleman の公式と p 進周期

Coleman は F_n 上の "絶対フロベニウス作用" (mod$p$ 還元して, 係数環上 p 乗 Frobenius) を明示的に計算した. この公式を $\underline{p\text{ 進周期}}$ を用いて書き直す: p 進 Hodge 理論 (Colmetz, Fontaine, Faltings, Tsuji, etc) より "p 進積分"

$$\int_p\colon H_1^B(A(\mathbb{C}))\times H^1_{dR}(A/\overline{\mathbb{Q}}_p)\to B_{dR}\text{ (Fontaine の }p\text{ 進周期環)},\ (\gamma,\eta)\mapsto\int_{p,\gamma}\eta$$

が定まる. 志村の周期記号の Setting で "比"

$$\left[\int_\gamma\eta_\sigma:\int_{p,\gamma}\eta_\sigma\right]\in(\mathbb{C}^\times\times B_{dR}^\times)/\overline{\mathbb{Q}}^\times$$

は (σ,Ξ) のみによることが分かる. これを (モチーフの言葉で) 分解して以下を得る:

Proposition 1. 双線形写像

$$\begin{aligned}[p_K:p_{K,p}]\colon I_K\times I_K&\to(\mathbb{C}^\times\times B_{dR}^\times)/(\mu_\infty\times\mu_\infty)\overline{\mathbb{Q}}^\times,\\ (X,Y)&\mapsto(p_K(X,Y),p_{p,K}(X,Y))\cdot(\mu_\infty\times\mu_\infty)\overline{\mathbb{Q}}^\times\end{aligned}$$

で以下を満たすものが存在する:

(i) $[p_K:p_{K,p}](\sigma,\Xi)\equiv\begin{cases}[(2\pi i)^{-1}\int_\gamma\eta_\sigma:(2\pi i)_p^{-1}\int_{\gamma,p}\eta_\sigma] & (\sigma\in\Xi)\\ [\int_\gamma\eta_\sigma:\int_{\gamma,p}\eta_\sigma] & (\sigma\notin\Xi)\end{cases}.$

(ii) $[p_K:p_{K,p}](\sigma,\tau)\cdot[p_K:p_{K,p}](\sigma,\rho\circ\tau)\equiv1.$

(iii) $[p_K:p_{K,p}](\mathrm{Res}(X),Y)\equiv[p_L:p_{L,p}](X,\mathrm{Inf}(Y)).$

さらに虚数乗法を持つアーベル多様体は潜在的に良い還元を持つため, Weil 群 $W \subset \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ の作用が考えられる:

$$\int_{p,\gamma} \eta \in B_{cris}\overline{\mathbb{Q}}_p \ (\subsetneq B_{dR}),$$

$$\circlearrowright$$

$$\mathrm{ab.Fr.}^{\deg\tau} \otimes \tau := \Phi_\tau \ (\tau \in W).$$

Definition 2. $\frac{a}{n} \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ に対し

$$P(\tfrac{a}{n}) := \frac{\Gamma_\infty(\frac{a}{n}) \cdot (2\pi i)_p^{\frac{1}{2}-\langle\frac{a}{n}\rangle} p_{\mathbb{Q}(\zeta_n),p}\left(\mathrm{id}, \sum_{(b,n)=1}\left(\frac{1}{2}-\langle\frac{ab}{n}\rangle\right)\sigma_b\right)}{(2\pi i)^{\frac{1}{2}-\langle\frac{a}{n}\rangle} p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}\left(\mathrm{id}, \sum_{(b,n)=1}\left(\frac{1}{2}-\langle\frac{ab}{n}\rangle\right)\sigma_b\right)}$$

$$\overset{\text{Rohrlich}}{\in} (B_{cris}\overline{\mathbb{Q}_p} - \{0\})^{\mathbb{Q}}/\mu_\infty.$$

Theorem 1 (Coleman: 元の式は $\mathrm{mod}\mu_\infty$ 無し)**.** $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ への作用を $\tau(\zeta_n^a) = \zeta_n^b \Rightarrow \tau\left(\frac{a}{n}\right) := \frac{b}{n}$ で定める. $p \neq 2$, $\tau \in W$ とする.

(i) $z \in \mathbb{Z}_{(p)} \cap (0,1)$ のとき

$$\Gamma_p(z) \equiv p^{\frac{1}{2}-\tau^{-1}(z)} \frac{P(z)}{\Phi_\tau(P(\tau^{-1}(z)))} \bmod \mu_\infty \quad (\deg\tau = 1),$$

$$\text{ただし } z \in \mathbb{Z}_p \Rightarrow \Gamma_p(z) := \lim_{\mathbb{N}\ni k\to z} (-1)^{k-1} \prod_{\substack{i=1 \\ p\nmid i}}^{k-1} i \quad (\text{Morita's } \Gamma_p).$$

(ii) $z \in (\mathbb{Q} - \mathbb{Z}_{(p)}) \cap (0,1)$ のとき

$$\frac{\Gamma_p(\tau(z))}{\Gamma_p(z)} \equiv \frac{p^{(z-\tau(z))\mathrm{ord}_p z} P(\tau(z))}{\Phi_\tau(P(z))} \quad \bmod \mu_\infty,$$

$$\text{ただし } z = \frac{z_0}{p^l} \ (p \nmid z_0 \in \mathbb{N},\ l \geq 1) \Rightarrow \Gamma_p(z) := \exp_p\left(\frac{d}{ds}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(z_0+p^l k)^{-s}\right]_{p\text{ 進補間}}\Bigg|_{s=0}\right).$$

Remark 1. (i) 応用として Gross-Koblitz 公式 (ガウス和 $= \Gamma_p$ の積) が知られている.

(ii) 上記の言い換えにより, 円単数の相互法則

$$\tau\left(\Gamma_\infty(\tfrac{a}{n})\Gamma_\infty(\tfrac{n-a}{n})\right) \equiv \Gamma_\infty(\tau(\tfrac{a}{n}))\Gamma_\infty(\tau(\tfrac{n-a}{n})) \quad \bmod \mu_\infty$$

も導ける ($\because$ $P(\frac{a}{n})P(\frac{n-a}{n}) \overset{\text{Proposition 2-(ii)}}{\fallingdotseq} \Gamma_\infty(\frac{a}{n})\Gamma_\infty(\frac{n-a}{n})$, Crelle 2018).

(iii) 円分体 $\Rightarrow$ 一般の CM 体:

- $\Gamma, \Gamma_p \Rightarrow$ Barnes の多重ガンマ関数とその p 進類似を定義 (吉田, K-吉田).
- Rohrlich の公式 $\Rightarrow$ 吉田予想 “Absolute CM-Periods” の改良 (K-, AJM 2018).
- Coleman の公式 $\Rightarrow$ 吉田予想の p 進類似 (K-, arXiv:1706.03198).

3 新しい取り組み

Morita's Γ_p は

$$\text{乗法公式: } \prod_{k=0}^{d-1} \Gamma_p(z+\tfrac{k}{d}) \equiv d^{1-dz+(dz)_1}\Gamma_p(dz) \mod \mu_\infty \quad (z\in\mathbb{Z}_p,\ p\nmid d\in\mathbb{N}).$$

を満たす (modμ_∞ は簡単のため). ただし $z\in\mathbb{Z}_p$ に対して $z_0\in\{1,2,\dots,p\}$, $z_1\in\mathbb{Z}_p$ を $z=z_0+pz_1$ で定める. 逆に, この乗法公式で "おおよそ" 特徴づけられる (Proposition 2). もし同じ性質を Theorem 2-(i) の右辺に対して示せば, Coleman の公式 ($p\nmid n$ の場合) の別証明となる. 級数 $\exp_p(z) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ の収束域から $\exp_p\colon \mathbb{C}_p\to\mathbb{C}_p^\times$ への拡張を固定し

$$z^* := \exp_p(\log_p(z)), \quad z^\flat := p^{\mathrm{ord}_p z} z^*$$

とおく (とくに $z\equiv z^\flat \bmod \mu_\infty$. mod$\mu_\infty$ の議論の簡略化のため, 射影を固定).

Proposition 2 (key point)**.** 連続写像 $f(z)\colon\mathbb{Z}_p\to\mathbb{C}_p^\times$ が, 関数等式

$$\prod_{k=0}^{d-1} f(z+\tfrac{k}{d}) \equiv f(dz) \mod \mu_\infty \quad (p\nmid d\in\mathbb{N})$$

を満たすとする. このとき $\frac{f(z+1)}{f(z)} \bmod \mu_\infty$ は f と $\mathrm{ord}_p z$ のみによる. また, これらの値で $f(z)\bmod\mu_\infty$ が定まる: より明示的に

$$z-1=\sum_{k=0}^{\infty} x_k p^k\ (x_k\in\{0,1,\dots,p-1\}) \Rightarrow f(z)\equiv \prod_{k=0}^{\infty}\alpha_k^{x_k-\frac{p-1}{2}} \mod \mu_\infty,$$
$$c_k := \left(\frac{f(p^k+1)}{f(p^k)}\right)^\flat,\ \alpha_k := c_k\prod_{i=0}^{k-1} c_i^{p^{k-1-i}(p-1)}.$$

さらに以下の同値を得る:

(i) $c_0=c_1=\cdots \Leftrightarrow f(z)\equiv c_0^{z-\frac12} \bmod \mu_\infty$.

(ii) $c_1=c_2=\cdots \Leftrightarrow f(z)\equiv c_0^{z-\frac12}(c_1/c_0)^{z_1+\frac12} \bmod \mu_\infty$.

Sketch of Proof. 仮定の z を $z+\frac1d$ とすると $\prod_{k=1}^{d} f(z+\frac{k}{d})\equiv f(dz+1)$ の形. 辺々割って

$$g(z) := \frac{f(z+1)}{f(z)} \equiv g(dz) \quad (p\nmid d\in\mathbb{N})$$

を得る. よって最初の主張が従う. あとは代入するだけ. □

一方で乗法公式と周期記号の単項関係式は対応していた. とくに

$$G(z) := \left(p^{\frac12-\tau^{-1}(z)}\frac{P(z)}{\Phi_\tau(P(\tau^{-1}(z)))}\right)^\flat \quad (z\in\mathbb{Z}_{(p)}\cap(0,1),\ \deg\tau=1)$$

とおくとき “絶対フロベニウス作用の乗法公式”

$$\prod_{k=0}^{d-1} G(z+\tfrac{k}{d}) \equiv d^{1-dz+(dz)_1} G(dz) \mod \mu_\infty \quad (p \nmid d \in \mathbb{N})$$

が (Coleman の公式と独立に) 導ける. ただし

Remark 2. $G(z)$ の p 進連続性 (結果 $G(z)\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p^\times$ と思える) は “仮定” としておく.

- 実際は (Coleman の明示的な計算により Γ_p と一致するので) 連続的である.
- “明示的な計算なし” で, 連続性のみ示すこともできる.
- 以下の G_τ の連続性の “明示的な計算なし” の証明は, 取り組み中.

Theorem 2. G (と証明中の G_τ) は p 進連続的であると仮定し $f(z) := \frac{G(z)}{\Gamma_p(z)}$ とおくとき

$$\prod_{k=0}^{d-1} f(z+\tfrac{k}{d}) \equiv f(dz) \mod \mu_\infty \quad (p \nmid d), \quad c_1 = c_2 = \cdots \quad \left(c_n := \left(\frac{f(p^n+1)}{f(p^n)}\right)^\flat\right).$$

Sketch of Proof. 前者は既にみた. 後者のためには

$$\frac{G(pz)G(z+1)}{G(pz+1)G(z)} \equiv \frac{\Gamma_p(pz)\Gamma_p(z+1)}{\Gamma_p(pz+1)\Gamma_p(z)} \quad (= 1\ (p \mid z)) \mod \mu_\infty$$

を言えばよい. 形式的には

$$p \text{ 倍公式: } \prod_{k=0}^{p-1} G(z+\tfrac{k}{p}) \fallingdotseq G(pz) \overset{\text{辺々割る}}{\Rightarrow} \frac{G(z+1)}{G(z)} = \frac{G(pz+1)}{G(pz)} \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots$$

と従うはずである. このために

- $z+\frac{k}{p} \notin \mathbb{Z}_p$ だから, $G(z)$ を拡張する: $\tau \in W$ with $\deg\tau = 1$ を固定して

  $$G_\tau(z) := \left(\frac{p^{(\tau^{-1}(z)-z)\mathrm{ord}_p z} P(z)}{\Phi_\tau(P(\tau^{-1}(z)))}\right)^\flat \quad (z \in (\mathbb{Q}-\mathbb{Z}_{(p)}) \cap (0,1)).$$

  さらに “$(z,\tau^{-1}(z))$ に対する p 進連続性を仮定” して $\mathbb{Q}_p - \mathbb{Z}_p$ 上の関数とみなす.

- “単項関係式” は連続性で拡張する前 ($\mathbb{Q}\cap(0,1)$ の範囲) のみ使える. $z, z+\frac{1}{p}, \ldots, z+\frac{p-1}{p}, pz$ が全てこの範囲にあるのは $z \in (0,\frac{1}{p})$ のとき. この場合は

  $$\frac{G(pz)}{G(z)} = G_\tau(z+\tfrac{1}{p})\cdots G_\tau(z+\tfrac{p-1}{p}) \quad (z \in \mathbb{Z}_{(p)} \cap (0,\tfrac{1}{p}))$$

  が導ける. 同様に

  $$\frac{G(pz+1)}{G(z+1)} = G_\tau(z+\tfrac{1}{p})\cdots G_\tau(z+\tfrac{p-1}{p}) \quad (z \in \mathbb{Z}_{(p)} \cap (-\tfrac{1}{p},0))$$

  が言える.

これらと, $z \in p\mathbb{Z}_{(p)}$ に対して

$$z_n^+ \in p\mathbb{Z}_{(p)} \cap (0, \tfrac{1}{p}),\ z_n^- \in p\mathbb{Z}_{(p)} \cap (-\tfrac{1}{p}, 0) \text{ s.t. } z_n^\pm \to z \ (n \to \infty)$$

が取れるので $\frac{G(pz)}{G(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{G(pz_n^+)}{G(z_n^+)} = \lim_{n\to\infty} \frac{G(pz_n^-+1)}{G(z_n^-+1)} = \frac{G(pz+1)}{G(z+1)}$. □

とくに

"絶対フロベニウス作用の p 進連続性の仮定" の下, 直接的な計算無しに

次を得た:

Corollary 1. 定数 a, b が存在して

$$G(z) \equiv a^{z-\frac{1}{2}} b^{z_1+\frac{1}{2}} \Gamma_p(z) \mod \mu_\infty \quad (z \in \mathbb{Z}_p).$$

Remark 3. この結果は, 高々 2 回の計算で, すべてのフェルマー曲線上の絶対フロベニウスが求まることを意味している. 例えば $p = 3$ なら F_5 上の計算だけで, 公式の $z = \frac{1}{5}, \frac{2}{5}$ の場合を得ることができる. この計算から $a^{\frac{-3}{10}} b^{\frac{-1}{10}} \equiv a^{\frac{-1}{10}} b^{\frac{-3}{10}} \equiv 1$, i.e., $a \equiv b \equiv 1$ が分かる.

Remark 4. $c_0 = c_1$ に関し ($p \nmid z$ の場合) 同様の議論ができるが, さらに連続性が微妙.

Remark 5. 今後の目標:

(i) K: CM 体, F: 総実体, K/F: アーベル拡大に対して, arXiv:1706.03198 で予想式を与えた. $K/F = \mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ の場合は Coleman の公式と一致. $K = \mathbb{Q}(\zeta_n)$ でも $F \supsetneq \mathbb{Q}$ の場合は一部未解決. 今回と同様の議論が可能か？ (p 進多重ガンマ関数を関数等式で特徴づけられるか？)

(ii) $[K : \mathbb{Q}] = 4$, 非正規の場合に, 超楕円曲線 $C\colon y^2 = f(x)$ で $J(C)$ が K の虚数乗法をもつものが, いくつか構成されている. $\{F_n \mid n\} \Rightarrow \{C_n\colon y^2 = f(x^n) \mid n\}$ で同様の議論ができるか？