フェルマー曲線上の絶対フロベニウスに関するコールマンの公式について

東京理科大学 理工学部 加塩朋和 *

2019 年 10 月 12 日 (土) ∼ 10 月 13 日 (日)

2019 大分佐賀整数論研究集会

* E-mail: kashio_tomokazu@ma.noda.tus.ac.jp

導入

Definition (オイラーのガンマ関数)

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (\Re(z) > 0)$$

$$\rightsquigarrow \Gamma_\infty(z) := \frac{\Gamma(z)}{\sqrt{2\pi}} \; (z \in \mathbb{Q}_{>0}) \; \left(\overset{\text{Lerch}}{=} \exp\left(\frac{d}{ds} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (z+k)^{-s} \right] \Big|_{s=0} \right) \right).$$

Proposition (関数等式)

- 相反公式: $\Gamma_\infty(z)\Gamma_\infty(1-z) = \dfrac{1}{2\sin \pi z}$.
- 乗法公式: $\displaystyle\prod_{k=0}^{d-1} \Gamma_\infty(z + \tfrac{k}{d}) = d^{\frac{1}{2}-dz}\Gamma_\infty(dz) \quad (d \in \mathbb{N})$.

“幾何的な” 解釈？

志村の周期記号

- $A/\overline{\mathbb{Q}}$: CM 体 K の虚数乗法をもつアーベル多様体.
  e.g., $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $E: y^2=x^3-x \Rightarrow E(\mathbb{C})\cong\mathbb{C}/\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$,
  $\mathrm{End}(E)=\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]\ni\sqrt{-1}\colon (x,y)\to(-x,\sqrt{-1}y)$.
- $\mathcal{O}_K \overset{\text{fin.index}}{\supset} \mathrm{End}(A) \Rightarrow K \curvearrowright H^1_{dR}(A/\overline{\mathbb{Q}})\cong\overline{\mathbb{Q}}^{[K:\mathbb{Q}]}$.
- $H^1_{dR}(A/\overline{\mathbb{Q}})=\bigoplus_{\sigma\in\mathrm{Hom}(K,\mathbb{C})}\overline{\mathbb{Q}}\cdot\eta_\sigma$, $K\overset{\sigma}{\curvearrowright}\eta_\sigma$: “$K$-eigen” な微分形式.
- $H^0(A,\Omega^1_A)=\bigoplus_{\sigma\in\Xi}\overline{\mathbb{Q}}\cdot\eta_\sigma$, $\Xi\overset{\text{半分}}{\subset}\mathrm{Hom}(K,\mathbb{C})$: ($A$ の) “CM 型”.
  $\Rightarrow \int_\gamma\eta_\sigma \bmod \overline{\mathbb{Q}}^\times$: (K,Ξ,σ) のみによる.

更に ∃ 自然な “分解” $p_K(\sigma,\tau)\in\mathbb{C}^\times/\overline{\mathbb{Q}}^\times$ s.t.

$$p_K(\sigma,\Xi):=\prod_{\tau\in\Xi}p_K(\sigma,\tau)\equiv\begin{cases}\pi^{-1}\int_\gamma\eta_\sigma & (\sigma\in\Xi)\\ \int_\gamma\eta_\sigma & (\sigma\notin\Xi)\end{cases} \bmod \overline{\mathbb{Q}}^\times.$$

$I_K:=\bigoplus_{\sigma\in\mathrm{Hom}(K,\overline{\mathbb{Q}})}\mathbb{Q}\cdot\sigma$ 上の双線形写像 $I_K\times I_K\to\mathbb{C}^\times/\overline{\mathbb{Q}}^\times$ へ拡張:

$$p_K\left(\sum_i l_i\cdot\sigma_i,\sum_j r_j\cdot\tau_j\right):=\prod_{i,j}p_K(\sigma_i,\tau_j)^{l_ir_j}.$$

志村の周期記号

Example

- フェルマー曲線 $F_n\colon x^n + y^n = 1 \rightsquigarrow J(F_n)$ with CM by 円分体.
- $\eta_{r,s} := x^r y^{s-n}\frac{dx}{x}$ $(0 < r, s < 2n,\ r+s \neq n$, K-eigen 微分形式全体).

簡単のため $r+s<n$, $(rs(r+s), n) = 1$ とする:

- $$\Xi_{r,s} = \left\{\sigma_b\colon \zeta_n \mapsto \zeta_n^b \mid \langle \tfrac{br}{n}\rangle + \langle \tfrac{bs}{n}\rangle + \langle \tfrac{b(n-r-s)}{n}\rangle = 1\right\} \subset \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}(\zeta_n), \mathbb{C})$$

  は $(J(Fn)$ の成分の$)$ CM 型.

$$\text{周期記号の定義} \Rightarrow p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\mathrm{id}, \Xi_{r,s}) :\equiv \pi^{-1}\int_\gamma \eta_{r,s} \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times.$$

一方で, 直接計算により

Theorem (Rohrlich の公式)

$$\int_\gamma \eta_{r,s} \equiv B\left(\frac{r}{n}, \frac{s}{n}\right) = \frac{\Gamma(\frac{r}{n})\Gamma(\frac{s}{n})}{\Gamma(\frac{r+s}{n})}.$$

"幾何的解釈" $\cdots$ 周期記号の単項関係式

1. ρ: cpx.cnj. $\Rightarrow p_K(\sigma,\tau)p_K(\sigma,\rho\circ\tau)\equiv 1.$ (eg, Legendre's rel. $\because$ 偏極)
2. $K\subset L \Rightarrow p_K(\mathrm{Res}(X),Y)\equiv p_L(X,\mathrm{Inf}(Y)).$

   $(\mathrm{Res}(\tilde\sigma):=\tilde\sigma|_K\ \ \mathrm{Inf}(\sigma):=\sum_{\tilde\sigma|_K=\sigma}\tilde\sigma)$
3. $\pi p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\mathrm{id},\Xi_{r,s})\equiv\int_\gamma \eta_{r,s}\equiv\frac{\Gamma(\frac{r}{n})\Gamma(\frac{s}{n})}{\Gamma(\frac{r+s}{n})}.$ (Rohrlich)
4. $\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)\equiv \pi^{\frac12-\langle\frac{a}{n}\rangle}p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}\left(\mathrm{id},\sum_{(b,n)=1}\left(\frac12-\langle\frac{ab}{n}\rangle\right)\cdot\sigma_b\right).$

   (吉田, K-, by 1, 2, 3)

Note. ガンマ関数の関数等式 $(\mathrm{mod}\,\overline{\mathbb{Q}}^\times)$ は "幾何的に" 示せる！

- "相反公式" $\Gamma_\infty(\frac{a}{n})\Gamma_\infty(\frac{n-a}{n})\ \in\overline{\mathbb{Q}}$ $\overset{4}{\Longleftarrow}$ 1.
- "乗法公式" $\prod_{k=0}^{d-1}\Gamma_\infty(\frac{a}{n}+\frac{k}{d})\equiv\Gamma_\infty(\frac{ad}{n})$ $\overset{4}{\Longleftarrow}$ 2.

【関数等式 $\Leftrightarrow$ 単項関係式】 の p 進類似 $\Rightarrow$ 「Coleman の公式」(の一部)

Coleman の公式

Theorem (Coleman, $p \nmid n$ の場合)

$p \nmid n \Rightarrow F_n : x^n + y^n = 1$ は良い還元をもつ

$\Rightarrow \exists$ 絶対フロベニウス (abs.Fr.) $\Phi \curvearrowright H^1_{dR}(F_n, \mathbb{Q}_p)$.

基底 $\eta_{r,s} = x^{r-1}y^{s-n}dx \in H^1_{dR}(F_n, \mathbb{Q}_p)$ に関する表現行列:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \frac{\Gamma_p(\frac{a+b}{n})}{\Gamma_p(\frac{a}{n})\Gamma_p(\frac{b}{n})} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_p(z) := \lim_{\mathbb{N} \ni k \to z} (-1)^{k-1} \prod_{p \nmid i = 1}^{k-1} i \quad \text{(Morita's } \Gamma_p\text{)}.$$

Remark

- オリジナルの証明は明示的な計算による.
- "別証明" の方針:

❶ $\Gamma_p(z) = G(z)$ の形に言い換え. ❷ 両辺を特徴付ける関数等式を示す.

Coleman の公式 (abs.Fr.$\curvearrowright H^1_{dR}(F_n/\mathbb{Q}_p)$) の言い換え

- p 進 Hodge: $\int_p : H_1^B(A(\mathbb{C})) \times H^1_{dR}(A/\overline{\mathbb{Q}}_p) \to B_{dR}$, $(\gamma,\eta) \mapsto \int_{p,\gamma} \eta$.
- "比" $\left[\int_\gamma \eta_\sigma : \int_{p,\gamma} \eta_\sigma\right] \in (\mathbb{C}^\times \times B_{dR}^\times)/\overline{\mathbb{Q}}^\times$: (σ, Ξ) のみによる.

これを (モチーフの言葉で) "分解" して以下を得る:

Proposition

∃ 双線形写像 $[p_K : p_{K,p}] : I_K \times I_K \to (\mathbb{C}^\times \times B_{dR}^\times)/(\mu_\infty \times \mu_\infty)\overline{\mathbb{Q}}^\times$ s.t.

1. $$[p_K : p_{K,p}](\sigma,\Xi) \equiv \begin{cases} [(2\pi i)^{-1} \int_\gamma \eta_\sigma : (2\pi i)_p^{-1} \int_{\gamma,p} \eta_\sigma] & (\sigma \in \Xi) \\ [\int_\gamma \eta_\sigma : \int_{\gamma,p} \eta_\sigma] & (\sigma \notin \Xi) \end{cases}.$$
2. $[p_K : p_{K,p}](\sigma,\tau) \cdot [p_K : p_{K,p}](\sigma, \rho\circ\tau) \equiv 1$.
3. $[p_K : p_{K,p}](\mathrm{Res}(X), Y) \equiv [p_L : p_{L,p}](X, \mathrm{Inf}(Y))$.
4. $\int_{p,\gamma} \eta \in B_{cris}\overline{\mathbb{Q}}_p \curvearrowleft W$: Weil group $\subset \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$.

   $\tau \in W \Rightarrow \Phi_\tau := \mathrm{abs.Fr.}^{\deg \tau} \otimes \tau \curvearrowright B_{cris} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_p^{ur}} \overline{\mathbb{Q}}_p \cong B_{cris}\overline{\mathbb{Q}}_p$.

Coleman の公式 (abs.Fr.$\curvearrowright H^1_{dR}(F_n/\mathbb{Q}_p)$) の言い換え

Definition ($\frac{a}{n} \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$)

$$P\left(\tfrac{a}{n}\right) := \frac{\Gamma_\infty\left(\frac{a}{n}\right)\cdot(2\pi i)_p^{\frac{1}{2}-\langle\frac{a}{n}\rangle} p_{\mathbb{Q}(\zeta_n),p}\left(\mathrm{id}, \sum_{(b,n)=1}\left(\frac{1}{2}-\langle\frac{ab}{n}\rangle\right)\sigma_b\right)}{(2\pi i)^{\frac{1}{2}-\langle\frac{a}{n}\rangle} p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}\left(\mathrm{id}, \sum_{(b,n)=1}\left(\frac{1}{2}-\langle\frac{ab}{n}\rangle\right)\sigma_b\right)} \in (B_{cris}\overline{\mathbb{Q}}_p)^{\mathbb{Q}}/\mu_\infty.$$

Theorem (Coleman, $p \nmid n$, $p \mid n$ 両方の場合, up to μ_∞)

$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \curvearrowright \mathbb{Q} \cap (0,1)$ by $\tau(\zeta_n^a) = \zeta_n^b \Rightarrow \tau\left(\frac{a}{n}\right) := \frac{b}{n}$. $p \neq 2$, $\tau \in W$.

1. $z \in \mathbb{Z}_{(p)} \cap (0,1)$, $\deg \tau = 1$.
$$\Gamma_p(z) \equiv p^{\frac{1}{2}-\tau^{-1}(z)} \frac{P(z)}{\Phi_\tau(P(\tau^{-1}(z)))} \mod \mu_\infty.$$
2. $z \in (\mathbb{Q} - \mathbb{Z}_{(p)}) \cap (0,1)$.
$$\frac{\Gamma_p(\tau(z))}{\Gamma_p(z)} \equiv \frac{p^{(z-\tau(z))\mathrm{ord}_p z} P(\tau(z))}{\Phi_\tau(P(z))} \mod \mu_\infty.$$

※ $z = \frac{z_0}{p^l} \notin \mathbb{Z}_{(p)} \Rightarrow \Gamma_p(z) := \exp_p\left(\frac{d}{ds}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(z_0+p^l k)^{-s}\right]_{p\text{ 進補間}}\Big|_{s=0}\right)$.

Coleman の公式 (abs.Fr.$\curvearrowright H^1_{dR}(F_n/\mathbb{Q}_p)$) の言い換え

Remark (応用)

1. オリジナル $\Rightarrow$ Gross-Koblitz 公式 (ガウス和 $=\Gamma_p$ の積).
2. 言い換え版 $\Rightarrow$ "円単数の相互法則" の別証明 (Crelle 2018)

$$\tau\left(\Gamma_\infty(\tfrac{a}{n})\Gamma_\infty(\tfrac{n-a}{n})\right)\equiv\Gamma_\infty(\tau(\tfrac{a}{n}))\Gamma_\infty(\tau(\tfrac{n-a}{n}))\mod \mu_\infty.$$

$$\because\quad P(\tfrac{a}{n}):=\frac{\Gamma_\infty(\frac{a}{n})\cdot(2\pi i)_p^{\frac{1}{2}-\langle\frac{a}{n}\rangle}p_{\mathbb{Q}(\zeta_n),p}\left(\mathrm{id},\sum_{(b,n)=1}\left(\frac{1}{2}-\langle\frac{ab}{n}\rangle\right)\sigma_b\right)}{(2\pi i)^{\frac{1}{2}-\langle\frac{a}{n}\rangle}p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}\left(\mathrm{id},\sum_{(b,n)=1}\left(\frac{1}{2}-\langle\frac{ab}{n}\rangle\right)\sigma_b\right)}.$$

$$P(\tfrac{a}{n})P(\tfrac{n-a}{n})\doteqdot\Gamma_\infty(\tfrac{a}{n})\Gamma_\infty(\tfrac{n-a}{n}).$$

Φ_τ: τ-semilinear.

$$\left\{\begin{array}{ll}\text{archimedean local} & \text{(Rohrlich)}\\ p\text{-adic local} & \text{(Coleman)}\end{array}\right.\Longrightarrow \text{global (ガウス和, 円単数).}$$

Coleman の公式 (abs.Fr.$\curvearrowright H^1_{dR}(F_n/\mathbb{Q}_p)$) の言い換え

Remark (応用)

1. オリジナル $\Rightarrow$ Gross-Koblitz 公式 (ガウス和 $= \Gamma_p$ の積).
2. 言い換え版 $\Rightarrow$ “円単数の相互法則” の別証明 (Crelle 2018)

$$\tau\left(\Gamma_\infty(\tfrac{a}{n})\Gamma_\infty(\tfrac{n-a}{n})\right) \equiv \Gamma_\infty(\tau(\tfrac{a}{n}))\Gamma_\infty(\tau(\tfrac{n-a}{n})) \mod \mu_\infty.$$

$$\begin{cases} \text{archimedean local} & \text{(Rohrlich)} \\ p\text{-adic local} & \text{(Coleman)} \end{cases} \Longrightarrow \text{global (ガウス和, 円単数).}$$

Remark (円分体 $\Rightarrow$ 一般の CM 体)

1. $\Gamma, \Gamma_p \Rightarrow$ Barnes の多重 Γ 関数とその p 進類似 (新谷, 吉田, K-吉田).
2. Rohrlich $\Rightarrow$ 吉田予想 (Absolute CM-Periods) $\Rightarrow$ 改良 (AJM 2018).
3. Coleman $\Rightarrow$ 〃 の p 進類似 (K-吉田) $\Rightarrow$ 改良 (arXiv:1706.03198).

※ 時間が許せば紹介予定.

主結果 (“Coleman の公式の別証明”)

Morita's $\Gamma_p(z) := \lim_{\mathbb{N}\ni k\to z}(-1)^{k-1}\prod_{p\nmid i=1}^{k-1} i \ (z\in\mathbb{Z}_p)$ も “乗法公式” を満たす:

$$\prod_{k=0}^{d-1}\Gamma_p(z+\tfrac{k}{d}) \equiv d^{1-(dz)_0}\Gamma_p(dz) \mod \mu_\infty \quad (z\in\mathbb{Z}_p,\ p\nmid d\in\mathbb{N}),$$

$$z = z_0 + z_1 p + z_2 p^2 + \cdots,\ \underline{z_0\in\{1,\dots,p\}},\ z_1, z_2, \ldots \in \{0,\dots,p-1\}$$

Proposition (Morita's Γ_p の “関数等式による特徴付け”)

$f(z)\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p^\times$: 連続, $\prod_{k=0}^{d-1} f(z+\tfrac{k}{d}) \equiv f(dz) \mod \mu_\infty \ (p\nmid d\in\mathbb{N})$

$$\Rightarrow \exists\alpha_* \text{ (定数) s.t. } f(z) \equiv \alpha_0\prod_{k=0}^{\infty}\alpha_k^{z_k-\frac{p-1}{2}}.$$

更に $c_k :\equiv \frac{f(p^k+1)}{f(p^k)}$, $\alpha_k := c_k\prod_{i=0}^{k-1}c_i^{p^{k-1-i}(p-1)}$ と書ける. 特に

1. $c_0 = c_1 = c_2 = \cdots \Leftrightarrow f(z) \equiv c_0^{z-\frac{1}{2}} \mod \mu_\infty$.
2. $c_1 = c_2 = \cdots \Leftrightarrow f(z) \equiv c_0^{z-\frac{1}{2}}(c_1/c_0)^{\frac{z-z0}{p}+\frac{1}{2}} \mod \mu_\infty$.

主結果 (“Coleman の公式の別証明”)

Recall. Coleman の公式: $\Gamma_p(z) \equiv G(z)$,

$$G(z) :\equiv p^{\frac{1}{2}-\tau^{-1}(z)} \frac{P(z)}{\Phi_\tau(P(\tau^{-1}(z)))} \qquad (z \in \mathbb{Z}_{(p)} \cap (0,1),\ \deg \tau = 1),$$

$$P(\tfrac{a}{n}) := \frac{\Gamma_\infty(\frac{a}{n})\cdot(2\pi i)_p^{\frac{1}{2}-\langle \frac{a}{n} \rangle} p_{\mathbb{Q}(\zeta_n),p}(\mathrm{id},\cdots)}{(2\pi i)^{\frac{1}{2}-\langle \frac{a}{n} \rangle} p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\mathrm{id},\cdots)} \in (B_{cris}\overline{\mathbb{Q}}_p)^{\mathbb{Q}}/\mu_\infty.$$

独立に “乗法公式” $\displaystyle\prod_{k=0}^{d-1} G(z+\tfrac{k}{d}) \equiv d^{1-(dz)_0} G(dz) \mod \mu_\infty \quad (p \nmid d)$

$\because$ Γ 関数の乗法公式 $\Leftrightarrow$ 周期記号の単項関係式, p 進版.

Remark

証明には $G(z)$ の p 進連続性を “仮定” ($\Rightarrow G(z)\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p^\times$ と思える).

- 実際は (明示的な計算により Γ_p と一致するので) 連続的.
- “明示的な計算なし” で, 連続性のみ示すこともできる.
- 以下の G_τ の連続性の “明示的な計算なし” の証明は, 取り組み中.

主結果 (“Coleman の公式の別証明”)

Theorem

G (と証明中の G_τ) は p 進連続的であると仮定し $f(z) := \frac{G(z)}{\Gamma_p(z)}$ とおくと

$$\prod_{k=0}^{d-1} f(z+\tfrac{k}{d}) \equiv f(dz)\ (p \nmid d), \quad c_1 = c_2 = \cdots \qquad (c_n :\equiv \frac{f(p^n+1)}{f(p^n)}).$$

Sketch of Proof.

$\frac{G(pz)G(z+1)}{G(pz+1)G(z)} \equiv \frac{\Gamma_p(pz)\Gamma_p(z+1)}{\Gamma_p(pz+1)\Gamma_p(z)}$ $(=1)$ を言えばよい．おおよその流れは

$$\text{“}p\text{ 倍公式”: } \prod_{k=0}^{p-1} G(z+\tfrac{k}{p}) \fallingdotseq G(pz)$$

$$\overset{\frac{1}{p}\text{ ずらす}}{\Rightarrow} \quad \prod_{k=1}^{p} G(z+\tfrac{k}{p}) \fallingdotseq G(pz+1)$$

$$\overset{\text{辺々割る}}{\Rightarrow} \frac{G(z+1)}{G(z)} = \frac{G(pz+1)}{G(pz)} \Rightarrow \frac{G(pz)G(z+1)}{G(pz+1)G(z)} = 1.$$

※ $z+\frac{k}{p} \notin \mathbb{Z}_p$ より $G(z)$ の拡張が必要: $\tau \in W$ with $\deg \tau = 1$ に対し

$$G_\tau(z) :\equiv \frac{p^{(\tau^{-1}(z)-z)\mathrm{ord}_p z} P(z)}{\Phi_\tau(P(\tau^{-1}(z)))} \ (z \in (\mathbb{Q}-\mathbb{Z}_{(p)}) \cap (0,1) \overset{\text{連続性}}{\Rightarrow} \in \mathbb{Q}_p - \mathbb{Z}_p). \quad \square$$

主結果 (“Coleman の公式の別証明”)

Proposition

$f(z)\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p^\times$: 連続, $\displaystyle\prod_{k=0}^{d-1} f(z+\tfrac{k}{d}) \equiv f(dz) \mod \mu_\infty \ (p \nmid d \in \mathbb{N})$

$$\Rightarrow f(z) \equiv \alpha_0 \prod_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{z_k - \frac{p-1}{2}},\ c_k :\equiv \frac{f(p^k+1)}{f(p^k)},\ \alpha_k := c_k \prod_{i=0}^{k-1} c_i^{p^{k-1-i}(p-1)}.$$

1. $c_0 = c_1 = c_2 = \cdots \Leftrightarrow f(z) \equiv c_0^{z-\frac{1}{2}} \mod \mu_\infty.$
2. $c_1 = c_2 = \cdots \Leftrightarrow f(z) \equiv c_0^{z-\frac{1}{2}} (c_1/c_0)^{\frac{z-z0}{p}+\frac{1}{2}} \mod \mu_\infty.$

Theorem

G, G_τ は p 進連続的であると仮定し $f(z) := \dfrac{G(z)}{\Gamma_p(z)}$ とおくと

$$\prod_{k=0}^{d-1} f(z+\tfrac{k}{d}) \equiv f(dz)\ (p \nmid d),\quad c_1 = c_2 = \cdots \quad \left(c_n :\equiv \frac{f(p^n+1)}{f(p^n)}\right).$$

主結果 (“Coleman の公式の別証明”)

abs.Fr. Φ, Φ_τ の p 進連続性の仮定の下, 明示的な計算無しに次を得た:

Corollary

$$\exists a, b \text{ s.t. } G(z) \equiv a^{z-\frac{1}{2}} b^{\frac{z-z0}{p}+\frac{1}{2}} \Gamma_p(z) \bmod \mu_\infty \quad (z \in \mathbb{Z}_p).$$

Remark (曲線の族 $\Rightarrow$ 一つの曲線)

+2 回の計算で, Coleman の公式 (for all F_n with $p \nmid n$) が復元できる:

e.g., $p = 3$. $\Phi \curvearrowright F_5 \Rightarrow$ Coleman の公式の $z = \frac{1}{5}, \frac{2}{5}$ の場合

$\Rightarrow a^{\frac{-3}{10}} b^{\frac{-1}{10}} \equiv a^{\frac{-1}{10}} b^{\frac{-3}{10}} \equiv 1 \Rightarrow a \equiv b \equiv 1.$

Remark

$c_0 = c_1$ や $p \nmid n$ に対して同様の議論ができるかは, 連続性が微妙.

一般化へ向けて ⋯ Gross-Stark 予想とその周辺

Recall. Coleman の公式 $\Rightarrow$ Gross-Koblitz 公式 (etc.).

Gross-Koblitz 公式の一般化: $K/k = \mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q} \rightsquigarrow$ CM 体 / 総実体

- Gross-Stark 予想: $\frac{L_p^{(r_p(\chi))}(\chi\omega,0)}{r!L(\chi,0)} = \mathcal{R}_p(\chi)\prod_{\mathfrak{p}|p,\ \chi(\mathfrak{p})\neq 1}(1-\chi(p))$.
  (Dasgupta-Darmon-Pollack, Ventullo, Dasgupta-Kakde-Ventullo)
- K-Yoshida 予想 (ver.1): p 進 log 多重ガンマ関数 $\in \log_p(k^{ab})$.
- Dasgupta 予想: p 進乗法的積分 $\in k^{ab}$.

Example ($k = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{\frac{13+\sqrt{5}}{2}}i) = H_{\mathfrak{p}_{41}\rho_1\rho_2}$, $p = 59$)

- KY: $\sum \log_p \Gamma_{2,p}(*,(*,*)) +$ “補正項” $\fallingdotseq \log_p(-\sqrt{\frac{13+\sqrt{5}}{2}}i + \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 1)$.
- GS: $r_p(\chi) = 2$, $\frac{L_p^{(2)}(\chi\omega,0)}{2L(\chi,0)} \fallingdotseq \det\begin{pmatrix}\log_p(\sim) & \log_p(\sim)\\ \log_p(\sim) & \log_p(\sim)\end{pmatrix}$.

Coleman の公式の一般化？ $\Rightarrow$ KY 予想

Coleman の公式の一般化 (定式化の概略)

χ: CM 体 K の代数的 Hecke 指標

$$\rightsquigarrow M = M(\chi)\text{: } K \text{ 上定義された } K^* := \tilde{K}(\mathrm{Im}(\chi)) \text{ 係数のモチーフ}$$

(s.t. $L(s, M) = (L(s, \rho \circ \chi)_{\rho\colon K^* \hookrightarrow \mathbb{C}}$)

(e.g., $E : y^2 = x^3 - x$, $J(F_n)$).

$\eta \in H_{dR}(M)$, $\gamma \in H^B(M)$

- 双線形写像 $\int\colon H^B(M) \times H_{dR}(M) \to \mathbb{C}$, $(\gamma, \eta) \mapsto \int_\gamma \eta$.
- (別の) 双線形写像 $\int_p\colon H^B(M) \times H_{dR}(M) \to B_{dR}$, $(\gamma, \eta) \mapsto \int_{p,\gamma} \eta$.

M: 階数 1, γ, η_σ: 基底 (i.e., $H^B(M) = K\gamma$, $H_{dR}(M) = \bigoplus_{\sigma\colon K \hookrightarrow K^*} K^* \eta_\sigma$)

$\rightsquigarrow [P_{\sigma,\chi} : P_{p,\sigma,\chi}] := [\int_\gamma \eta_\sigma : \int_{p,\gamma} \eta_\sigma] \in (\mathbb{C}^\times \times B_{dR}^\times)/\overline{\mathbb{Q}}^\times$: γ, η_σ によらない.

さらに $\mathrm{mod}\,\mu_\infty$ なら χ の infinite type と σ のみによる.

潜在的に良い還元をもつ

$$\rightsquigarrow \int_{p,\gamma} \eta \in B_{cris}\overline{\mathbb{Q}}_p \curvearrowleft \Phi_\tau \text{ } (\tau \in W \text{ (Weil Group)} \subset \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p))$$

Coleman の公式の一般化 (arXiv:1706.03198)

Definition (k 総実体, K/k: 有限次アーベル拡大, K: CM 体)

χ: K の代数的 Hecke 指標 s.t. inf. type $= \sum_{\tau \in \mathrm{Gal}(K/k)} w_K \zeta(0, \tau^{-1})\tau$,
$M(\chi)$: K^* 係数モチーフ, $(P_{\sigma,\chi})_\sigma, (P_{p,\sigma,\chi})_\sigma$: $M(\chi)$ の周期, p 進周期.

Conjecture ($\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)$)

1. (吉田予想) $\exp(X(\sigma, \mathrm{id}))$ ($\fallingdotseq$ 多重 Γ 関数の積) $\equiv P_{\sigma,\chi}^{\frac{1}{w_K}} \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times$.
2. $G(\sigma) := \dfrac{\exp(X(\sigma,\mathrm{id}))P_{p,\sigma,\chi}^{\frac{1}{w_K}}}{P_{\sigma,\chi}^{\frac{1}{w_K}}} \in B_{cris}\overline{\mathbb{Q}}_p/\mu_\infty$, $\tau \in W \cap \mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}})$
$$\Phi_\tau(G(\sigma)) \equiv p \text{ 進多重 } \Gamma \text{ 関数の積} \cdot G(\tau\sigma) \mod \mu_\infty.$$

Theorem

1. K: アーベル体, かつ [p: $k/\mathbb{Q}$ で惰性 又は $\mathfrak{p}$: K/k で分岐] で成立.
2. KY 予想 ver.1,2 (GS 予想の精密化) を含む.
3. Stark 予想の一部分 (“相互法則: $\tau(u(\sigma)) \equiv u(\tau\sigma) \mod \mu_\infty$”) を含む.