円単数の相互法則の細分, 及びその一般化

Tomokazu Kashio[*]

2019 年 12 月 26 日 10:00～11:00

概 要

Coleman は Fermat 曲線上の絶対 Frobenius 作用を明示的に計算した. その応用として, ガウス和に関する Gross-Koblitz 公式が導かれる. 一方で, 講演者は Coleman の結果から "円単数の相互法則の細分" が導かれることを発見した. 時間が許せば, さらに "Stark 単数の相互法則の細分" への拡張と, Coleman の結果の別証明への取り組みも紹介したい.

1 導入

相互法則 $\cdots$ Galois 群の元 (体の自己同型) の 明示的な記述 のこと (?)

$$\begin{array}{rccc} \text{Artin:} & Cl_{k,\mathfrak{f}} & \overset{\cong}{\to} & \mathrm{Gal}(H_{\mathfrak{f}}/k), \\ & [\mathfrak{p}] & \mapsto & \left[\sigma_{\mathfrak{p}} \colon z \mapsto \sigma_{\mathfrak{p}}(z) \equiv z^{N\mathfrak{p}} \bmod \mathfrak{P}\right] \end{array}$$

平方剰余記号 (と相互法則) $\cdots$ ガウス和の相互法則 (※ 次の講演とは無関係？)

平方剰余記号

$$\begin{array}{ccccccccc} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times & \cong & \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\tau_p)/\mathbb{Q}) & \cong & \{\pm 1\} \end{array}$$

$$\tau_p := \sum_b \left(\tfrac{b}{p}\right)\zeta_p^b : \text{ガウス和}$$

$$= p^{*\frac{1}{2}} \quad \left(p^* := \left(\tfrac{-1}{p}\right)p = \pm p\right)$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \overline{a} & \leftrightarrow & \left[\sigma_{\overline{a}} \colon \zeta_p \mapsto \zeta_p^a\right] & \mapsto & \left[\sigma_{\overline{a}} \colon \tau_p \mapsto \left(\tfrac{a}{p}\right)\tau_p\right] & \leftrightarrow & \left(\tfrac{a}{p}\right) \end{array}$$

平方剰余の相互法則

$$\tau_p^q = (p^*)^{\frac{q-1}{2}}\tau_p \equiv \left(\frac{p^*}{q}\right)\tau_p$$

$$\tau_p^q \equiv \sum_b \left(\tfrac{b}{p}\right)\zeta_p^{bq} \equiv \left(\tfrac{q}{p}\right)\tau_p$$

[*]Tokyo University of Science, kashio_tomokazu@ma.noda.tus.ac.jp

“円単数の相互法則”

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times & \twoheadrightarrow & \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n+\zeta_n^{-1})/\mathbb{Q}) \\ \overline{a} & \mapsto & [\sigma_{\overline{a}}\colon \zeta_n+\zeta_n^{-1}\mapsto \zeta_n^a+\zeta_n^{-a}] \end{array}$$

$$\left(2\sin\tfrac{b\pi}{n}\right)^2 = -\zeta_n^b\left(1-\zeta_n^{-b}\right)^2 \fallingdotseq \text{円単数}$$

$$\sigma_{\overline{a}}\left(\left(2\sin\tfrac{b\pi}{n}\right)^2\right) = \left(2\sin\tfrac{ab\pi}{n}\right)^2$$

“細分”？　Euler の反射公式

$$\frac{\Gamma\left(\frac{b}{n}\right)}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-b}{n}\right)}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\sin\frac{b\pi}{n}}$$

を考えると

$$(\text{もちろん嘘だが})\quad \sigma_{\overline{a}}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{b}{n}\right)}{\sqrt{2\pi}}\right) \overset{?}{=} \pm\frac{\Gamma\left(\frac{ab}{n}\right)}{\sqrt{2\pi}}.$$

実際は Coleman の結果 [Co] を, p **進周期** を用いて再解釈することで “円単数の相互法則の細分” (Crelle, 2018) [Ka3] を導いた. この結果と, その後の進展 (arXiv:1904.02879, arXiv:1706.03198) [Ka1, Ka2] を, 時間の許す限り紹介する.

2　円単数の相互法則の細分

$\frac{\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)}{\sqrt{2\pi}}$ は (恐らく) 超越数なので “Galois 群の作用” は期待薄である. 解決策として

CM 周期

を導入する. 次が基本になる.

Theorem 2.1 (Rohrlich)**.** $F_n\colon x^n+y^n=1$ 上の微分形式 $\eta_{r,s} : x^{r-1}y^{s-n}dx$ $(0<r,s<n$, $r+s\neq n)$ と, $F_n(\mathbb{C})$ の閉路 γ に対して

$$\int_\gamma \eta_{r,s} = \int_\gamma x^{r-1}(1-x^n)^{\frac{s}{n}-1}dx \overset{t=x^n}{\equiv} \int_0^1 t^{\frac{r}{n}-1}(1-t)^{\frac{s}{n}-1}dt =: B\left(\tfrac{r}{n},\tfrac{s}{n}\right) = \frac{\Gamma(\frac{r}{n})\Gamma(\frac{s}{n})}{\Gamma(\frac{r+s}{n})} \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times$$

(または $=0$).

Rohrlich の公式を **分解** して $\frac{\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)}{\sqrt{2\pi}}$ を再解釈する. “ベータ関数 $\Rightarrow$ ガンマ関数” の分解は, 関数等式を利用すれば (対数を取って) 線形代数の問題になる. 一方で $\int_\gamma \eta_{r,s}$ のような **“CM 型” の周期積分** も **志村の周期記号** で分解できることが知られている. 周期記号は

$$\langle \text{総実体の Hecke } L\text{-関数の critical values} \rangle \equiv \langle \pi \rangle \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times,$$
$$\text{e.g., } \zeta(2n) \equiv \pi^{2n} \bmod \mathbb{Q}^\times$$

の "CM 体 version" に現れる: CM 体 K に対し, π の "類似物" $p_K(\sigma,\tau)$ 達が定まり

$$\langle \text{ CM 体 } K \text{ の Hecke } L\text{-関数の critical values } \rangle \equiv \langle \pi, p_K(\sigma,\tau) \mid \sigma,\tau\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}\rangle \mod \overline{\mathbb{Q}}^{\times}.$$

円周率 π は, $\mathbb{G}_m(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{\times}$ 上の積分

$$\oint \frac{dt}{t} = 2\pi i$$

で定められるが, 周期記号はもう少し複雑な積分で定義される.

Example 2.2. 虚二次体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ に対し, 虚数乗法をもつ楕円曲線 $E\colon y^2 = x^3 - x$ を考え, $E(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}/\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \overset{e^{2\pi i z}}{\cong} \mathbb{C}^{\times}/\langle e^{-2\pi}\rangle$ の閉路 γ を用いて

$$\begin{aligned} &\langle \text{ } \mathbb{Q}(\sqrt{-1}) \text{ の Hecke } L\text{-関数の critical values } \rangle \\ &\equiv \left\langle \pi,\ \textstyle\int_\gamma \frac{dx}{y},\ \int_\gamma \frac{xdx}{y} \right\rangle \\ &\equiv \langle \pi, p_K(\mathrm{id},\mathrm{id}), p_K(\mathrm{id},\rho), p_K(\rho,\mathrm{id}), p_K(\rho,\rho)\rangle \mod \overline{\mathbb{Q}}^{\times}. \end{aligned}$$

※ $\int_\gamma \frac{dx}{y} := 2\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^3-x}} = 5.24411\ldots = 2\varpi$ (ϖ: レムニスケート周率), $\int_\gamma \frac{xdx}{y} = -1.19814\ldots = \frac{-2\pi}{\varpi}$, $p_K(\mathrm{id},\mathrm{id}) \equiv p_K(\rho,\rho) \equiv p_K(\mathrm{id},\rho)^{-1} \equiv p_K(\rho,\mathrm{id})^{-1} \equiv \frac{\varpi}{\pi}$ (c.f. Legendre's relation).

$K = \mathbb{Q}(\zeta_n)$ なら Fermat 曲線 F_n 上の微分形式 $\eta_{r,s}$ に対して

$$\begin{aligned} \langle \text{ } \mathbb{Q}(\zeta_n) \text{ の Hecke } L\text{-関数の critical values } \rangle &\equiv \left\langle \pi, \textstyle\int_\gamma \eta_{r,s} \mid r,s \right\rangle \\ &\equiv \left\langle \pi, p_K(\sigma_{\overline{a}}, \sigma_{\overline{b}}) \mid \overline{a}, \overline{b} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}\right\rangle \mod \overline{\mathbb{Q}}^{\times}. \end{aligned}$$

より明示的に

Proposition 2.3 ([Yo])**.** $K = \mathbb{Q}(\zeta_n)$, $r+s<n$, $(rs(r+s),n)=1$ のとき

$$\int_\gamma \eta_{r,s} \equiv \pi \prod_{\tau\in\Xi_{r,s}} p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\mathrm{id},\tau) \mod \overline{\mathbb{Q}}^{\times},$$

$$\Xi_{r,s} := \left\{ \sigma_{\overline{b}} \mid \langle \tfrac{br}{n}\rangle + \langle \tfrac{bs}{n}\rangle + \langle \tfrac{b(n-r-s)}{n}\rangle = 1 \right\}.$$

Rohrlich の公式 + Proposition 2.3 + "線形代数" で次を得る.

Corollary 2.4.

$$\frac{\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)}{\sqrt{2\pi}} \equiv P(\tfrac{a}{n}) := (2\pi i)^{\frac{1}{2}-\langle\frac{a}{n}\rangle} \prod_{\overline{b}\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}} p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}\left(\mathrm{id},\sigma_{\overline{b}}\right)^{\frac{1}{2}-\langle\frac{ab}{n}\rangle} \mod \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$$

Remark 2.5. この Corollary は Euler の反射公式と独立に示せる. さらに次式を導く:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-a}{n}\right)}{\sqrt{2\pi}} \equiv P(\tfrac{a}{n})P(\tfrac{n-a}{n}) = (2\pi i)^{1-\langle\frac{a}{n}\rangle-\langle 1-\frac{a}{n}\rangle} \prod p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}\left(\mathrm{id},\sigma_{\overline{b}}\right)^{1-\langle\frac{ab}{n}\rangle-\langle 1-\frac{a}{n}\rangle} = 1.$$

すなわち<u>円単数の代数性</u> $\frac{\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-a}{n}\right)}{\sqrt{2\pi}} \in \overline{\mathbb{Q}}$ が, 反射公式 ($= \frac{1}{2\sin\frac{a\pi}{n}}$) 無しで "幾何的に" 導ける.

Definition 2.6. $p \nmid a$, $p \mid n$ のとき

$$G(\tfrac{a}{n}) := \frac{\frac{\Gamma(\frac{a}{n})}{\sqrt{2\pi}} \cdot P_p(\frac{a}{n})}{\Gamma_p(\frac{a}{n}) \cdot P(\frac{a}{n})} \in B_{dR}^{\times}/\mu_\infty$$

とおく. ここで

- p 進整数以外 $\frac{z_0}{p^l}$ $(0 < z_0 \in \mathbb{Z}_{(p)}^{\times},\ l \geq 1)$ での p 進ガンマ関数を
$$\Gamma_p(\tfrac{z_0}{p^l}) := \exp_p\left(\frac{d}{ds}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(z_0 + p^l k)^{-s}\right]_{p\text{ 進補間}}\Big|_{s=0}\right)$$
で定める. c.f. $\frac{\Gamma(z)}{\sqrt{2\pi}} \overset{\text{Lerch}}{=} \exp\left(\frac{d}{ds}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(z+k)^{-s}\right]\big|_{s=0}\right)$.

- $P_p(\frac{a}{n}) := (2\pi i)_p^{\frac{1}{2}-\langle\frac{a}{n}\rangle} \prod_{\bar{b}\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}} p_{p,\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\mathrm{id}, \sigma_{\bar{b}})^{\frac{1}{2}-\langle\frac{ab}{n}\rangle}$ とおく. ここで p 進周期記号 $p_{p,K}$ は, de Rham 同型を p 進 Hodge Theory の比較同型に取り換えて定義される:

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{de Rham 同型} & \overset{H_1^B\otimes H_B^1\to\mathbb{Q}}{\Longrightarrow} & H_1^B & \otimes & H_{dR}^1 & \to & \mathbb{C} & \overset{\text{分解}}{\Longrightarrow} & p_K \\ H_B^1\otimes\mathbb{C}\cong H_{dR}^1\otimes\mathbb{C} & & \Cup & & \Cup & & \Cup & & \\ & & \gamma & & \eta & & \int_\gamma \eta & & \\ \hline p\text{ 進 Hodge の比較同型} & \overset{H_1^B\otimes H_B^1\to\mathbb{Q}}{\Longrightarrow} & H_1^B & \otimes & H_{dR}^1 & \to & B_{dR} & \overset{\text{分解}}{\Longrightarrow} & p_{p,K} \\ H_B^1\otimes B_{dR}\cong H_{dR}^1\otimes B_{dR} & & \Cup & & \Cup & & \Cup & & \\ & & \gamma & & \eta & & \int_{p,\gamma}\eta & & \end{array}$$

その結果, それぞれの周期は $\overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ 分の ambiguity
$$P(\tfrac{a}{n}) \in \mathbb{C}^{\times}/\overline{\mathbb{Q}}^{\times}, \qquad P_p(\tfrac{a}{n}) \in B_{dR}^{\times}/\overline{\mathbb{Q}}^{\times}$$
を持つが, それらの "比" は μ_∞ 分の ambiguity で済む:
$$[P(\tfrac{a}{n}) : P_p(\tfrac{a}{n})] \in (\mathbb{C}^{\times}\times B_{dR}^{\times})/\overline{\mathbb{Q}}^{\times}(\mu_\infty\times\mu_\infty).$$

- 虚数乗法をもつアーベル多様体は潜在的に良い還元をもつので Weil 群 $W_p \subset \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ の作用を持つ:
$$G(\tfrac{a}{n}) \in (B_{cris}\overline{\mathbb{Q}}_p - \{0\})^{\mathbb{Q}}/\mu_\infty \curvearrowleft \Phi_\tau := \mathrm{abs.Fr}^{\deg\tau}\otimes\tau \quad (\tau\in W_p).$$

Theorem 2.7 (Coleman の結果の言い換え [Ka2, Ka3])**.** $p \neq 2$, $p \nmid a$, $p \mid n$ とする. このとき

$$\Phi_\tau(G(\tfrac{a}{n})) \equiv G(\tau(\tfrac{a}{n})) \mod \mu_\infty.$$

ここで

$$\tau(\tfrac{a}{n}) = \tfrac{b}{n} \quad \overset{\text{dfn}}{\Longleftrightarrow} \quad \tau(\zeta_n^a) = \zeta_n^b.$$

※ $(p \nmid n)$-version もあり ($\rightsquigarrow$ Theorem 4.1).
※ modμ_∞ は改善の余地あり？ c.f. "Integral refinement".

v.s. 円単数の相互法則. Remark 2.5 より $P(\frac{a}{n})P(\frac{n-a}{n}) = 1$ であった. $P_p(\frac{a}{n})P_p(\frac{n-a}{n})$ も同様. よって

$$\begin{array}{ccccc} G(\frac{a}{n})G(\frac{n-a}{n}) \equiv \dfrac{\frac{\Gamma(\frac{a}{n})}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-a}{n}\right)}{\sqrt{2\pi}}}{\Gamma_p(\frac{a}{n})\Gamma_p(\frac{n-a}{n})} & \overset{\text{“}p\text{ 進反射公式”}}{\equiv} & \dfrac{\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{\Gamma\left(\frac{n-a}{n}\right)}{\sqrt{2\pi}} = \dfrac{1}{2\sin\frac{b\pi}{n}} \mod \mu_\infty \\ \circlearrowright & & \circlearrowright \\ \Phi_\tau = \mathrm{abs.Fr}^{\deg\tau} \otimes \tau & \longleftrightarrow & \tau \in W_p \subset \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \subset \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \end{array}$$

3 拡張: Stark 単数の相互法則の細分 (予想)

吉田氏の研究 [Yo] が基礎となっている. 以下のような拡張が知られていた:

$\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$, $\frac{a}{n} \in \mathbb{Q}$	$\Longrightarrow$	アーベル拡大 K/F, F: 総実体, $\sigma \in G := \mathrm{Gal}(K/F)$
円単数: $\frac{1}{2\sin\frac{a\pi}{n}}$	$\Longrightarrow$	$K^{\exists} \hookrightarrow \mathbb{R}$ の時 **Stark 単数** $\exp(2\zeta'(0,\sigma))$, $\zeta(s,\sigma) = \sum_{\mathrm{Art}(\overline{\mathfrak{a}})=\sigma} N\mathfrak{a}^{-s}$ **Stark's Cnj** $\Rightarrow$ $\tau(\exp(2\zeta'(0,\sigma))) = \exp(2\zeta'(0,\tau\sigma))$ $(\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}))$
$\frac{\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-a}{n}\right)}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\sin\frac{a\pi}{n}}$	$\Longrightarrow$	$\exp(\zeta'(0,\sigma)) = \prod_{\iota\colon F\hookrightarrow\mathbb{R}} \Big(\underbrace{\prod \Gamma_r(\iota(z),(\iota(v_1),\ldots,\iota(v_r))) \times \prod \iota(a)^{\iota(b)}}_{=:\ \exp(X(\sigma,\iota))\ \text{(Shintani, Yoshida)}}\Big)$
$\Gamma_p(\frac{a}{n})$	$\Longrightarrow$	$\exp_p(X_p(\sigma,\iota)) := \prod \Gamma_{p,r}(\iota(z),(\iota(v_1),\ldots,\iota(v_r))) \times \prod \iota(a)^{\iota(b)}$
$\frac{\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)}{\sqrt{2\pi}} \equiv \pi^* \prod p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(*,*)^*$	$\Longrightarrow$	**Yoshida's Cnj** [Ka4] $\Rightarrow$ $\exp(X(\sigma,\mathrm{id})) \equiv P(\sigma) := \pi^* \prod p_{K_{\mathrm{CM}}}(*,*)^*$
$\Phi_\tau(G(\frac{a}{n})) \equiv G(\tau(\frac{a}{n}))$	$\Longrightarrow$	??? (次の Conjecture 3.1)

Conjecture 3.1. F: 総実体, K/F: 有限次アーベル拡大, $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)$ に対し

$$G(\sigma) := \frac{\exp(X(\sigma,\mathrm{id}))\cdot P_p(\sigma)}{\exp_p(X_p(\sigma,\mathrm{id}))\cdot P(\sigma)} \overset{\boxed{\textbf{Y's Cnj.}}}{\in} (B_{cris}\overline{\mathbb{Q}}_p - \{0\})^{\mathbb{Q}}/\mu_\infty$$

とおく. $F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ が導く素イデアル $\mathfrak{p}$ が K/F で分岐するとき

$$\Phi_\tau(G(\sigma)) \equiv G(\tau\sigma) \mod \mu_\infty \quad (\tau \in W_{\mathfrak{p}}).$$

※ $\mathfrak{p}$ が不分岐 version もあり.

Remark 3.2. 今回は $\frac{P_p(\sigma)}{P(\sigma)}$ だけでなく $\frac{\exp(X(\sigma,\mathrm{id}))}{\exp_p(X_p(\sigma,\mathrm{id}))}$ も “比” で考えると well-defined.
∵ Shintani の公式が Shintani のコーン分解, 狭義イデアル類群の代表系の選び方による.

Theorem 3.3 ([Ka2]). (i) $p \neq 2$ とする. K がアーベル体 (自動的に $F/\mathbb{Q}$ もアーベル体) で $\mathfrak{p}$ が分岐するとき, Conjecture 3.1 は成立する.
※ 不分岐 version は, さらに「$F/\mathbb{Q}$ で p が惰性」であれば成立する.

(ii) (Yoshida's Conjecture の元で) Conjecture 3.1 は **Stark 単数の相互法則** $\tau(\exp(2\zeta'(0,\sigma))) = \exp(2\zeta'(0,\tau\sigma))$ **の細分** となっている.
※ 不分岐 version は **Gross-Stark 予想の細分** となっている.

4 Coleman の結果の部分的な別証明

Coleman の結果を言い換えたことの副産物として, 部分的な別証明が与えられる [Ka1]. ただし, 現時点では不分岐の場合 (次の定理) に限る.

Theorem 4.1 (Colema の結果の言い換え [Ka1, Ka3]). $p \neq 2$, $p \nmid n$ のとき

$$G(\tfrac{a}{n}) := \frac{\frac{\Gamma(\frac{a}{n})}{\sqrt{2\pi}} \cdot P_p(\frac{a}{n})}{P(\frac{a}{n})} \in (B_{cris} - \{0\})^{\mathbb{Q}}/\mu_\infty$$

とおく. $\deg \tau = 1$ であれば

$$\Gamma_p(\tfrac{a}{n}) \equiv p^{\frac{1}{2}-\tau^{-1}(\frac{a}{n})} \frac{G(\frac{a}{n})}{\Phi_\tau(G(\tau^{-1}(\frac{a}{n})))} \mod \mu_\infty.$$

ここで Γ_p は Morita's p-adic gamma function.

まず

p 進ガンマ関数は "n 倍公式" で "ある程度" 特徴付けられる

ことを示した. **"絶対フロベニウス作用の連続性" の仮定** の下で, 右辺 $\left(p^{\frac{1}{2}-\tau^{-1}(\frac{a}{n})} \frac{G(\frac{a}{n})}{\Phi_\tau(G(\tau^{-1}(\frac{a}{n})))}\right)$ も同じ "n 倍公式" を満たすことが示せる. その結果

$$\exists a, b \text{ s.t. } \Gamma_p(\tfrac{a}{n}) \equiv a^{z-\frac{1}{2}} b^{\frac{z-z0}{p}+\frac{1}{2}} \times p^{\frac{1}{2}-\tau^{-1}(\frac{a}{n})} \frac{G(\frac{a}{n})}{\Phi_\tau(G(\tau^{-1}(\frac{a}{n})))} \mod \mu_\infty$$

が言える. ここで $z \overset{\bmod p}{\equiv:} z_0 \in \{1, 2, \ldots, p\}$ とおいた.

まとめ

$$[\text{Ka3}] \begin{cases} \text{archimedean local} & \text{(Rohrlich)} \\ p\text{-adic local} & \text{(Coleman)} \end{cases} \Longrightarrow \text{global (ガウス和, 円単数)},$$

$$[\text{Ka2}] \begin{cases} \text{archimedean local} & \text{(Yoshida's Cnj.)} \\ p\text{-adic local} & \text{(Conjecture 3.1)} \end{cases} \Longrightarrow \text{global (Gross-Stark 単数, Stark 単数)},$$

[Ka1] p-adic local (Coleman) は自動的？

参考文献

[Co] Coleman, R., On the Frobenius matrices of Fermat curves, p-adic analysis, *Springer Lecture Notes in Mathematics,* vol. 1454, 1990, 173–193.

[Ka1] Kashio, T., Note on Coleman's formula for the absolute Frobenius on Fermat curves, preprint (arXiv:1904.02879).

[Ka2] Kashio, T., On a common refinement of Stark units and Gross-Stark units, preprint (arXiv:1706.03198).

[Ka3] Kashio, T., Fermat curves and a refinement of the reciprocity law on cyclotomic units, *J. Reine Angew. Math.* **741** (2018), 255–273.

[Ka4] Kashio, T., On the algebraicity of some products of special values of Barnes' multiple gamma function, *Amer. J. Math.* **140** (2018), no. 3, 617–651.

[Yo] Yoshida, H., Absolute CM-Periods, *Mathematical Surveys and Monographs,* vol. **106** (2003), AMS.