$\mathbf{x^2+y^2}$ の話と素数の話　10月18日(日) 9:00 – 12:00

講師：加塩 朋和　E-mail： kashio_tomokazu@ma.noda.tus.ac.jp

※ 某高校生向けイベント (2回目) で 数学の未解決問題 に関するお話をさせていただきました. その時のレジュメです.

伝えたい事 ・・・ 数学者は未解決問題にどう立ち向かっているのか.

予定

- 9:00 – : オリエンテーション
- 9:25 - 9:40: 自己紹介
- 9:40 - 11:20: x^2+y^2 の話
- 11:20 - 11:30: 休憩/質問/コラッツ予想
- 11:30 - 12:00: 素数の話（ちょっとだけリーマン予想）

自己紹介

- 東京理科大学・理工学部・数学科　加塩朋和
  (2023 年度より創域理工学部・数理科学科に名称変更)
- 熊本 ⇒ 京都 ⇒ 千葉
- 特技：フリスビー (アルティメット・フリスビー)
- 小学生の頃から「算数が得意」だと思っていた.
  - 小 4 の頃に中 1 の姉の数学の宿題に興味を持ち, 口を出してた
    (解けたかどうかは？)
  - 中・高の数学の先生が熱狂的な「数学ファン」.
    教科書の内容から逸脱した問題を出してくれていた.
    中には未解決問題も.
- 問題に対し, 解ける解けないの前段階として

「じっくり時間をかけて取り組む」

習慣ができたのが, 数学者を目指すスタートだったと思います.

自己紹介

		整数論
代数学	⋯	代数的整数論
幾何学	⋯	数論幾何
解析学	⋯	解析的整数論

⋯ "方程式を解く為の代数的な理論"

例 (二次方程式の解の公式)

$aX^2 + bX + c = 0 \ (a \neq 0)$

$\Rightarrow a\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0 \Rightarrow a\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a}$

$\Rightarrow \left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \Rightarrow X + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\Rightarrow X = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$. ただし $D := b^2 - 4ac$.

※ 公式の導出は, 演算 (加減乗除) の性質を用いた "代数的な" 議論.

ただし, 解を表記するのに <u>$\sqrt{D}$ の **"存在"**</u> が効いている.

自己紹介

代数体 $\cdots$ “多項式の根になりうる数のなす集合”

例 ($D \in \mathbb{N}$)

$$\mathbb{Q}(\sqrt{D}) := \left\{ s + t\sqrt{D} \mid s, t \in \mathbb{Q} \right\}$$ (“$\sqrt{D}$ を使って表記できる数全体”)

$D = b^2 - 4ac$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ のとき

$$aX^2 + bX + c = 0 \text{ の根 } \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \in \mathbb{Q}(\sqrt{D}).$$

- 代数体 ($\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ みたいなの) をいっぱい作っておくと便利.

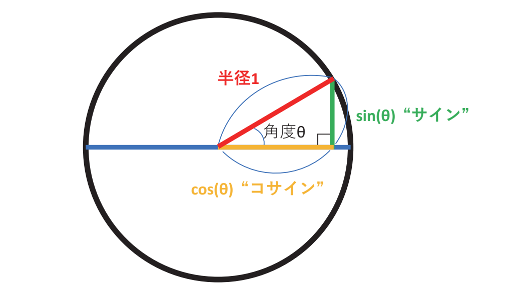
$\Rightarrow$ 代数的数 ($\sqrt{D}$ みたいなの) をいっぱい作りたい.
※ $\sqrt{D}$ も $X^2 - D$ の根.

私の専門: “関数” に “値” を代入して代数的数 (多項式の根) にする.

自己紹介

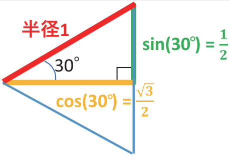
復習 (予習？): 三角関数 (※ 鋭角の場合)

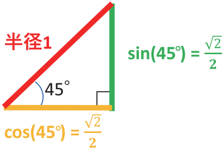
三角関数 $\sin(\theta)$ (サイン テェータ), $\cos(\theta)$ (コサイン テェータ) を



斜辺の長さが 1, 角度が θ の直角三角形の "高さ" と "横幅" とする.

例.





自己紹介

定理

$\cos\left(\frac{a}{b}\cdot 180^\circ\right)$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ は, ある有理数係数多項式の根となる.

例 $(b = 10)$

$$\cos\frac{180^\circ}{10} = \cos 18^\circ = 0.95105\ldots, \quad \cos\frac{2\cdot 180^\circ}{10} = \cos 36^\circ = 0.80901\ldots,$$
$$\cos\frac{3\cdot 180^\circ}{10} = \cos 54^\circ = 0.58778\ldots, \quad \cos\frac{4\cdot 180^\circ}{10} = \cos 72^\circ = 0.30901\ldots.$$

$\cos\frac{180^\circ}{10}, \cos\frac{3\cdot 180^\circ}{10}$ $\cdots$ $16x^4 - 20x^2 + 5$ の根,

$\cos\frac{2\cdot 180^\circ}{10}$ $\cdots$ $4x^2 - 2x - 1$ の根,

$\cos\frac{4\cdot 180^\circ}{10}$ $\cdots$ $4x^2 + 2x - 1$ の根.

この定理の一般化: スターク予想 という未解決問題に取り組んでいます.

※ ガロア理論 $\Rightarrow$ $16x^4 - 20x^2 + 5$ と "正五角形の作図" が関係します.

1　$x^2 + y^2$ で表せる整数

２平方和 として表せる数を考えます. 例えば

$$
\begin{aligned}
1^2 + 1^2 &= \boxed{\quad = 1 + 1 = 2 \quad}, \\
3^2 + 0^2 &= \boxed{\quad = 9 + 0 = 9 \quad}, \\
10^2 + 11^2 &= \boxed{\quad = 100 + 121 = 221 \quad}
\end{aligned}
$$

などです.

少し考えると

２平方和として表せる数 と
２平方和としては決して表せない数

があることに気が付きます.

例えば, 2 平方和を小さい方から順に考えていくと

$$0^2 + 1^2 = 1, \qquad \boxed{1^2 + 1^2 = 2}, \qquad \boxed{0^2 + 2^2 = 4}$$

となり, $\boxed{3}$ を飛び越えてしまいます.

つまり

$\boxed{1, 2, 4}$ は２平方和として表せる数,
$\boxed{3}$ は２平方和としては表せない数

だと分かります.

もっと詳しく考えて 数学の問題 にしてみましょう.

1.1　問題の “定式化”

次の『$x^2 + y^2$ の表』から, 何か 法則 を見つけられますか？

y ＼ x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
1	2	5	10	17	26	37	50	65	82	101	…
2	5	8	13	20	29	40	53	68	85	104	…
3	10	13	18	25	34	45	58	73	90	109	…
4	17	20	25	32	41	52	65	80	97	116	…
5	26	29	34	41	50	61	74	89	106	125	…
6	37	40	45	52	61	72	85	100	117	136	…
7	50	53	58	65	74	85	98	113	130	149	…
8	65	68	73	80	89	100	113	128	145	164	…
9	82	85	90	97	106	117	130	145	162	181	…
10	101	104	109	116	125	136	149	164	181	200	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

ヒントとして素因数分解してみます.

$y \backslash x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\ldots$
1	2	5	$2\cdot 5$	17	$2\cdot 13$	37	$2\cdot 5^2$	$5\cdot 13$	$2\cdot 41$	101	$\ldots$
2	5	2^3	13	$2^2\cdot 5$	29	$2^3\cdot 5$	53	$2^2\cdot 17$	$5\cdot 17$	$2^3\cdot 13$	$\ldots$
3	$2\cdot 5$	13	$2\cdot 3^2$	5^2	$2\cdot 17$	$3^2\cdot 5$	$2\cdot 29$	73	$2\cdot 3^2\cdot 5$	109	$\ldots$
4	17	$2^2\cdot 5$	5^2	2^5	41	$2^2\cdot 13$	$5\cdot 13$	$2^4\cdot 5$	97	$2^2\cdot 29$	$\ldots$
5	$2\cdot 13$	29	$2\cdot 17$	41	$2\cdot 5^2$	61	$2\cdot 37$	89	$2\cdot 53$	5^3	$\ldots$
6	37	$2^3\cdot 5$	$3^2\cdot 5$	$2^2\cdot 13$	61	$2^3\cdot 3^2$	$5\cdot 17$	$2^2\cdot 5^2$	$3^2\cdot 13$	$2^3\cdot 17$	$\ldots$
7	$2\cdot 5^2$	53	$2\cdot 29$	$5\cdot 13$	$2\cdot 37$	$5\cdot 17$	$2\cdot 7^2$	113	$2\cdot 5\cdot 13$	149	$\ldots$
8	$5\cdot 13$	$2^2\cdot 17$	73	$2^4\cdot 5$	89	$2^2\cdot 5^2$	113	2^7	$5\cdot 29$	$2^2\cdot 41$	$\ldots$
9	$2\cdot 41$	$5\cdot 17$	$2\cdot 3^2\cdot 5$	97	$2\cdot 53$	$3^2\cdot 13$	$2\cdot 5\cdot 13$	$5\cdot 29$	$2\cdot 3^4$	181	$\ldots$
10	101	$2^3\cdot 13$	109	$2^2\cdot 29$	5^3	$2^3\cdot 17$	149	$2^2\cdot 41$	181	$2^3\cdot 5^2$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

ただし 灰色部分 は "自明な素因数 (x, y の公約数)" が出るので除外します. 例えば

$$6^2 + 9^2 = \boxed{(3\cdot 2)^2 + (3\cdot 3)^2 = 3^2(2^2+3^2) = 3^2\cdot 13}.$$

という感じです.

注意 1. 自明な素因数は必ず 平方の形 で現れます.

上の表の "非自明な素因数" を並べてみると

$$2, 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, 101, 109, 113, 149, 181, \ldots$$

となります. 何か共通の性質 が見つかりますか？

注意 2. まだ x, y が 10 以下の場合しか見ていないので, 上記以外の "非自明な素因数" も存在します.

『$x^2 + y^2$ の表』に現れる 法則 は, 次のように 定式化 出来ます.

定理 3. 以下は同値:

- 自然数 n が整数 x, y を用いて $n = x^2 + y^2$ の形で表せる.
- 自然数 n は $n = m^2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_r$ の形になる.
  ただし, m は自然数で, $p_1, \ldots, p_r$ は $\boxed{\text{2 または 4 で割ると 1 余る素数}}$.

さらに $n = x^2 + y^2$ が素数の場合, すなわち 2平方和で表される素数 に限れば, 以下のようになります.

y \ x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\ldots$
1	2	5		17		37				101	$\ldots$
2	5		13		29		53				$\ldots$
3		13						73		109	$\ldots$
4	17				41				97		$\ldots$
5		29		41		61		89			$\ldots$
6	37				61						$\ldots$
7		53						113		149	$\ldots$
8			73		89		113				$\ldots$
9				97						181	$\ldots$
10	101		109				149		181		$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

この場合も定式化しておきます.

定理 4. 以下は同値:

(1) 素数 p が整数 x, y を用いて $p = x^2 + y^2$ の形で表せる.

(2) 素数 p は $\boxed{\text{2 または 4 で割ると 1 余る素数}}$.

定理 3 の証明のアイデア.
(1) $\Rightarrow$ (2) は "数の集合 $\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$" を **減らす** ことで証明できます.
(1) $\Leftarrow$ (2) は "数の集合 $\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$" を **増やす** ことで証明できます. □

1.2 数の集合を減らす

一つ一つ計算していけば, 上の表にある範囲くらいなら「定理 4 の (1) $\Rightarrow$ (2)」が成り立っていることが確かめられます. しかし整数は無限個あるので, それらすべてを計算して確かめることはできません. なので

アイデア

無限個の整数を有限個に減らす

ことを考えます.

定義 5. 4 つの "数" からなる世界 (4 つの要素からなる集合)

$$\overline{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$$

を考えます.

ただし, $\overline{0}$ などは “仮の姿” で

$$\begin{aligned}
\cdots = \overline{-12} = \overline{-8} = \overline{-4} = \overline{0} = \overline{4} = \overline{8} = \overline{12} = \cdots,\\
\cdots = \overline{-11} = \overline{-7} = \overline{-3} = \overline{1} = \overline{5} = \overline{9} = \overline{13} = \cdots,\\
\cdots = \overline{-10} = \overline{-6} = \overline{-2} = \overline{2} = \overline{6} = \overline{10} = \overline{14} = \cdots,\\
\cdots = \overline{-9} = \overline{-5} = \overline{-1} = \overline{3} = \overline{7} = \overline{11} = \overline{15} = \cdots
\end{aligned}$$

とします. つまり

『差が 4 の倍数』つまり『4 で割った余りが一致する』ときは同じ “数” とみなす

と定義します.

さらに足し算や掛け算を

$$\begin{aligned}
\overline{x} + \overline{y} &= \overline{x+y},\\
\overline{x} \cdot \overline{y} &= \overline{x \cdot y},\\
\overline{x}^2 &= \overline{x^2}
\end{aligned}$$

のように定めます. 例えば

$$\overline{2}^2 \cdot \overline{3} + \overline{1} = \boxed{\quad \overline{2^2 \cdot 3 + 1} = \overline{13} = \overline{1} \quad}$$

のように計算できます.

問題 1. 以下の数式や主張に対し,

- 正しい (青のカード)
- 間違っている (赤のカード)
- よく分からない (黄色カード)

の三択で, カードを挙げて答えてください. ただし

ルール:『差が 4 の倍数』つまり『4 で割った余りが一致する』ときは同じ “数”

です.

(1) $\overline{1} = \overline{9}$.

9 と 1 の差は 8 で 4 の倍数なので正しい.

(2) $\overline{3} = \overline{12}$.

12 と 3 の差は 9 で 4 の倍数ではないので間違い.

(3) $\overline{201} = \overline{5}$.

201 と 5 は, ともに 4 で割った余りが 1 で一致するので正しい.

(4) $\overline{12} + \overline{3} = \overline{7}$.

$\overline{12} + \overline{3} = \overline{12+3} = \overline{15} = \overline{3} = \overline{7}$ で正しい.

(5) (任意の整数 x, y, z に対し) $x + y = z \quad \Rightarrow \quad \overline{x} + \overline{y} = \overline{z}$.

これは正しい命題になります.

例えば

$$5 + 3 = 8 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{5} + \overline{3} = \overline{8}} \quad \text{つまり} \quad \boxed{\overline{1} + \overline{3} = \overline{0}},$$
$$5 + 6 = 11 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{5} + \overline{6} = \overline{11}} \quad \text{つまり} \quad \boxed{\overline{1} + \overline{2} = \overline{3}},$$
$$23 + 3 = 26 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{23} + \overline{3} = \overline{26}} \quad \text{つまり} \quad \boxed{\overline{3} + \overline{3} = \overline{2}}.$$

(6) $\overline{x} + \overline{y} = \overline{z} \quad \Rightarrow \quad x + y = z$.

これは間違っています.

例えば

$$\overline{12} + \overline{3} = \overline{7} \quad \text{つまり} \quad \boxed{\overline{0} + \overline{3} = \overline{3}} \quad \stackrel{?}{\Rightarrow} \quad 12 + 3 = 7.$$

(7) $z = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{z} = \overline{x}^2 + \overline{y}^2$.

これは正しい命題になります.

例えば

$$2 = 1^2 + 1^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{1} = \overline{1}^2 + \overline{1}^2},$$
$$5 = 1^2 + 2^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{5} = \overline{1}^2 + \overline{2}^2} \quad \text{つまり} \quad \boxed{\overline{1} = \overline{1}^2 + \overline{0}^2},$$
$$13 = 2^2 + 3^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{13} = \overline{2}^2 + \overline{3}^2} \quad \text{つまり} \quad \boxed{\overline{1} = \overline{2}^2 + \overline{3}^2},$$
$$17 = 1^2 + 4^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{17} = \overline{1}^2 + \overline{4}^2} \quad \text{つまり} \quad \boxed{\overline{1} = \overline{1}^2 + \overline{0}^2}.$$

注意 6. 問題 1 の (5), (7) などは “証明すべき事柄” で 命題 や 補題 などと呼ばれます. 具体例と違って 一度証明してしまえば必ず正しい ので いつでも使える道具 になります.

「$p = x^2 + y^2 \Rightarrow$ $\boxed{p = 2 \text{ または } 4k+1}$」の証明.

素数 p が

$$p = x^2 + y^2, \qquad p \neq 2$$

を満たすとする.

とくに p は奇数になり

$$(x, y) \text{ は (偶数, 奇数) または (奇数, 偶数)}$$

となる.

奇数の "数" は $\boxed{\overline{1}, \overline{3}}$, 偶数の "数" は $\boxed{\overline{0}, \overline{2}}$ しかないので,

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \boxed{(\overline{0}, \overline{1}),\ (\overline{0}, \overline{3}),\ (\overline{1}, \overline{0}),\ (\overline{1}, \overline{2}),\ (\overline{2}, \overline{1}),\ (\overline{2}, \overline{3}),\ (\overline{3}, \overline{0}),\ (\overline{3}, \overline{2})}$$

の可能性がある.

全ての可能性（有限パターンしかない!!）を計算すると

$$(\overline{x}^2, \overline{y}^2) = \boxed{(\overline{0}, \overline{1}),\ (\overline{1}, \overline{0})} \quad \text{より} \quad \overline{x}^2 + \overline{y}^2 = \boxed{\overline{1}}$$

となる.

よって

$$p = x^2 + y^2 \ (\text{かつ } p \neq 2) \quad \overset{\text{問題 1 - (7)}}{\Rightarrow} \quad \overline{p} = \overline{x}^2 + \overline{y}^2 = \boxed{\overline{1}}$$

が成り立つ.

すなわち $\boxed{p \text{ と } 1 \text{ の差は } 4 \text{ の倍数}}$ となる. □

注意 7. この証明は, 本質的には「場合分け」です. 今は 4 通りですが, 複雑になってくると, いちいち場合分けしていては手に負えません. 上記の議論を突き詰めると, 環論（代数学の一分野）の "イデアル" や "剰余環" という概念にたどり着きます.

1.3 数の集合を増やす

皆さんは数 II で「虚数」や「複素数」を学びます.

簡単に言うと

$$2 \text{ 乗して } -1 \text{ になる数 } \sqrt{-1} \text{ の "存在" を認め,}$$
$$\underline{\textbf{複素数 } x + y\sqrt{-1} \ (x, y \textbf{ は実数})} \text{ を定義}$$

します.

$\sqrt{-1}$ は 2 乗して -1 になるので

$$\begin{aligned}(1+2\sqrt{-1}) \cdot (3+4\sqrt{-1}) &= \boxed{1 \cdot 3 + 1 \cdot 4\sqrt{-1} + 2\sqrt{-1} \cdot 3 + 2\sqrt{-1} \cdot 4\sqrt{-1}} \\ &= \boxed{3 + 4\sqrt{-1} + 6\sqrt{-1} + 8(\sqrt{-1})^2} \\ &= \boxed{3 + 10\sqrt{-1} - 8} \\ &= \boxed{-5 + 10\sqrt{-1}}\end{aligned}$$

のように計算します.

複素数の中でも

$$m + n\sqrt{-1} \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

の形で書ける複素数を <u>**ガウスの整数**</u> とよびます.

素数は <u>**整数の世界**</u> ではこれ以上分解できない数です.

ところが, 数の概念をこのガウスの整数に拡張すると

$$(1+2\sqrt{-1})(1-2\sqrt{-1}) = \boxed{\quad 1 - 2\sqrt{-1} + 2\sqrt{-1} - 4(\sqrt{-1})^2 = 1 + 4 = 5 \quad}$$

のように分解できてしまう事があります.

問題 2. 以下の素数に対し, ガウスの整数の世界で

- 分解できる (青のカード)
- 分解できない (赤のカード)
- よく分からない (黄色カード)

の三択で, カードを挙げて答えてください.

(1) 2.
$2 = (1+\sqrt{-1}) \cdot (1-\sqrt{-1})$ と分解できます.

(2) 3.
どうやっても分解できません.

(3) 5.
$5 = (1+2\sqrt{-1}) \cdot (1-2\sqrt{-1})$ と分解できます.

(4) 7.
どうやっても分解できません.

(5) 11.
どうやっても分解できません.

(6) 97.
$97 = (4+9\sqrt{-1}) \cdot (4-9\sqrt{-1})$ と分解できます.

※ 参考（？）…

$y \backslash x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
1	2	5		17		37				101	…
2	5		13		29		53				…
3		13						73		109	…
4	17				41				97		…
5		29		41		61		89			…
6	37				61						…
7		53						113		149	…
8			73		89		113				…
9				97						181	…
10	101		109				149		181		…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

定理 3 の残り半分

「素数 p が $p = x^2 + y^2$ の形に書ける　$\Leftarrow$　$\boxed{p = 2 \text{ または } 4k+1 \text{ の形の素数}}$」

の証明は

ガウスの整数での素因数分解の法則 = "平方剰余の相互法則 の第 1 補充法則"

に帰着させることで証明できます.

定理 8. ガウスの整数の世界では, 素数は以下のように分解する:

(1) 2 は $\boxed{(1+\sqrt{-1})\cdot(1-\sqrt{-1})}$ と分解される.

(2) $\boxed{4 \text{ で割ると } 1 \text{ 余る}}$ ような素数 p は $p = (x + y\sqrt{-1})\cdot(x - y\sqrt{-1})$ の形に分解される.

(3) $\boxed{4 \text{ で割ると } 3 \text{ 余る}}$ ような素数は分解できない（ガウスの整数の世界でも素数のまま）.

「$p = x^2 + y^2 \Leftarrow \boxed{p = 2 \text{ または } 4k+1}$」の証明.

$$\boxed{p = 2 \text{ または } 4k+1} \overset{\text{定理 8-(2)}}{\Rightarrow} p = (x + y\sqrt{-1})\cdot(x - y\sqrt{-1}) = x^2 + y^2. \qquad \square$$

注意 9. 上記のような考え方は「代数的整数論」へと続きます. 整数（$0, \pm1, \pm2, \ldots$）の集合から飛び出して "代数的整数"（$1 + 2\sqrt{-1}$ など）の性質を調べることにより, 元々の整数に関する新しい結果を得ることができます.

1.4 未解決問題

問題

a, b, c は $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$ を満たす整数とする．このとき
$n = ax^2 + bxy + cy^2$ の形で書ける整数 n にはどんな特徴があるか？

内田直希さんの結果 (2020 年 4 月修士修了 ⇒ 高校教員). 最新の論文

N. Uchida, Integers of the Form $ax^2 + bxy + cy^2$, preprint (arXiv:2001.11632), to appear in European Journal of Mathematics

の中で（例えば）以下の定理が証明できました.

定理 10 ($(a, b, c) = (3, 2, 3)$ の場合)**.** 以下は同値:

- 自然数 n が整数 x, y を用いて $n = 3x^2 + 2xy + 3y^2$ と書ける
- 自然数 n は $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_r \cdot q_1^2 \cdot q_2^2 \cdot \cdots \cdot q_s^2 \cdot 2^h$ の形になる.
  ただし, $p_1, \ldots, p_r$ は 8 で割ると 1 か 3 余る素数, $q_1, \ldots, q_s$ は 8 で割ると 5 か 7 余る素数で, 以下のどちらかを満たすとする:
  - $h = 0$ かつ $p_1, \ldots, p_r$ の中で 8 で割ると 3 余る素数は重複を込めて奇数個.
  - $h \geq 2$.

<u>未解決問題を解く</u>（新しい結果を出す）には <u>新しいアイデア</u> やテクニックが必要です.
この論文中では

$$\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} \text{ (普通の整数全体)}$$
$$\subsetneq \{x + y\sqrt{-1} \mid x, y = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots\} \text{ (ガウスの整数で } y \text{ が偶数となるもの)}$$
$$\subsetneq \{x + y\sqrt{-1} \mid x, y = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} \text{ (ガウスの整数全体)}$$

というように <u>数の世界を段階的に大きく</u> することで, 数の分解の様子を詳しく調べています.

例えば

- 5 は $\{x + y\sqrt{-1} \mid x, y = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots\}$ で $5 = (1 + 2\sqrt{-1}) \cdot (1 - 2\sqrt{-1})$ と分解し, $\{x + y\sqrt{-1} \mid x, y = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ でも同じ分解になる.
- 2 は $\{x + y\sqrt{-1} \mid x, y = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots\}$ では分解できないが, $\{x + y\sqrt{-1} \mid x, y = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ では $2 = (1 + \sqrt{-1}) \cdot (1 - \sqrt{-1})$ と分解する.

などの <u>現象</u> が観察できます.

内田さんは, 修士課程の 2 年間で, このような現象を沢山 <u>観察</u> することで <u>定式化</u> し, その一部を <u>証明</u> しました.

注意 11. この問題は, 多くの a, b, c で, まだまだ未解決です.

まとめ

数学において **未解決問題は学問そのものを推し進める原動力** です.

未解決問題を解きたい

$\Rightarrow$ 新しいアイデアや概念の誕生

$\Rightarrow$ 考え方の整理

$\Rightarrow$ 新理論の完成

$\Rightarrow$ 問題解決！

$\Rightarrow$ さらなる未解決問題

$\Rightarrow \cdots$

というサイクルを, 無数の数学者が何百年（何千年？）と繰り返しています.
例えば定理 4 はフェルマー（1640 年）が予想しオイラー（1747 年）が証明しました.
その後多くの "拡張" が研究され, 内田さんの論文は今年 (2020 年) に完成しました.

素数の個数

1 と自分自身以外に正の約数を持たない自然数 (≥ 2) を 素数 と呼んだ.

- $1 \sim 10$ のうち, 素数は $2, 3, 5, 7$ の 4 個.
- $1 \sim 100$ のうち, 素数は $2, 3, 5, \ldots, 83, 89, 97$ の 25 個.
- $1 \sim 1000$ のうち, 素数は $2, 3, 5, \ldots, 983, 991, 997$ の 168 個.
- $1 \sim 10000$ のうち, 素数は $2, 3, 5, \ldots, 9949, 9967, 9973$ の 1229 個.

$$\mathbb{P} := \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\} \text{ (素数全体のなす集合).}$$

定理

$n(\mathbb{P}) = \infty$, すなわち 素数の個数は無限である.

証明.

もし $n(\mathbb{P}) = k\ (< \infty)$ なら $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ と書ける. このとき

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k + 1$$

は, どの素数 p_i で割っても 1 余る $\Rightarrow$ 約数を持たない $\Rightarrow$ 素数.
これは "全ての素数" $p_1 \sim p_k$ より大きい素数となり矛盾. □

素数の個数

定理

$n(\mathbb{P}) = \infty$, すなわち 素数の個数は無限である.

つまり, 素数は "沢山" ある.

どれくらい沢山 なのか？

$\Longrightarrow$ 素数定理

$\cdots$ の前に,

素数の並び方に 規則 があるか？

素数の法則

素数の並び方に <u>規則</u> があるか？

1 ～ 100, 901 ～ 1000, 9901 ～ 10000 の **素数** を視覚化してみます.

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10	**11**	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30	**31**	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50	51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70	**71**	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90	91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100

901	902	903	904	905	906	**907**	908	909	910	911	912	913	914	915	916	**917**	918	919	920
921	922	923	924	925	926	927	928	**929**	930	931	932	933	934	935	936	**937**	938	939	940
941	942	943	944	945	946	**947**	948	949	950	951	952	**953**	954	955	956	957	958	959	960
961	962	963	964	965	966	**967**	968	969	970	**971**	972	973	974	975	976	**977**	978	979	980
981	982	**983**	984	985	986	987	988	989	990	**991**	992	993	994	995	996	**997**	998	999	1000

9901	9902	9903	9904	9905	9906	**9907**	9908	9909	9910	9911	9912	9913	9914	9915	9916	9917	9918	9919	9920
9921	9922	**9923**	9924	9925	9926	9927	9928	**9929**	9930	**9931**	9932	9933	9934	9935	9936	9937	9938	9939	9940
9941	9942	9943	9944	9945	9946	9947	9948	**9949**	9950	9951	9952	9953	9954	9955	9956	9957	9958	9959	9960
9961	9962	9963	9964	9965	9966	**9967**	9968	9969	9970	9971	9972	**9973**	9974	9975	9976	9977	9978	9979	9980
9981	9982	9983	9984	9985	9986	9987	9988	9989	9990	9991	9992	9993	9994	9995	9996	9997	9998	9999	10000

1	2						
3							
4	5						
6	7						
8	9	10	11				
12	13						
14	15	16	17				
18	19						
20	21	22	23				
24	25	26	27	28	29		
30	31						
32	33	34	35	36	37		
38	39	40	41				
42	43						
44	45	46	47				
48	49	50	51	52	53		
54	55	56	57	58	59		
60	61						
62	63	64	65	66	67		
68	69	70	71				
72	73						
74	75	76	77	78	79		
80	81	82	83				
84	85	86	87	88	89		
90	91	92	93	94	95	96	97

888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900	901	902	903	904	905	906	907
908	909	910	911	912	913	914	915	916											
917	918	919	920	921	922	923	924	925	926	927	928	929							
930	931	932	933	934	935	936	937												
938	939	940	941																
942	943	944	945	946	947														
948	949	950	951	952	953														
954	955	956	957	958	959	960	961	962	963	964	965	966	967						
968	969	970	971																
972	973	974	975	976	977														
978	979	980	981	982	983	984	985	986	987	988	989	990	991						
992	993	994	995	996	997														

9888	9889	9890	9891	9892	9893	9894	9895	9896	9897	9898	9899	9900	9901				
9902	9903	9904	9905	9906	9907												
9908	9909	9910	9911	9912	9913	9914	9915	9916	9917	9918	9919	9920	9921	9922	9923		
9924	9925	9926	9927	9928	9929												
9930	9931																
9932	9933	9934	9935	9936	9937	9938	9939	9940	9941								
9942	9943	9944	9945	9946	9947	9948	9949										
9950	9951	9952	9953	9954	9955	9956	9957	9958	9959	9960	9961	9962	9963	9964	9965	9966	9967
9968	9969	9970	9971	9972	9973												

素数は段々と珍しくなっていく．しかし，出てこなくなることはない．
この現象を，なんらかの “法則” として書けないか？

素数の法則

定理

n を 3 以上の整数とする．このとき

$$n < p < n!$$

を満たす素数が存在する．

例えば

- $3 < 5 < 3! = 6$
- $4 < 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 < 4! = 24$
- $5 < 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113 < 5! = 120$

証明のために少し準備します．

素数の法則

定理

n を 3 以上の整数とする．このとき $n < p < n!$ を満たす素数が存在する．

補題

1. p が m, n を割り切れば $m \pm n$ も割り切る．
2. $n! - 1$ の素因数は全て n を超える．

証明.

(1) $m = pa,\ n = pb$ と書ければ $m \pm n = p(a \pm b)$ と書ける．

(2) (背理法) $n! - 1$ の素因数 p が $p \leq n$ とする．
すると p は $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$ も割り切る．
よって (1) より $n! - (n! - 1) = 1$ も割り切る．これは矛盾． $\square$

定理の証明.

$n! - 1$ の素因子 p をとる．とくに $p \leq n! - 1 < n!$.
一方で補題の (2) より $n < p$. $\square$

素数の法則

定理

n を 3 以上の整数とする．このとき $n < p < n!$ を満たす素数が存在する．

- $3 < 5 < 3! = 6$
- $4 < 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 < 4! = 24$
- $5 < 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67,$ $71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113 < 5! = 120$

この例を見ると

$$n < p < n!$$

という幅は, まだまだ余裕があるように感じます.
もっと "狭い" 結果もあります.

素数の法則

定理 (ベルトラン-チェビシェフの定理)

$n \geq 2$ に対し $n < p < 2n$ を満たす素数が存在する.

- $2 < 3 < 2 \cdot 2 = 4$
- $3 < 5 < 2 \cdot 3 = 6$
- $4 < 5, 7 < 2 \cdot 4 = 8$
- $5 < 7 < 2 \cdot 5 = 10$

$\vdots$

- $5000 <$ 5003, 5009, 5011, 5021, 5023, 5039, 5051, 5059, 5077, 5081, 5087, 5099, 5101, 5107, 5113, 5119, 5147, 5153, 5167, 5171, 5179, 5189, 5197, 5209, 5227, 5231, 5233, 5237, 5261, 5273, 5279, 5281, 5297, 5303, 5309, 5323, 5333, 5347, 5351, 5381, 5387, 5393, 5399, 5407, 5413, 5417, 5419, 5431, 5437, 5441, 5443, 5449, 5471, 5477, 5479, 5483, 5501, 5503, 5507, 5519, 5521, 5527, 5531, 5557, 5563, 5569, 5573, 5581, 5591, 5623, 5639, 5641, 5647, 5651, 5653, 5657, 5659, 5669, 5683, 5689, 5693, 5701, 5711, 5717, 5737, 5741, 5743, 5749, 5779, 5783, 5791, 5801, 5807, 5813, 5821, 5827, 5839, 5843, 5849, 5851, 5857, 5861, 5867, 5869, 5879, 5881, 5897, 5903, 5923, 5927, 5939, 5953, 5981, 5987, 6007, 6011, 6029, 6037, 6043, 6047, 6053, 6067, 6073, 6079, 6089, 6091, 6101, 6113, 6121, 6131, 6133, 6143, 6151, 6163, 6173, 6197, 6199, 6203, 6211, 6217, 6221, 6229, 6247, 6257, 6263, 6269, 6271, 6277, 6287, 6299, 6301, 6311, 6317, 6323, 6329, 6337, 6343, 6353, 6359, 6361, 6367, 6373, 6379, 6389, 6397, 6421, 6427, 6449, 6451, 6469, 6473, 6481, 6491, 6521, 6529, 6547, 6551, 6553, 6563, 6569, 6571, 6577, 6581, 6599, 6607, 6619, 6637, 6653, 6659, 6661, 6673, 6679, 6689, 6691, 6701, 6703, 6709, 6719, 6733, 6737, 6761, 6763, 6779, 6781, 6791, 6793, 6803, 6823, 6827, 6829, 6833, 6841, 6857, 6863, 6869, 6871, 6883, 6899, 6907, 6911, 6917, 6947, 6949, 6959, 6961, 6967, 6971, 6977, 6983, 6991, 6997, 7001, 7013, 7019, 7027, 7039, 7043, 7057, 7069, 7079, 7103, 7109, 7121, 7127, 7129, 7151, 7159, 7177, 7187, 7193, 7207, 7211, 7213, 7219, 7229, 7237, 7243, 7247, 7253, 7283, 7297, 7307, 7309, 7321, 7331, 7333, 7349, 7351, 7369, 7393, 7411, 7417, 7433, 7451, 7457, 7459, 7477, 7481, 7487, 7489, 7499, 7507, 7517, 7523, 7529, 7537, 7541, 7547, 7549, 7559, 7561, 7573, 7577, 7583, 7589, 7591, 7603, 7607, 7621, 7639, 7643, 7649, 7669, 7673, 7681, 7687, 7691, 7699, 7703, 7717, 7723, 7727, 7741, 7753, 7757, 7759, 7789, 7793, 7817, 7823, 7829, 7841, 7853, 7867, 7873, 7877, 7879, 7883, 7901, 7907, 7919, 7927, 7933, 7937, 7949, 7951, 7963, 7993, 8009, 8011, 8017, 8039, 8053, 8059, 8069, 8081, 8087, 8089, 8093, 8101, 8111, 8117, 8123, 8147, 8161, 8167, 8171, 8179, 8191, 8209, 8219, 8221, 8231, 8233, 8237, 8243, 8263, 8269, 8273, 8287, 8291, 8293, 8297, 8311, 8317, 8329, 8353, 8363, 8369, 8377, 8387, 8389, 8419, 8423, 8429, 8431, 8443, 8447, 8461, 8467, 8501, 8513, 8521, 8527, 8537, 8539, 8543, 8563, 8573, 8581, 8597, 8599, 8609, 8623, 8627, 8629, 8641, 8647, 8663, 8669, 8677, 8681, 8689, 8693, 8699, 8707, 8713, 8719, 8731, 8737, 8741, 8747, 8753, 8761, 8779, 8783, 8803, 8807, 8819, 8821, 8831, 8837, 8839, 8849, 8861, 8863, 8867, 8887, 8893, 8923, 8929, 8933, 8941, 8951, 8963, 8969, 8971, 8999, 9001, 9007, 9011, 9013, 9029, 9041, 9043, 9049, 9059, 9067, 9091, 9103, 9109, 9127, 9133, 9137, 9151, 9157, 9161, 9173, 9181, 9187, 9199, 9203, 9209, 9221, 9227, 9239, 9241, 9257, 9277, 9281, 9283, 9293, 9311, 9319, 9323, 9337, 9341, 9343, 9349, 9371, 9377, 9391, 9397, 9403, 9413, 9419, 9421, 9431, 9433, 9437, 9439, 9461, 9463, 9467, 9473, 9479, 9491, 9497, 9511, 9521, 9533, 9539, 9547, 9551, 9587, 9601, 9613, 9619, 9623, 9629, 9631, 9643, 9649, 9661, 9677, 9679, 9689, 9697, 9719, 9721, 9733, 9739, 9743, 9749, 9767, 9769, 9781, 9787, 9791, 9803, 9811, 9817, 9829, 9833, 9839, 9851, 9857, 9859, 9871, 9883 < 10000

という感じです. 次は未解決問題（！）です.

素数の法則

予想 (ルジャンドル予想)

$n \geq 1$ に対し $n^2 < p < (n+1)^2$ を満たす素数が存在する.

- $1^2 = 1 < 3 < 2^2 = 4$
- $2^2 = 4 < 5, 7 < 3^2 = 9$
- $3^2 = 9 < 11, 13 < 4^2 = 16$
- $4^2 = 16 < 17, 19, 23 < 5^2 = 25$
- $5^2 = 25 < 29, 31 < 6^2 = 36$

$$\vdots$$

- $99^2 = 9801 < 9803, 9811, 9817, 9829, 9833, 9839, 9851, 9857, 9859, 9871, 9883, 9887, 9901, 9907, 9923, 9929, 9931, 9941, 9949, 9967, 9973 < 10000 = 100^2$

などは予想を満たしています. $n^2 \sim (n+1)^2$ の幅（$= 2n+1$）の増え方に比べて, 素数の個数はそれほど増えていない (？) ように見えます.

※ もっと “狭く” できそうでしょうか？

素数定理と“解析的”整数論

命題 (復習？) ⋯ 等比級数の公式

$0 \leq a < 1$, $N \in \mathbb{N}$ に対し

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^N = \frac{1 - a^{N+1}}{1 - a} \leq \frac{1}{1 - a}.$$

証明.

前半 (等式) は

$$(1 - a)(1 + a + a^2 + \cdots + a^N)$$
$$= (1 + a + a^2 + \cdots + a^N) - (a + a^2 + \cdots + a^N + a^{N+1}) = 1 - a^{N+1}.$$

後半 (不等式) は $1 - a^{N+1} \leq 1$ より. □

例

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{2^3} + \cdots \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2,\ 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{3^3} + \cdots \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

素数定理と "解析的" 整数論

n 以下の素数の個数を $\pi(n)$ とおく. $\pi(10)=4$, $\pi(100)=25$, $\pi(1000)=168$, $\pi(10000)=1229$, ..., $\pi(\infty)=\infty$.

定理 (素数定理)

$$\pi(10^k) \fallingdotseq \frac{0.4342944819\ldots \cdot 10^k}{k}.$$

例

「一垓 (いちがい)($=100000000000000000000=10^{20}$) 以下の素数の個数」は

- $$\pi(10^{20}) = 2220819602560918840.$$
- $\frac{0.4342944819...*10^{20}}{20} \fallingdotseq 2171472409516259138.$
- $\frac{2220819602560918840}{2171472409516259138} \fallingdotseq 1.0227252222\ldots.$

結構近いと思いますか？まだまだ遠いと思いますか？

※ ガウス (1792), ルジャンドル (1797) ～
～ ド・ラ・ヴァレー・プーサン, アダマール (1896)

素数定理と“解析的”整数論

<u>リーマンゼータ関数</u> $\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \cdots$

には <u>素数の情報</u> が隠されています．例えば

$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ の“値”が [素数は無限個存在] の別解を与える!

$$\because\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^1} + \frac{1}{2^1 3^1} + \frac{1}{7^1} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^1 5^1} + \frac{1}{11^1} + \frac{1}{2^2 3} + \frac{1}{13^1} + \frac{1}{2^1 7^1} + \cdots$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{5^1} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{7^1} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right)\cdots$$

$$\leq \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{11}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{13}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{17}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{19}} \cdots \quad (\because \text{等比級数の公式})$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} < \infty \quad (\text{もし素数全体} = \{2, 3, 5, \ldots, p_k\} \text{ なら})$$

一方で

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \cdots$$

$$\vee$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty.$$ よって矛盾.

素数定理と“解析的”整数論

<u>リーマンゼータ関数</u> $\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \cdots$

には <u>素数の情報</u> が隠されています．例えば

$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots = \infty \Rightarrow$ 素数は無限個存在する．

さらに

- $\zeta(1 + y\sqrt{-1}) = 0$ を満たす実数 y が存在しない $\Leftrightarrow$ 素数定理.
- $\zeta(s) = 0$ の複素数解 $\Rightarrow$ 素数定理の精密化

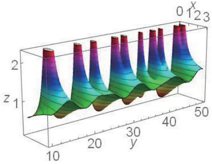
などの事実が知られています．(証明は “ガチ解析”)

素数定理と“解析的”整数論

<u>リーマンゼータ関数</u> $\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \cdots$

- $\zeta(1) = \infty \Rightarrow$ 素数は無限個存在する.
- $\zeta(1 + y\sqrt{-1}) = 0$ を満たす実数 y が存在しない $\Leftrightarrow$ 素数定理.
- $\zeta(s) = 0$ の複素数解 $\Rightarrow$ 素数定理の精密化

この「$\zeta(s) = 0$ の複素数解」には興味深い現象があります.



左は $z = \dfrac{1}{|\zeta(x + y\sqrt{-1})|}$ の 3 次元グラフです.

突出部分に複素数解 $(\zeta(x + y\sqrt{-1}) = 0)$ があります.

<u>リーマン予想</u> $\cdots$ $\zeta(s) = 0$ の複素数解は全て $x = \frac{1}{2}$ に一列に並んでいる.

これは 100 万ドル（≒ 1 億円）の懸賞問題. この問題を解くために

革新的なアイデアが生まれ, 数学のレベルが一気に引き上げられる

という期待（確信）が, この懸賞額に込められています.