“ガンマ関数の関数等式” と “CM 周期の単項関係式” の対応と, その応用

加塩朋和 * (東京理科大学)

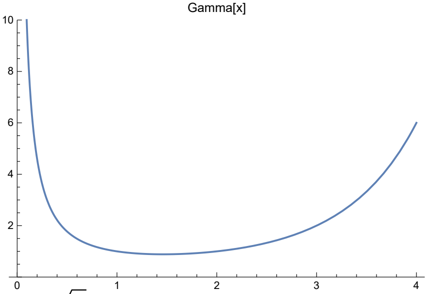
第 67 回 代数学シンポジウム

* E-mail: kashio_tomokazu@ma.noda.tus.ac.jp

Euler のガンマ関数

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt \quad (\mathrm{Re}(z) > 0)$$

- $\Gamma(1) := \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1$
- $z\Gamma(z) = \int_0^\infty (t^z)' e^{-t}\, dt = \Gamma(z+1)$
  $\Rightarrow \Gamma(n) = (n-1)!\ (n \in \mathbb{N})$
- $\Gamma(1/2) = 1.772453850\ldots$
- $\Gamma(1/4) = 3.625609908\ldots$
- $\Gamma(3/4) = 1.225416702\ldots$
- $\Gamma(1/2)^2 = 3.141592653\ldots = \pi$
- $\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)/\pi = 1.414213562\ldots = \sqrt{2}$



ガンマ関数の "関数等式"

- 反射公式 $\cdots$ $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$
- 倍数公式 $\cdots$ $\displaystyle\prod_{k=0}^{d-1} \Gamma(z + \tfrac{k}{d}) = d^{\frac{1}{2} - dz} (2\pi)^{\frac{d-1}{2}} \Gamma(dz) \quad (d \in \mathbb{N})$

$\Gamma(\frac{a}{n}) = ???$ $\rightsquigarrow$ "CM 周期"

志村の周期記号

K: CM 体, K^+: 最大総実部分体

- K の虚数乗法 (Complex Multiplication) を持つアーベル多様体の周期
- K の代数的 Hecke 指標の L 関数の臨界値
- K^+ 上の Hilbert 保型形式の CM 点での特殊値

$$\in \langle \pi, p_K(\sigma,\tau) \mid \sigma,\tau\colon K \hookrightarrow \mathbb{C} \rangle \times \overline{\mathbb{Q}}$$

c.f. $\zeta(2n) = \pi^{2n} \times \frac{2^{2n-1}|B_{2n}|}{(2n)!} \in \langle \pi \rangle \times \mathbb{Q}$

K: 虚二次体 $\Rightarrow$ 楕円曲線 $E/\overline{\mathbb{Q}}$ s.t. $\mathrm{End}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong K$, γ: 非自明な閉路
$\mathrm{Hom}(K, \mathbb{C}) = \{\mathrm{id}, \rho\}$

- $p_K(\mathrm{id}, \mathrm{id}) = p_K(\rho, \rho) :\equiv \pi^{-1} \int_\gamma \frac{dx}{y} \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times$
- $p_K(\mathrm{id}, \rho) = p_K(\rho, \mathrm{id}) :\equiv \int_\gamma \frac{x dx}{y} \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times$

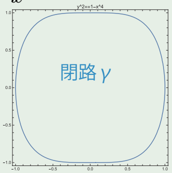
e.g., レムニスケート周率

$$\varpi := 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} = 2.622057554\ldots \quad \text{(c.f. } \pi := 2 \int_0^1 \tfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\text{)}$$

$2 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2} \int_\gamma \frac{dx}{y}$ on $E: y^2 = 1 - x^4$

"$\sqrt{-1}$" $= [\phi\colon (x, y) \mapsto (\sqrt{-1}x, y)] \in \mathrm{End}(E)$

$\rightsquigarrow \quad p_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}(\mathrm{id}, \mathrm{id}) :\equiv \pi^{-1} \varpi \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times$



$p_K(\sigma, \tau) \in \mathbb{C}^\times / \overline{\mathbb{Q}}^\times$ ($\because$ 楕円曲線 (アーベル多様体) のモデルのとり方)

CM 周期の "単項関係式"

- 体拡大 $K \subset L \Rightarrow p_K(\tilde{\sigma}|_K, \tau) \equiv \prod_{\tilde{\tau}|_K = \tau} p_L(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}) \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times$
- 複素共役 $\rho \Rightarrow p_K(\sigma, \tau) p_K(\sigma, \rho \circ \tau) \equiv 1 \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times$

Recall. K: 虚二次体 $\Rightarrow$ 楕円曲線 $E/\overline{\mathbb{Q}}$ s.t. $\mathrm{End}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong K$

$$p_K(\mathrm{id}, \mathrm{id}) \equiv \pi^{-1} \int_\gamma \frac{dx}{y}, \quad p_K(\mathrm{id}, \rho) \equiv \int_\gamma \frac{x dx}{y} \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times$$

カップ積 : $H^1(E) \times H^1(E) \to H^2(E) \cong H^1(\mathbb{G}_m)$,

$$\left(\frac{dx}{y}, \frac{x dx}{y}\right) \quad \mapsto \quad \frac{dx}{y} \wedge \frac{x dx}{y} \doteqdot \frac{dx}{x}$$

$$\rightsquigarrow \int_\gamma \frac{dx}{y} \cdot \int_{\gamma'} \frac{x dx}{y} \doteqdot \oint \frac{dx}{x} = 2\pi i$$

$$\rightsquigarrow p_K(\mathrm{id}, \mathrm{id}) p_K(\mathrm{id}, \rho) \equiv 1 \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times$$

c.f. "代数的 Heche 指標に付随するモチーフ"

$\boxed{\text{Chowla-Selberg 公式}}$ $\cdots$ $(2\pi)^{12h} \prod_{\overline{\mathfrak{a}} \in \mathrm{Cl}} |\Delta(\mathfrak{a})|^2 = \frac{1}{d} \prod_{a=1}^{d-1} \Gamma(\frac{a}{d})^{6w\chi(a)}$

$\Delta(z) = e^{2\pi i z} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2n\pi i z})^{24}$: モジュラー判別式, K: 虚二次体, $-d$: 判別式, Cl: イデアル類群, h: 類数, w: 1 の冪根の個数, χ: Dirichlet 指標, $\mathfrak{a} = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$, $\mathrm{Im}(\omega_1/\omega_2) > 0$ のとき $\Delta(\mathfrak{a}) := N(\mathfrak{a})^{12} \Delta(\frac{\omega_1}{\omega_2}) \omega_2^{-12}$

系. $$p_{\mathbb{Q}(\sqrt{-d})}(\mathrm{id}, \mathrm{id}) \equiv \pi^{-\frac{1}{2}} \prod_{\overline{a} \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times} \Gamma(\tfrac{a}{d})^{\frac{w\chi(a)}{4h}} \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times$$

$\boxed{\text{Rohrlich の公式}}$ $\cdots$ $\int_\gamma x^{r-1} y^{s-n} dx \equiv \frac{\Gamma(\frac{r}{n})\Gamma(\frac{s}{n})}{\Gamma(\frac{r+s}{n})} \left(= B(\tfrac{r}{n}, \tfrac{s}{n})\right) \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times$

$F_n\colon x^n + y^n = 1$: Fermat 曲線 ($\Rightarrow J(F_n) \curvearrowleft \mathbb{Z}[\zeta_n]$), γ: $F_n(\mathbb{C})$ の閉路

系. $$\Gamma(\tfrac{a}{n}) \equiv \pi^{1-\langle \frac{a}{n} \rangle} \prod_{\overline{b} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\mathrm{id}, \sigma_b)^{\frac{1}{2} - \langle \frac{ab}{n} \rangle} \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times$$

ただし $[\sigma_b\colon \zeta_n \mapsto \zeta_n^b] \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}(\zeta_n), \mathbb{C})$, $\langle \ldots \rangle$: 小数部分

$\boxed{\text{Rohrlich}}\ \cdots\ \Gamma(\tfrac{a}{n}) \equiv \pi^{1-\langle \frac{a}{n} \rangle} \prod_{\overline{b}} p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\mathrm{id}, \sigma_b)^{\frac{1}{2}-\langle \frac{ab}{n} \rangle} \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times$

Recall: ガンマ関数の関数等式

- 反射公式 $\cdots\ \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$
- 倍数公式 $\cdots\ \prod_{k=0}^{d-1} \Gamma(z+\frac{k}{d}) = d^{\frac{1}{2}-dz}(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}\Gamma(dz)$

Recall: CM 周期の単項関係式

- 体拡大 $\cdots\ p_K(\tilde{\sigma}|_K, \tau) \equiv \prod_{\tilde{\tau}|_K=\tau} p_L(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau})$
- 複素共役 $\cdots\ p_K(\sigma,\tau)p_K(\sigma,\rho\circ\tau) \equiv 1$

$\Downarrow\Downarrow\Downarrow\Downarrow\Downarrow\Downarrow\Downarrow\Downarrow\Downarrow\Downarrow$

$$\Gamma(\tfrac{a}{n})\Gamma(\tfrac{n-a}{n}) \equiv \pi \qquad \Longleftrightarrow p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\mathrm{id},\sigma_b)p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\mathrm{id},\sigma_{-b}) \equiv 1$$

$(\because \langle x \rangle + \langle 1-x \rangle = 1)$

$$\prod_{k=0}^{d-1} \Gamma(\tfrac{a}{n}+\tfrac{k}{d}) \equiv \pi^{\frac{d-1}{2}}\Gamma(\tfrac{da}{n}) \Longleftrightarrow p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\mathrm{id},\sigma_b) \equiv \prod_{c\equiv b \bmod n} p_{\mathbb{Q}(\zeta_{dn})}(\mathrm{id},\sigma_c)$$

$(\because \sum_{k=0}^{d-1} B_1(x+\frac{k}{d}) = B_1(dx))$

p 進類似

Euler のガンマ関数 $\Rightarrow$ 森田の p 進ガンマ関数

$$\Gamma_p(n) := (-1)^n \prod_{0<k<n,\ p\nmid k} k \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$\Gamma_p(z) = \lim_{\mathbb{N}\ni n \overset{p\text{-adic}}{\to} z} \Gamma_p(n) \qquad (z \in \mathbb{Z}_p)$$

p 進ガンマ関数の関数等式

- 反射公式: $\Gamma_p(z)\Gamma_p(1-z) \in \mu_\infty$ (1 の冪根)
- 倍数公式: $\displaystyle\prod_{k=0}^{d-1} \Gamma_p(z + \tfrac{k}{d}) \equiv d^{1-dz+(dz)_1}\Gamma_p(dz) \mod \mu_\infty \qquad (p \nmid d)$

  ただし $z \in \mathbb{Z}_p$ に対し $z = z_0 + pz_1$, $1 \le z_0 \le p$, $z_1 \in \mathbb{Z}_p$.

p 進類似 (特殊事情)

周期 (積分) $\int_\gamma \omega \in \mathbb{C} \Rightarrow p$ 進周期 $\int_{\gamma,p} \omega \in \mathrm{B_{dR}}$ (p 進 Hodge 理論)

志村の周期記号 $p_K(\sigma,\tau) \in \mathbb{C}^\times/\overline{\mathbb{Q}}^\times \Rightarrow p_{K,p}(\sigma,\tau) \in {\mathrm{B_{dR}}}^\times/\overline{\mathbb{Q}}^\times$

CM 周期の単項関係式

$[p_K(\sigma,\tau) : p_{K,p}(\sigma,\tau)] \in (\mu_\infty \times \mu_\infty)\backslash(\mathbb{C}^\times \times {\mathrm{B_{dR}}}^\times)/\overline{\mathbb{Q}}^\times$

- 体拡大: $\dfrac{p_K(\tilde{\sigma}|_K,\tau)}{\prod_{\tilde{\tau}|_K=\tau} p_L(\tilde{\sigma},\tilde{\tau})} \equiv \dfrac{p_{K,p}(\tilde{\sigma}|_K,\tau)}{\prod_{\tilde{\tau}|_K=\tau} p_{L,p}(\tilde{\sigma},\tilde{\tau})} \mod \mu_\infty$
- 複素共役: $p_K(\sigma,\tau)p_K(\sigma,\rho\circ\tau) \equiv p_{K,p}(\sigma,\tau)p_{K,p}(\sigma,\rho\circ\tau) \mod \mu_\infty$

絶対フロベニウス作用

$\mathrm{B_{dR}} \supset \widetilde{\mathrm{B_{cris}}} := (\mathrm{B_{cris}}\overline{\mathbb{Q}_p})^{\mathbb{Q}} \ni p_{K,p}(\sigma,\tau)$ ($\because$ 虚数乗法 $\Rightarrow$ 潜在的良還元)

$\circlearrowright \Phi$: 絶対フロベニウス

$\boxed{\text{Rohrlich}}$ $\cdots$ $\Gamma(\frac{a}{n}) \equiv \pi^{1-\langle \frac{a}{n} \rangle} \prod_{\bar{b}} p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\mathrm{id}, \sigma_b)^{\frac{1}{2}-\langle \frac{ab}{n} \rangle} \mod \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$

$\Rightarrow$ Coleman の公式 ("Frobenius matrix")

$$P(\tfrac{a}{n}) := \frac{\Gamma(\frac{a}{n}) \cdot \pi_p^{\frac{1}{2}-\frac{a}{n}} \prod_{\bar{b}} p_{\mathbb{Q}(\zeta_n),p}(\mathrm{id}, \sigma_b)^{\frac{1}{2}-\langle \frac{ab}{n} \rangle}}{\pi^{1-\frac{a}{n}} \prod_{\bar{b}} p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\mathrm{id}, \sigma_b)^{\frac{1}{2}-\langle \frac{ab}{n} \rangle}} \in \widetilde{\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}}/\mu_\infty$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma_p(\tfrac{a'}{n}) \equiv p^{\frac{1}{2}-\frac{a}{n}} \frac{P(\frac{a'}{n})}{\Phi(P(\frac{a}{n}))} \mod \mu_\infty$$

$(p \nmid n,\ 0 < a, a' < n,\ pa \equiv a' \mod n)$

$\because$ $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(F_n, \mathbb{Q}_p) \ni \eta_{r,s} := x^{r-1} y^{s-n} dx \quad \Rightarrow \quad \Phi(\eta_{r,s}) = \alpha_{r,s} \cdot \eta_{r',s'}$

$(pr \equiv r' \mod n,\ ps \equiv s' \mod n)$

$$\eta_{r,s} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{r,s}(k) x^{k-1}\, dx \Rightarrow \alpha_{r,s} = \lim_{k \to 0} \frac{p a_{r,s}(k)}{a_{r',s'}(k)} = \lim_{k \to \frac{-r}{n}} \frac{p\binom{s/n-1}{k}}{\binom{s'/n-1}{pk+(pr-r')/n}}$$

$= \cdots$ $\square$

主結果 $\cdots$ Coleman の公式は, ある程度 “自動的に” 従う

A Key Proposition

$f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p$: 連続 s.t. $\begin{cases} f(dz) = \displaystyle\prod_{k=0}^{d-1} f(z + \tfrac{k}{d}) & (p \nmid d \in \mathbb{N}) \\ \dfrac{f(p^n+1)}{f(p^n)} = \dfrac{f(p^{n+1}+1)}{f(p^{n+1})} & (n \geq 0) \end{cases}$

$$\Rightarrow \exists \text{定数 } a \text{ s.t. } f(z) = a^{z-\frac{1}{2}}$$

もし “p 倍公式” $f(pz) = \displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} f(z+\tfrac{k}{p})$ も成り立てば (注. $z + \frac{k}{p} \notin \mathbb{Z}_p$)

$$\begin{cases} f(pz) = \prod_{k=0}^{p-1} f(z+\frac{k}{p}) \\ f(p(z+\frac{1}{p})) = \prod_{k=0}^{p-1} f(z+\frac{k+1}{p}) \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{f(pz)}{f(pz+1)} = \frac{f(z)}{f(z+1)}$$

Recall: Coleman の公式 (“Frobenius matrix”)

$$P(\tfrac{a}{n}) := \frac{\Gamma(\frac{a}{n}) \cdot \pi_p^{\frac{1}{2}-\frac{a}{n}} \prod_{\bar{b}} p_{\mathbb{Q}(\zeta_n),p}(\mathrm{id}, \sigma_b)^{\frac{1}{2}-\langle \frac{ab}{n} \rangle}}{\pi^{1-\frac{a}{n}} \prod_{\bar{b}} p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\mathrm{id}, \sigma_b)^{\frac{1}{2}-\langle \frac{ab}{n} \rangle}} \in \widetilde{\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}}/\mu_\infty$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma_p(\tfrac{a'}{n}) \equiv p^{\frac{1}{2}-\frac{a}{n}} \frac{P(\frac{a'}{n})}{\Phi(P(\frac{a}{n}))} \mod \mu_\infty$$

Recall: 関数等式と単項関係式の対応

$$\prod_{k=0}^{d-1} \Gamma(\tfrac{a}{n} + \tfrac{k}{d}) \equiv \pi^{\frac{d-1}{2}} \Gamma(\tfrac{da}{n}) \Longleftrightarrow p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\mathrm{id}, \sigma_b) \equiv \prod_{c \equiv b \bmod n} p_{\mathbb{Q}(\zeta_{dn})}(\mathrm{id}, \sigma_c)$$

$$\downdownarrows\downdownarrows\downdownarrows\downdownarrows\downdownarrows$$

$$\prod_{k=0}^{d-1} P(\tfrac{a}{n} + \tfrac{k}{d}) \equiv \text{“補正項”} \cdot P(\tfrac{ad}{n}) \mod \mu_\infty \quad (\forall d \in \mathbb{N})$$

$$\prod_{k=0}^{d-1} P(\tfrac{a}{n}+\tfrac{k}{d}) \equiv \text{“補正項”} \cdot P(\tfrac{ad}{n}) \mod \mu_\infty \quad (\forall d \in \mathbb{N})$$

$$f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p\colon \text{連続 s.t.} \begin{cases} f(dz) = \prod_{k=0}^{d-1} f(z+\tfrac{k}{d}) & (p \nmid d) \\ \frac{f(p^n+1)}{f(p^n)} = \frac{f(p^{n+1}+1)}{f(p^{n+1})} & (n \geq 0) \end{cases} \Rightarrow f(z) = a^{z-\frac{1}{2}}$$

$$f(\tfrac{a'}{n}) := p^{\frac{1}{2}-\frac{a}{n}} \frac{P(\frac{a'}{n})}{\Phi(P(\frac{a}{n}))} \Big/ \Gamma_p(\tfrac{a'}{n})$$

とおく．“絶対フロベニウス作用の連続性” より $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p$ とみなせて

$$\begin{cases} f(dz) \equiv \prod_{k=0}^{d-1} f(z+\tfrac{k}{d}) \mod \mu_\infty & (p \nmid d) \\ \frac{f(p^n+1)}{f(p^n)} \equiv \frac{f(p^{n+1}+1)}{f(p^{n+1})} \mod \mu_\infty & (n \geq 1) \end{cases}$$

定理

$$f(\tfrac{a'}{n}) := p^{\frac{1}{2}-\frac{a}{n}} \frac{P(\frac{a'}{n})}{\Phi(P(\frac{a}{n}))} \Big/ \Gamma_p(\tfrac{a'}{n})$$

とおく．“絶対フロベニウス作用の連続性” より

$$f(dz) \equiv \prod_{k=0}^{d-1} f(z+\tfrac{k}{d}) \quad \mathrm{mod}\ \mu_\infty \qquad (p \nmid d)$$

$$\frac{f(p^n+1)}{f(p^n)} \equiv \frac{f(p^{n+1}+1)}{f(p^{n+1})} \quad \mathrm{mod}\ \mu_\infty \qquad (n \geq 1)$$

が従う．とくに ∃ 定数 a, b s.t. $f(z) \equiv a^{z-\frac{1}{2}} b^{z_1+\frac{1}{2}} \ \mathrm{mod}\ \mu_\infty$

絶対フロベニウス作用の連続性

Recall: $\eta_{r,s} := x^{r-1}y^{s-n}dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_{r,s}(k)x^{k-1}\,dx$

$\Rightarrow \Phi(\eta_{r,s}) = \alpha_{r,s} \cdot \eta_{r',s'},\ \ \alpha_{r,s} = \lim_{k\to 0} \frac{pa_{r,s}(k)}{a_{r',s'}(k)} = \lim_{k\to\frac{-r}{n}} \frac{p\binom{s/n-1}{k}}{\binom{s'/n-1}{pk+(pr-r')/n}}$

今後の課題

- $a = b = 1$ も導けるか？
- $\bmod \mu_\infty$ の解消 (Coleman の元々の公式は等式)
- $p \mid n$ の場合 ($F_n \colon x^n + y^n = 1$ は悪い還元, Coleman の公式が複雑化)
- “絶対フロベニウス作用の連続性” の定式化と証明の簡易化

CM 体が $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ の場合 $\Rightarrow$ 一般の CM 体

$\rightsquigarrow$ “吉田敬之氏の絶対 CM 周期記号予想”

吉田予想と Stark 予想 (rank 1 abelian, 実素点)

吉田予想 (絶対 CM 周期記号)	**Stark 予想**
多重 Γ 関数 $\Leftrightarrow$ 一般の CM 周期	多重 Γ 関数 $\Leftrightarrow$ Stark 単数
吉田予想 $\overset{\text{CM 周期の単項関係式}}{\Rightarrow}$ S 予想の一部	

p 進吉田予想	**Gross-Stark 予想 (解決)**
p 進多重 Γ $\Leftrightarrow$ 絶対フロベニウス	p 進多重 Γ $\Leftrightarrow$ G-S 単数
p 進吉田予想 $\overset{\text{フロベニウス作用の固有値}}{\Rightarrow}$ G-S 予想	

New! $\cdots$ [CM 周期: p 進周期] $\in (\mathbb{C}^\times \times \mathrm{B_{dR}}^\times)/\overline{\mathbb{Q}}^\times$

絶対フロベニウス作用に関する予想 $\Rightarrow$ S 単数, G-S 単数

$\overset{(?)}{\Uparrow}$ 関数等式と単項関係式

Rohrlich の公式

$$\Gamma(\tfrac{a}{n}) \equiv \pi^{1-\langle \frac{a}{n}\rangle} \prod_{\overline{b}} p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\mathrm{id},\sigma_b)^{\frac{1}{2}-\langle \frac{ab}{n}\rangle} \mod \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$$

関数等式と単項関係式

$$\Gamma(\tfrac{a}{n})\Gamma(\tfrac{n-a}{n})/\pi \in \overline{\mathbb{Q}} \Longleftrightarrow p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\mathrm{id},\sigma_b)p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\mathrm{id},\sigma_{-b}) \equiv 1$$

Coleman の公式

$$P(\tfrac{a}{n}) := \frac{\Gamma(\frac{a}{n})\cdot\pi_p^{\frac{1}{2}-\frac{a}{n}} \prod_{\overline{b}} p_{\mathbb{Q}(\zeta_n),p}(\mathrm{id},\sigma_b)^{\frac{1}{2}-\langle\frac{ab}{n}\rangle}}{\pi^{1-\frac{a}{n}} \prod_{\overline{b}} p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\mathrm{id},\sigma_b)^{\frac{1}{2}-\langle\frac{ab}{n}\rangle}} \quad \Rightarrow \quad \Gamma_p(\tfrac{a'}{n}) \equiv p^{\frac{1}{2}-\frac{a}{n}} \frac{P(\frac{a'}{n})}{\Phi(P(\frac{a}{n}))}$$

$\rightsquigarrow$ Gross-Koblitz の公式 (ガウス和 $= p$ 進ガンマ関数の積)

$$\Phi^{[\mathbb{Q}(\zeta_n)_{\mathfrak{P}}:\mathbb{Q}_p]} \fallingdotseq \text{フロベニウス作用} \fallingdotseq \text{ガウス和}$$

吉田予想 (絶対 CM 周期, 多重ガンマ関数, CM 周期, Stark 予想)

- H. Yoshida, *Absolute CM-Periods*, Math. Surv. Monogr. **106** (2003)
- K-, On the algebraicity of some products of special values of Barnes' multiple gamma function, *Amer. J. Math.* **140** (2018), no. 3, 617-651

p 進吉田予想

- K-, H. Yoshida, On p-adic absolute CM-periods. I, *Amer. J. Math.* **130** (2008), no. 6, 1629-1685
- K-, H. Yoshida, On p-adic absolute CM-periods. II, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **45** (2009), no. 1, 187-225

New!

- K-, Fermat curves and a refinement of the reciprocity law on cyclotomic units, *J. Reine Angew. Math.* **741** (2018), 255-273
- K-, On a common refinement of Stark units and Gross-Stark units, preprint (arXiv:1706.03198)
- K-, Note on Coleman's formula for the absolute Frobenius on Fermat curves, preprint (arXiv:1904.02879)