フェルマー曲線上のフロベニウス行列の公式とその一般化に関して

加塩朋和 *

プロジェクト研究集会 2022 (2023 年 3 月 20 日 – 22 日)

2023 年 3 月 21 日 (火) 11:00 – 12:00

Abstract

Coleman はフェルマー曲線の絶対フロベニウス作用を明示的に計算し, p 進ガンマ関数を用いて表した. 講演者はフェルマー曲線が良い還元を持つ場合に, この公式の別証明を与えた. これらの事実を概観したのち, 一般の場合への拡張への取り組みも紹介したい. 本研究の一部は, 吉崎彪雅氏, 関川隆太郎氏との共同研究である.

1　Γ 関数

オイラーのガンマ関数は次式で定義される.

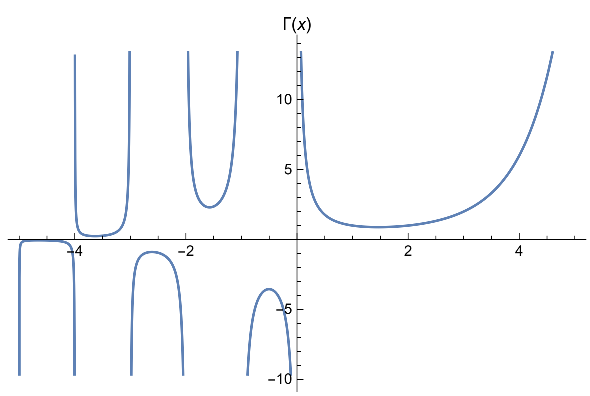
$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt \quad (\mathrm{Re}(z) > 0).$$

簡単な計算により整数点での性質が分かる.

- $\Gamma(1) := \int_0^\infty e^{-t}\, dt = [-e^{-t}]_0^\infty = -0 + 1 = 1.$
- $\Gamma(z+1) := \int_0^\infty t^z e^{-t}\, dt = [t^z(-e^{-t})]_0^\infty - \int_0^\infty z t^{z-1}(-e^{-t})\, dt = \int_0^\infty z t^{z-1} e^{-t}\, dt = z\Gamma(z).$

$\Rightarrow \Gamma(n) = (n-1)!\ (n \in \mathbb{N}).$

$\Gamma(z-1) = \frac{\Gamma(z)}{z-1}$ で "解析接続" $\Rightarrow \Gamma(1-n) = \pm\infty\ (n \in \mathbb{N}).$



*東京理科大学, tomokazu_kashio@rs.tus.ac.jp

今回は以下の関数等式に着目する.

$$\text{反射公式} \cdots \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$
$$\text{倍数公式} \cdots \prod_{k=0}^{d-1} \Gamma(z+\tfrac{k}{d}) = d^{\frac{1}{2}-dz}(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}\Gamma(dz) \quad (d \in \mathbb{N}).$$

両辺の極の位置を見れば想像に難くない (?). 実際は “無限積表示” から導くことができる. 後者の “解釈” の為に Lerch の公式を準備する.

Hurwitz ゼータ関数は以下で定義され, $s \in \mathbb{C}$ 上有理型に解析接続される.

$$\zeta(s,z) := \sum_{n=0}^{\infty} (z+n)^{-s} \quad (\mathrm{Re}(s) > 1).$$

定理 1.1 (Lerch)**.**

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} \exp(\tfrac{\partial}{\partial s}\zeta(s,z)|_{s=0}).$$

“a simple proof” in [Yo, p17]. 関数等式による特徴付け:

$f(z)$: 有理型, 対数凸, $f(z+1) = zf(z)$, $f(1) = 1 \Rightarrow f(z) = \Gamma(z)$ (Bohr-Mollerup)

と, Hurwitz ゼータ関数の関係式

$$\begin{aligned}
\zeta(s,z+1) - \zeta(s,z) &= \sum_{n=1}^{\infty}(z+n)^{-s} - \sum_{n=0}^{\infty}(z+n)^{-s} = -z^{-s} \\
\Rightarrow \tfrac{\partial}{\partial s}\zeta(s,z+1)|_{s=0} &- \tfrac{\partial}{\partial s}\zeta(s,z)|_{s=0} = \log z
\end{aligned}$$

より. (対数凸性や $z = 1$ での値は Hurwitz ゼータ関数の積分表示から分かる.) □

この公式を認めると

$$\frac{\Gamma(dz)}{\sqrt{2\pi}} = \exp(\tfrac{\partial}{\partial s} \quad \zeta(s,dz) \quad |_{s=0}),$$
$$\prod_{k=0}^{d-1} \frac{\Gamma(z+\frac{k}{d})}{\sqrt{2\pi}} = \prod_{k=0}^{d-1} \exp\left(\tfrac{\partial}{\partial s}\zeta(s,z+\tfrac{k}{d})|_{s=0}\right) = \exp\left(\frac{\partial}{\partial s} \quad \sum_{k=0}^{d-1}\zeta(s,z+\tfrac{k}{d}) \quad |_{s=0}\right),$$

$$\sum_{k=0}^{d-1}\zeta(s,z+\tfrac{k}{d}) = \sum_{k=0}^{d-1}\sum_{n=0}^{\infty}(z+\tfrac{k}{d}+n)^{-s} = \sum_{n=0}^{\infty}(z+\tfrac{n}{d})^{-s} = d^s\sum_{n=0}^{\infty}(dz+n)^{-s} = d^s\zeta(s,dz).$$

注意 1.2. $\zeta(1-n,z) = -\frac{B_n(x)}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. e,g., $\zeta(0,dz) = \frac{1}{2} - dz$.

2　p 進 Γ 関数

素数 p に対し

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n \mid a_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\} \right\} = \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \hat{\mathbb{Z}}$$

を p 進整数環と呼んだ. ただし最後は p 進ノルム

$$v_p(\tfrac{ap^k}{b}) := k \ (p \nmid a, b), \quad |z|_p := p^{-v_p(z)}$$

に関する完備化である.

定義 2.1 (Morita)**.** p 進 Γ 関数

$$\Gamma_p(z) \colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$$

を

$$\Gamma_p(n) := (-1)^n \prod_{0<k<n,\ p\nmid k}^{n-1} k \quad (n \in \mathbb{N})$$

の p 進補間関数として定義する.

例えば $p = 3$ で

$$\mathbb{Z}_3 \ni 1 + 3 + 3^2 + \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{-1}{2}$$

であり,

$$\begin{array}{lll}
\Gamma_3(1) & = -1 & = 2 + 2\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 + 2\cdot 3^4 + 2\cdot 3^5 + 2\cdot 3^6 + \cdots, \\
\Gamma_3(4) & = 2 & = 2 + 0\cdot 3 + 0\cdot 3^2 + 0\cdot 3^3 + 0\cdot 3^4 + 0\cdot 3^5 + 0\cdot 3^6 + \cdots, \\
\Gamma_3(13) & = -246400 & = 2 + 0\cdot 3 + 0\cdot 3^2 + 0\cdot 3^3 + 0\cdot 3^4 + 0\cdot 3^5 + 1\cdot 3^6 + \cdots, \\
\downarrow & & \\
\Gamma_3(\frac{-1}{2}) & & = 2 + 0\cdot 3 + 0\cdot 3^2 + 0\cdot 3^3 + 0\cdot 3^4 + 0\cdot 3^5 + 0\cdot 3^6 + \cdots = 2
\end{array}$$

となる.

注意 2.2. c.f. $\Gamma(\frac{-1}{2}) = (\frac{-1}{2})^{-1}\Gamma(\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$.

p 進版の公式は以下の通り:

$$\begin{array}{ll}
\text{反射公式} \cdots & \Gamma_p(z)\Gamma_p(1-z) \equiv 1 \mod \mu_\infty, \\
\text{倍数公式} \cdots & \displaystyle\prod_{k=0}^{d-1} \Gamma_p(z + \tfrac{k}{d}) \equiv d^{1-dz+(dz)_1}\Gamma_p(dz) \mod \mu_\infty \quad (p \nmid d), \\
\text{Ferrero-Greenberg} \cdots & \log_p(\Gamma_p(z)) = \zeta_p'(0, z).
\end{array}$$

ただし

- μ_∞: 1の冪根全体からなる群. 1の冪根部分も明示的に書けるが省略する.
- $z \in \mathbb{Z}_p$ に対し $z_0 \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $z_1 \in \mathbb{Z}_p$ を $z = z_0 + pz_1$ で定める.
- $\zeta_p(s, z)$ $(s \in \mathbb{Z}_p)$ は $\displaystyle\sum_{\substack{n=0 \\ v_p(z+n)=0}}^{\infty} (z+n)^{-s}$ の p 進補間関数.
- $\log_p$ は p 進対数関数: $\log_p(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $(x \in \mathbb{Z}_p,\ |x|_p \ll 1)$.

$\mathbb{C}$ の p 進類似として $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p := \mathrm{Frac}(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[\frac{1}{p}] \subset \mathbb{C}_p := \hat{\overline{\mathbb{Q}_p}}$ を考える.

命題 2.3. 連続関数 $f(z)\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p$ が

$$\prod_{k=0}^{d-1} f(z + \tfrac{k}{d}) \equiv d^{1-dz+(dz)_1} f(dz) \mod \mu_\infty \quad (p \nmid d \in \mathbb{N}), \tag{1}$$

$$\frac{f(p^n+1)}{f(p^n)} \equiv \frac{f(p^{n+1}+1)}{f(p^{n+1})} \mod \mu_\infty \quad (n \geq 1) \tag{2}$$

を満たせば, $\exists$定数 c_1, c_2 s.t.

$$f(z) \equiv c_1^{z-\frac{1}{2}} c_2^{z_1+\frac{1}{2}} \Gamma_p(z) \mod \mu_\infty.$$

注意 2.4. (1) Eq. (2) が $n \geq 0$ で成り立てば $\exists c$ s.t. $f(z) \equiv c^{z-\frac{1}{2}} \Gamma_p(z) \mod \mu_\infty$.

(2) Eq. (2) は p 倍公式の "仲間" と見なせる: もし p 倍公式

$$\prod_{k=0}^{p-1} f(z + \tfrac{k}{p}) \equiv \text{“補正項”}\ f(pz)$$

が成り立てば, $z \Rightarrow z + \frac{1}{p}$ として

$$\prod_{k=1}^{p} f(z + \tfrac{k}{p}) \equiv \text{“補正項”}\ f(pz+1)$$

となり, 辺々割って

$$\frac{f(z+1)}{f(z)} \equiv \text{“補正項”}\ \frac{f(pz+1)}{f(pz)}$$

となる (のだが, 実際は $\frac{1}{p} \notin \mathbb{Z}_p$ なので p 倍公式は存在しない).

証明の概略. $g(z) = f(z)/\Gamma_p(z)$ とおく. $\prod_{k=0}^{d-1} g(z + \frac{k}{d}) \equiv g(dz)$ と $\prod_{k=0}^{d-1} g(z + \frac{1}{d} + \frac{k}{d}) \equiv g(dz+1)$ より

$$\frac{g(z+1)}{g(z)} \equiv \frac{g(dz+1)}{g(dz)} \quad (p \nmid \forall d).$$

よって $\frac{g(z+1)}{g(z)}$ は $v_p(z)$ のみによる. これに $(*)$ を加えると $\frac{g(z+1)}{g(z)}$ は (おおよそ) 一定, すなわち $g(z)$ は (おおよそ) 指数関数. □

3 Colemanの公式

$p \nmid n$ なら $F_n\colon x^n + y^n = 1$ は良い還元を持つ．よって Frobenius 作用 Φ が crystalline cohomology H^1_{cris} を通じて de Rham cohomology H^1_{dR} に作用する:

$$\Phi \curvearrowright H^1_{cris}(F_n/\mathbb{F}_p, \mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{Q}_p \cong H^1_{dR}(F_n, \mathbb{Q}_p).$$

Coleman は H^1_{dR} の基底 $\eta_{r,s} = x^{r-1}y^{s-n}dx$ $(0 < r, s < n,\ r + s \neq n)$ に関する "表現行列" を, 以下の Lemma を使って計算した.

補題 3.1 (Katz)**.** $\eta = \sum_{k=0} a_k x^{k-1}dx$, $\eta' = \sum_{k=0} a'_k x^{k-1}dx$, $\Phi\eta = \lambda\eta'$ とする．部分列 $\{a_{k_l}\}_l \subset \{a_k\}_k$ が $\lim_{l\to\infty} \frac{k_l}{a_{k_l}} = 0$ を満たせば

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{pa_k}{a_{pk'}}.$$

この補題と

$$\begin{aligned} \eta_{r,s} &= \exists\lambda_{r,s}\eta_{r^\sharp,s^\sharp}\ (r^\sharp \equiv pr \bmod p,\ s^\sharp \equiv ps \bmod p), \\ \eta_{r,s} &= \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \binom{\frac{s-n}{n}}{l} x^{r+nl-1}dx \end{aligned}$$

より

$$\lambda_{r,s} = (-1)^{\frac{pr-r^\sharp}{n}} p \cdot \lim_{l\to\frac{-r}{n}\in\mathbb{Z}_p} \frac{\binom{\frac{s-n}{n}}{l}}{\binom{\frac{s^\sharp-n}{n}}{\frac{pr-r^\sharp}{n}+pl}} \doteqdot \frac{1}{B_p(\frac{r^\sharp}{n}, \frac{s^\sharp}{n})} = \frac{\Gamma_p(\frac{r^\sharp+s^\sharp}{n})}{\Gamma_p(\frac{r^\sharp}{n})\Gamma(\frac{s^\sharp}{n})}. \qquad \text{(Coleman)}$$

c.f.

$$\int_\gamma \eta_{r,s} = \int x^{r-1}y^{s-n}dx \overset{t=x^n}{\doteqdot} \int t^{r/n}(1-t)^{s/n} = B(\tfrac{r}{n}, \tfrac{s}{n}) = \frac{\Gamma(\frac{r}{n})\Gamma(\frac{s}{n})}{\Gamma(\frac{r+s}{n})}. \qquad \text{(Rohlrich)}$$

注意 3.2. (1) Colemanの公式＋虚数乗法論 $\Rightarrow$ Gross-Koblitzの公式 (Gauss和 v.s. Γ_p).

(2) Gross-Koblitzの公式 $\overset{\text{一般化}}{\Rightarrow}$ Gross-Stark予想 $=$ Dasgupta-Kakde-Ventulloの定理.

(3) Colemanの公式 $\overset{\text{一般化}}{\Rightarrow}$ 加塩-吉田予想 $\Rightarrow$ rank 1 abelian Gross-Stark予想.

4 志村の周期記号

乗法を和とした $\mathbb{Q}$-線形空間

$$\left\langle \pi \bmod \overline{\mathbb{Q}}^\times, \int_\gamma \eta_{r,s} \bmod \overline{\mathbb{Q}}^\times \right\rangle_{\mathbb{Q}} = \left\{ \pi^a \prod_{r,s} \int_\gamma \eta_{r,s}^{a_{r,s}} \bmod \overline{\mathbb{Q}}^\times \mid a, a_{r,s} \in \mathbb{Q} \right\} \subset \mathbb{C}^\times/\overline{\mathbb{Q}}^\times$$

の, π 以外の "生成系"

$$p(\sigma,\tau)\ (\sigma,\tau\in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n),\mathbb{Q}),\ \zeta_n=e^{\frac{2\pi i}{n}})$$

が上手く取れ, 志村の周期記号と呼ばれる. これらは

$$\int_\gamma \eta_{r,s}\equiv \pi\cdot \prod_{\langle\frac{br}{n}\rangle+\langle\frac{bs}{n}\rangle+\langle\frac{b(n-r-s)}{n}\rangle=1} p(\mathrm{id},\sigma_b)\mod \overline{\mathbb{Q}}^\times\ (r+s<n,\ (n,rs(r+s))=1),$$

$$p(\sigma,\tau)p(\sigma,\rho\tau)\equiv 1\mod \overline{\mathbb{Q}}^\times,\qquad p(\sigma,\tau)\equiv p(\mathrm{id},\sigma^{-1}\tau)\mod \overline{\mathbb{Q}}^\times$$

で特徴づけられる. ただし

- $\langle\alpha\rangle$ は α の小数部分.
- ρ は複素共役.
- $\sigma_b\colon \zeta_n\mapsto\zeta_n^b\ (0<b<n,\ (b,n)=1)$.

"線形代数" によって, Rohlrich の公式や Coleman の公式を $\Gamma(z)=\cdots$, $\Gamma_p(z)=\cdots$ の形に出来る.

系 4.1. (1) $\Gamma(\frac{a}{n})\equiv\pi^{1-\frac{a}{n}}\prod_b p(\mathrm{id},\sigma_b)^{\frac12-\langle\frac{ab}{n}\rangle}\mod\overline{\mathbb{Q}}^\times\ (1\le a<n)$.

(2) $\Gamma_p(\frac{a}{n})\equiv p^{\frac12-\frac{a^\flat}{n}}\prod_b \lambda(\mathrm{id},\sigma_b)^{\frac12-\langle\frac{a^\flat b}{n}\rangle}\mod\mu_\infty\ (1\le a,a^\flat<n,\ a\equiv pa^\flat \bmod n,\ p\nmid n)$.

ただし $\int_\gamma\eta_{r,s}\Rightarrow p(\sigma,\tau)$ と "同様のルール" で $\lambda_{r,s}\Rightarrow\lambda(\sigma,\tau)$ を定める.

注意 4.2. 正確な定式化は以下の通り: 志村の周期記号の p 進類似 $p_p(\sigma,\tau)$ を用いて

$$P(\tfrac{a}{n}):=\frac{\Gamma(\frac{a}{n})\pi_p^{\frac12-\frac{a}{n}}\prod_b p_p(\mathrm{id},\sigma_b)^{\frac12-\langle\frac{ab}{n}\rangle}}{\pi^{1-\frac{a}{n}}\prod_b p(\mathrm{id},\sigma_b)^{\frac12-\langle\frac{ab}{n}\rangle}}\in(B_{cris}\overline{\mathbb{Q}}_p)^{\mathbb{Q}}/\mu_\infty$$

と定めたとき

(2') $\Gamma_p(\frac{a}{n})\equiv p^{\frac12-\frac{a^\flat}{n}}\dfrac{P(\frac{a}{n})}{\Phi(P(\frac{a^\flat}{n}))}\mod\mu_\infty$.

5 主結果 (去年)

命題 5.1. "Frobenius 作用が p 進連続的" であれば, 系 4.1-(2) の右辺が命題 2.3 の 2 条件 Eq. (1), Eq. (2) を満たす. とくに $\exists c_1,c_2$ s.t.

$$\Gamma_p(z)\equiv c_1^{z-\frac12}c_2^{z_1+\frac12}p^{\frac12-\frac{a^\flat}{n}}\prod_b\lambda(\mathrm{id},\sigma_b)^{\frac12-\langle\frac{a^\flat b}{n}\rangle}\mod\mu_\infty$$

が "Frobenius 作用の明示的な計算なしで自動的に" 従う.

証明の概略. 指数 $\frac12-\frac{a}{n}=$ Hurwitz ゼータ値 $\zeta(0,\frac{a}{n})$ であり, これは倍数公式

$$\sum_{k=0}^{d-1}\zeta(0,z+\tfrac{k}{d})=\sum_{n=0}^{\infty}(z+\tfrac{n}{d})^{-s}|_{s=0}=d^s\sum_{n=0}^{\infty}(dz+n)^{-s}|_{s=0}=\zeta(0,dz)$$

を満たす. □

6　課題

6.1　$p \mid n$ の場合

$p \mid n$ のとき F_n は良い還元を持たず, モデルを取り替えて考える必要がある:

$$\Phi_\tau := \Phi^{\deg \tau} \otimes \tau \curvearrowright H^1_{cris}(F'_n/\mathbb{F}_p, \mathbb{Z}_p) \otimes K \cong H^1_{dR}(F'_n, K) \cong H^1_{dR}(F_n, K).$$

ここで

- F'_n は良い還元をもち, $\mathbb{Q}_p$ の分岐拡大体 K 上では F_n と同型.
- $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ s.t. $\tau|_{\mathbb{Q}_p^{ur}} = \sigma_p^{\deg \tau}$ with $\deg \tau \in \mathbb{Z}$.

Coleman はこの場合も Φ_τ の表現行列を計算した. “線形代数” で書き換えると以下の形になる.

系 6.1. $1 \le a < n$, $v_p(\frac{a}{n}) < 0$ のとき

$$\frac{\Gamma_p(\tau(\frac{a}{n}))}{\Gamma_p(\frac{a}{n})} \equiv \frac{p^{(\frac{a}{n} - \tau(\frac{a}{n}))v_p(\frac{a}{n})} P(\tau(\frac{a}{n}))}{\Phi_\tau(P(\frac{a}{n}))} \mod \mu_\infty.$$

ただし

- $\tau(\frac{a}{n}) =: \frac{b}{n} \Leftrightarrow \tau \circ \sigma_a = \sigma_b$ $(1 \le a, b \le n,\ (n, ab) = 1)$.
- $\Gamma_p(\frac{a}{n}) := \exp_p\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta_p(s, \frac{a}{n})|_{s=0}\right)$ $(v_p(\frac{a}{n}) < 0)$.

研究テーマ:

- $(z_1, z_2) \in \overline{\{(\frac{a}{n}, \tau(\frac{a}{n})) \mid \frac{a}{n}, \tau\}} \subset \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$ 上の連続関数として左辺を関数等式で特徴づける.
- 右辺がその関数等式を満たすことを示す.
- 両辺の一致を Frobenius 作用の計算無しで導く.

  (関川隆太郎氏, 吉崎彪雅氏との共同研究)

6.2　$F \neq \mathbb{Q}$ の場合

$\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q} \Rightarrow K/F$, K: CM 体, F: 総実体, K/F: アーベル拡大

- $F_n \Leftrightarrow F_n$ のヤコビ多様体 $\Rightarrow$ 虚数乗法を持つアーベル多様体
- $\Gamma(z) \Rightarrow$ 新谷-山本-吉田の不変量
- $\Gamma_p(z) \Rightarrow p$ 進版 (加塩-吉田)
- $p(\sigma, \tau) \Rightarrow$ 志村の周期記号

- $p_p(\sigma.\tau) \Rightarrow p$ 進版 (加塩-吉田, 加塩)
- Rohrlich の公式 $\Rightarrow$ 吉田予想 (absolute CM-period symbol)
- Coleman の公式 $\Rightarrow$ 加塩-吉田予想
- Hurwitz ゼータ値の倍数公式 $\Rightarrow$ 部分ゼータ関数の関数等式: F: 総実代数体, $\mathfrak{f} \subset \mathcal{O}_F$: 法に対し

$$C_{\mathfrak{f}} := \{\mathfrak{a} \subset F \mid (\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = 1\} \Big/ \{(\alpha) \mid \alpha \equiv 1 \bmod^* \mathfrak{f}\}.$$

$c \in C_{\mathfrak{f}}$ に付随する部分ゼータ関数

$$\zeta(s,c) := \sum_{\mathfrak{a} \in c,\ \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_F} N\mathfrak{a}^{-s}$$

は, 関数等式

$$\varphi \colon C_{\mathfrak{p}\mathfrak{f}} \to C_{\mathfrak{f}} \ni c \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \zeta(s,c) = \displaystyle\sum_{d \in \varphi^{-1}(\{c\})} \zeta(s,d) & (\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}), \\ \zeta(s,c) = N\mathfrak{p}^{-s} \zeta(s, c\overline{\mathfrak{p}^{-1}}) + \displaystyle\sum_{d \in \varphi^{-1}(\{c\})} \zeta(s,d) & (\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}) \end{cases}$$

を満たす. e,g., $F = \mathbb{Q}$, $c = \overline{(a)} \in C_{(n)} \Rightarrow \zeta(s,c) = \zeta(s, \frac{a}{n})$.

問題点:

- $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \cong C_{(n)} \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \Leftrightarrow \{\frac{a}{n} \mid 1 \leq a \leq n \mid (a,n) = 1\} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$

  $\rightsquigarrow p$ 進位相

$\Rightarrow$???

References

[Co] R. Coleman, On the Frobenius matrices of Fermat curves, *p-adic analysis*, Lecture Notes in Math. **1454** (1990), 173–193.

[Ka1] T. Kashio, Fermat curves and a refinement of the reciprocity law on cyclotomic units, *J. Reine Angew. Math.* **741** (2018), 255–273

[Ka2] T. Kashio, On a common refinement of Stark units and Gross-Stark units, preprint (`https://doi.org/10.48550/arXiv.1706.03198`)

[Ka3] T. Kashio, Note on Coleman's formula for the absolute Frobenius on Fermat curves, to appear in *Annales de l'Institut Fourier* (`https://doi.org/10.48550/arXiv.1904.02879`)

[KY1] T. Kashio, H. Yoshida, On p-adic absolute CM-periods. I, *Amer. J. Math.* **130** (2008), no. 6, 1629–1685

[KY2] T. Kashio, H. Yoshida, On p-adic absolute CM-periods. II, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **45** (2009), no. 1, 187–225

[Kat] N. Katz, Crystalline cohomology, Dieudonné modules and Jacobi sums, *Automorphic Forms, Representation Theory and Arithmetic*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, India (1979), 165–245.

[Sh] G. Shimura, *Abelian Varieties with Complex Multiplication and Modular Functions*, Princeton Math. Ser., vol. 46, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1998.

[Ya] S. Yamamoto, On Shintani's ray class invariant for totally real number fields, *Math. Ann.*, **346** (2010), no. 2, 449–476.

[Yo] H. Yoshida, *Absolute CM-Periods*, Math. Surveys Monogr., vol. 106, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.