On a common refinement of Stark units and Gross–Stark units[1]

加塩朋和[2] (東京理科大学 創域理工学部 数理科学科)

2026 年 3 月 15 日 18:05–18:45

[1] J. Lond. Math. Soc. (2) **111** (2025), no. 4, Paper No. e70147, 43 pp.; MR4891023
[2] E-mail: tomokazu_kashio@rs.tus.ac.jp

あらすじ

1. 円単数, Gauss 和 $\in \mathbb{Q}(\zeta_n)$
   (予想的) 一般化 $\Rightarrow$ Stark 単数, Gross–Stark 単数 $\in$ "射類体"/ 総実体.
2. Chowla–Selberg, Rohrlich の公式: CM 型 Abel 積分の "超越数部分"
   (予想的) 一般化 $\Rightarrow$ CM 周期に関する吉田予想.
3. CM 周期に関する吉田予想 $\Rightarrow$ Stark 単数の "代数性".
4. p 進周期環 $\ni$ "不変量" の構成, 絶対 Frobenius 作用に関する予想
   $\Rightarrow$ Stark 予想の "相互法則部分", Gross–Stark 予想.

円単数, Gauss 和

円分体: $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ $(\zeta_n := e^{\frac{2\pi i}{n}})$, $\mathbb{Q}(\zeta_n)^+ := \mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1}) = \mathbb{Q}(\cos(\frac{2\pi}{n}))$.

※ ガロア群 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \cong \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$, $\quad a \bmod n \mapsto [\sigma_a \colon \zeta_n \mapsto \zeta_n^a]$.

- "円単数" $\in \langle \pm 1, \zeta_n^a, \zeta_n^a - 1 \mid 1 \le a \le n-1 \rangle \cap \mathbb{Z}[\zeta_n]^\times$.
- "Gauss 和" $\displaystyle\sum_{a=1}^{n-1} \chi(a)\zeta_n^a \in \mathbb{Q}(\zeta_{n\varphi(n)}) \quad (\chi \colon (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times)$.

※ 相互法則 (ガロア作用): $\displaystyle\sigma_b\left(\sum_{a=1}^{n-1} \chi(a)\zeta_n^a\right) = \chi(b)^{-1}\sum_{a=1}^{n-1} \chi(a)\zeta_n^a.$

※ ノルム関係式: $N_{\mathbb{Q}(\zeta_{nl})/\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\zeta_{nl} - 1) = \begin{cases} \zeta_n - 1 & (l \mid n) \\ (\zeta_n - 1)^{1-\sigma_l^{-1}} & (l \nmid n) \end{cases}.$

$\Rightarrow$ (予想的) 一般化: "Stark 単数", "Gross–Stark 単数".

Stark 単数, Gross–Stark 単数 (rank 1 abelian の場合)

類体論 ∼ Hecke の L 関数, 部分ゼータ関数

F: 代数体, K/F: 有限次アーベル拡大, $S \supset \mathrm{ram}(K/F) \cup \mathrm{arch}(F)$

- Artin (相互) 写像: $\mathrm{Art}\colon \{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_F \mid (\mathfrak{a}, S) = 1\} \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(K/F)$.
  eg. $\{a \in \mathbb{N} \mid (a, n) = 1\} \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$, $a \mapsto [\sigma_a\colon \zeta_n \mapsto \zeta_n^a]$.
- $\chi \in \widehat{\mathrm{Gal}(K/F)}$, $L_S(s, \chi) := \displaystyle\sum_{(\mathfrak{a},S)=1} \chi(\mathrm{Art}(\mathfrak{a})) N\mathfrak{a}^{-s}$.
  eg. $\chi\colon (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \to \mathbb{C}^\times$, $L(s, \chi) = \sum_{k=1}^\infty \chi(k) k^{-s}$.
- $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)$, $\zeta_S(s, \sigma) := \displaystyle\sum_{\mathrm{Art}(\mathfrak{a})=\sigma} N\mathfrak{a}^{-s} = \frac{\sum_\chi \chi(\mathfrak{a})^{-1} L_S(s,\chi)}{|\mathrm{Gal}(K/F)|}$.
  eg. $\sigma = \sigma_a$, $S_n := \{l \mid n\infty\}$, $\zeta_{S_n}(s, \sigma_a) = \sum_{\mathbb{N} \ni k \equiv a \bmod n} k^{-s}$.
- $\mathrm{ord}_{s=0} L_S(s, \chi) = \begin{cases} |S| - 1 & (\chi = \mathbf{1}) \\ |\{v \in S \mid \chi(\mathrm{Gal}(K_w/F_v)) = \{1\}\}| & (\chi \neq \mathbf{1}) \end{cases}$.

F: 代数体, K/F: 有限次アーベル拡大, $S \supset \mathrm{ram} \cup \mathrm{arch}$, $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)$.
$\zeta_S(s,\sigma) := \sum_{\mathrm{Art}_S(\mathfrak{a})=\sigma} N\mathfrak{a}^{-s}$. (eg. $\zeta_{S_n}(s,\sigma_a) = \sum_{\mathbb{N}\ni k\equiv a \bmod n} k^{-s}$.)

Stark 予想 (実素点)

F: 総実, $K \overset{\exists}{\hookrightarrow} \mathbb{R}$, $|S| \geq 2$
$\Rightarrow$ "単数" $\exists\epsilon \in K^\times$ s.t. $\log\sigma(\epsilon) = -2\zeta_S'(0,\sigma)$, $F(\sqrt{\epsilon})/F$: アーベル拡大.

Gross–Stark 予想 (Dasgupta–Darmon–Pollack, Dasgupta–Kakde–Ventullo)

F: 総実, K: CM, $S \supset S_p$, $\mathfrak{P}/\mathfrak{p}$: K/F で完全分解 ($\mathfrak{p} \mid p$)

$\Rightarrow \exists\epsilon \in K$: $\mathfrak{p}$-単数, $\exists W \in \mathbb{N}$ s.t. $\begin{cases} \log|\sigma(\epsilon)|_{\mathfrak{P}} = -W\zeta_S'(0,\sigma), \\ \log_p N_{K_{\mathfrak{P}}/\mathbb{Q}_p}\sigma(\epsilon) = -W\zeta_{S,p}'(0,\sigma). \end{cases}$

- 各予想の仮定 $\Rightarrow \zeta_S(0,\sigma) = 0$, $\zeta_{S,p}(0,\sigma) = 0$.
- "$\epsilon \in K^\times$ s.t. $\log\sigma(\epsilon) = -2\zeta_S'(0,\sigma)$"

$\Leftrightarrow$ 相互法則: $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, $\tau(\exp(-2\zeta_S'(0,\sigma))) = \exp(-2\zeta_S'(0,\tau|_K\sigma))$.

- ノルム関係式は "自動的" ($\because L_S(s,\chi) = \prod_{(\mathfrak{p},S)=1}(1-\chi(\mathfrak{p})N\mathfrak{p}^{-s})^{-1}$).

Stark 予想

F: 総実, $K \overset{\exists}{\hookrightarrow} \mathbb{R}$, $|S| \geq 2 \Rightarrow \exists \epsilon \in K^\times$ s.t. $\log \sigma(\epsilon) = -2\zeta_S'(0, \sigma)$, $\ldots$.

$F = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Q}(\zeta_n)^+ = \mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1}) \hookrightarrow \mathbb{R}$

- $$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times & \cong & \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times/\{\pm 1\} & \cong & \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)^+/\mathbb{Q}) \\ \Cup & & \Cup \\ \pm a & \mapsto & \sigma_{\pm a} \end{array}$$
- $\zeta_{S_n}(s, \sigma_{\pm a}) = \sum_{\mathbb{N} \ni k \equiv a \bmod n} k^{-s} + \sum_{\mathbb{N} \ni k \equiv -a \bmod n} k^{-s}$.
- $\frac{d}{ds}[\sum_{\mathbb{N} \ni k \equiv a \bmod n} k^{-s}]_{s=0} = \log\left(\Gamma(\frac{a}{n})(2\pi)^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{n-2a}{2n}}\right)$. (Lerch の公式)
- $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$. (Euler の反射公式)

$\Rightarrow$ $\exp(-2\zeta_{S_n}'(0, \sigma_{\pm a})) = (2\sin(\frac{a\pi}{n}))^2 = (\zeta_n^a - 1)(\zeta_n^{-a} - 1)$.

"代数性" の証明 ($\zeta_n^n = \exp(\frac{2\pi i}{n})^n = \exp(2\pi i) = 1$) の一般化？？？

Gross–Stark 予想

F: 総実, K: CM, $S \supset S_p$, $\mathfrak{P}/\mathfrak{p}$: K/F で完全分解 ($\mathfrak{p} \mid p$)

$\Rightarrow \exists \epsilon \in K$: $\mathfrak{p}$-単数, $\exists W \in \mathbb{N}$ s.t. $\begin{cases} \log|\sigma(\epsilon)|_{\mathfrak{P}} = -W\zeta_S'(0,\sigma), \\ \log_p N_{K_{\mathfrak{P}}/\mathbb{Q}_p}\sigma(\epsilon) \overset{(\star)}{=} -W\zeta_{S,p}'(0,\sigma). \end{cases}$

$F = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Q}(\zeta_{p-1})$, $S := \{l \mid p(p-1)\infty\}$

- p は $\mathbb{Q}(\zeta_{p-1})$ で完全分解. ($\because \overline{p} = \overline{1} \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^\times = \mathrm{Gal}(K/F)$)
- $\zeta_S'(0,\sigma_a) = (\frac{1}{2} - \frac{a}{p-1})\log p$.
- $\zeta_{S,p}'(0,\sigma_a) = \log_p \Gamma_p(\frac{a}{p-1})$. (Ferrero–Greenberg の公式)

$\Rightarrow$ $g(\omega^{-b}) := \sum_a \omega^{-b}(a)\zeta_p^a$, $\epsilon := g(\omega^{-1})^{p-1}/p^{\frac{p-1}{2}}$, $W = p-1$.
$\omega\colon (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{Z}_p^\times$, $\omega(a) \equiv a \mod p$. (Teichmüller 指標)

($\star$): "Gross–Koblitz の公式 $g(\omega^{-b}) = -(-p)^{\frac{b}{p-1}}\Gamma_p(\frac{b}{p-1})$" の一般化？？？

※ DDP: Λ-進尖点形式 $\Rightarrow$ ガロア表現 $\rho \Rightarrow \kappa := \rho_{1,2}' \in H^1(G_F, T)$ s.t.
$-\zeta_{S,p}'(0,\sigma) \fallingdotseq \kappa|_{G_{F_\mathfrak{p}}} \in H^1(G_{F_\mathfrak{p}}, T)^{\mathrm{cyc}} \fallingdotseq \langle \log_p N(\sigma(\epsilon))\rangle \subset H^1(G_{F_\mathfrak{p}}, T)$.

CM 周期

$$\oint \frac{dx}{x} = 2\pi i.\ ※\ G_{\mathrm{m}}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times \supset \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\}.$$

- $E\colon y^2 = x^3 - 1$, $\int_1^\infty \frac{dx}{y} = 2^{\frac{-4}{3}}\pi^{-1}\Gamma(\frac{1}{3})^3$, $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(E) = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.
- $E\colon y^2 = x^3 - x$, $\int_{-1}^0 \frac{dx}{y} = 2^{\frac{-3}{2}}\pi^{\frac{-1}{2}}\Gamma(\frac{1}{4})^2$, $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(E) = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$.
- $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(E) = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, $\gamma \subset E(\mathbb{C})$: 閉路 $\Rightarrow \int_\gamma \frac{dx}{y} \doteqdot \pi^{\frac{1}{2}} \prod_a \Gamma(\frac{a}{d})^{\frac{w\chi(a)}{4h}}$.
  ($\because$ Chowla–Selberg の公式)
- $\langle \zeta_n \rangle \curvearrowright F_n\colon x^n + y^n = 1$, γ: 閉路 $\Rightarrow \int_\gamma x^{r-1}y^{s-n}dx \doteqdot \frac{\Gamma(\frac{r}{n})\Gamma(\frac{s}{n})}{\Gamma(\frac{r+s}{n})}$.
  (Rohrlich の公式)

※ 一般の CM 体 K に対し, CM アーベル多様体の具体形は分からない

志村の周期記号: $p_K(\sigma,\tau) \in \mathbb{C}^\times/\overline{\mathbb{Q}}^\times$ ($\sigma,\tau\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}$) s.t.

$$\langle K \text{ の CM 周期全体} \rangle = \langle p_K(\sigma,\tau) \mid \sigma,\tau \rangle.$$

eg. $p_{\mathbb{Q}(\sqrt{-d})}(\mathrm{id},\mathrm{id}) := \pi^{-1}\int_\gamma \frac{dx}{y} \bmod \overline{\mathbb{Q}}^\times$ ($\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(E) = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$).

吉田予想 (絶対 CM 周期予想)

志村の周期記号: $p_K(\sigma,\tau) \in \mathbb{C}^\times/\overline{\mathbb{Q}}^\times$.
eg. $p_{\mathbb{Q}(\sqrt{-d})}(\mathrm{id},\mathrm{id}) := \pi^{-1}\int_\gamma \frac{dx}{y} \bmod \overline{\mathbb{Q}}^\times$ $(\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(E) = \mathbb{Q}(\sqrt{-d}))$.

Conjecture (吉田予想 (改))

F: 総実, $C_\mathfrak{f}$: 狭義イデアル類群 $\mathrm{mod}\,\mathfrak{f}\infty$, $\mathrm{Art}\colon C_\mathfrak{f} \cong \mathrm{Gal}(H_\mathfrak{f}/F)$.
$c \in C_\mathfrak{f}$, $X(c) :\fallingdotseq \frac{d}{ds}[\sum_{\{z\in\mathfrak{a}^{-1}|z\mathfrak{a}\in c\}/\mathcal{O}_F^\times} z^{-s}]_{s=0}$. (新谷領域, 多重 Γ 関数)

$$\exp(X(c)) \equiv \pi^{\zeta(0,c)} p_{H_\mathfrak{f},CM}\left(\mathrm{Art}(c), \sum_{c'\in C_\mathfrak{f}} \frac{\zeta(0,c')}{[H_\mathfrak{f}:H_{\mathfrak{f},CM}]}\mathrm{Art}(c')\right) \bmod \overline{\mathbb{Q}}^\times.$$

- $\frac{d}{ds}[\sum_{\mathbb{N}\ni k\equiv a \bmod n} k^{-s}]_{s=0} = \log(\Gamma(\frac{a}{n})(2\pi)^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{n-2a}{2n}})$. (Lerch の公式)
- $p_{\mathbb{Q}(\sqrt{-d})}(\mathrm{id},\mathrm{id}) \equiv \pi^{\frac{1}{2}} \prod_a \Gamma(\frac{a}{d})^{\frac{w\chi(a)}{4h}}$. (Chowla–Selberg の公式).

の一般化.

Stark 予想 vs 吉田予想

Conjecture (Stark 予想)

F: 総実, $K \hookrightarrow \mathbb{R}$, $|S| \geq 2 \Rightarrow \exists \epsilon \in K^\times$ s.t. $\log \sigma(\epsilon) = -2\zeta_S'(0,\sigma), \ldots$.

Conjecture (吉田予想 (改))

$$\exp(X(c)) \equiv \pi^{\zeta(0,c)} p_{H_{\mathfrak{f}},CM}\left(\mathrm{Art}(c), \sum_{c' \in C_{\mathfrak{f}}} \tfrac{\zeta(0,c')}{[H_{\mathfrak{f}}:H_{\mathfrak{f},CM}]} \mathrm{Art}(c')\right) \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times.$$

Theorem

吉田予想 (改) $\Rightarrow$ Stark 予想の仮定下で $\exp(\zeta_S'(0,\sigma)) \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Proof.

- $\prod_{\mathrm{Art}(c)=\sigma} \prod_{\iota:\, F \hookrightarrow \mathbb{R}} \exp(X(\iota(c)) = \exp(\zeta_{\{v|\mathfrak{f}\infty\}}'(0,\sigma))$. (新谷–吉田)
- CM 周期の単項関係式. □

実は $X(c) :\fallingdotseq \frac{d}{ds}[\sum_{\{z \in \mathfrak{a}^{-1} | z\mathfrak{a} \in c\}/\mathcal{O}_F^\times} z^{-s}]_{s=0}$ の定義 (新谷公式の分解) が難.

p 進周期環と絶対 Frobenius 作用

- 周期積分 $\int_\gamma \omega \in \mathbb{C}$ の p 進類似: $\int_{\gamma,p} \omega \in B_{\mathrm{dR}}$ (Fontaine の p 進周期環)

$$\begin{array}{ccc} H^1_{\mathrm{sing}}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C} & \overset{\text{de Rham の同型}}{\cong} & H^1_{\mathrm{dR}}(X/F) \otimes_F \mathbb{C} \\ \gamma^* \otimes \int_\gamma \omega & \leftrightarrow & \omega \otimes 1. \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} H^1_{\mathrm{sing}}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) \otimes B_{\mathrm{dR}} & \overset{p\text{ 進 Hodge}}{\cong} & H^1_{\mathrm{dR}}(X/F) \otimes_F B_{\mathrm{dR}} \\ \gamma^* \otimes \int_{\gamma,p} \omega & \leftrightarrow & \omega \otimes 1. \end{array}$$

$\Rightarrow$ $[p_K(\sigma,\tau) : p_{K,p}(\sigma,\tau)] \in (\mathbb{C}^\times/\mu_\infty \times B_{\mathrm{dR}}^\times/\mu_\infty)/\overline{\mathbb{Q}}^\times$.

- CM (虚数乗法) $\Rightarrow$ 潜在的良還元 $\Rightarrow$ $\int_{\gamma,p} \omega \in B_{\mathrm{cris}}\overline{\mathbb{Q}} \subset B_{\mathrm{dR}}$
- $\tau \in W_{\mathrm{cris}} := \{\tau \in G_{F_{\mathfrak{p}}} \mid \tau|_{F_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ur}}} \in \mathrm{Fr}^{\mathbb{Z}}\}$, $\Phi_\tau := \mathrm{Fr}^{\deg \tau} \otimes \tau \curvearrowright B_{\mathrm{cris}}\overline{\mathbb{Q}}$.

Remark

難所は "代数的 Hecke 指標に付随する rank 1 のモチーフ" の理論で回避. (Blasius, Schappacher)

“不変量” の構成

- $X(c) :\fallingdotseq \frac{d}{ds}[\sum_{\{z\in\mathfrak{a}^{-1} \mid z\mathfrak{a}\in c\}/\mathcal{O}_F^\times} z^{-s}]_{s=0}$.
- $X_p(c) :\fallingdotseq \frac{d}{ds}[\sum_{\{z\in\mathfrak{a}^{-1} \mid z\mathfrak{a}\in c\}/\mathcal{O}_F^\times} z^{-s}$ の p 進補間関数$]_{s=0}$.
  ただし F の p 進位相と対応する素イデアル $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}$ のとき.

Definition (吉田予想 (改) の仮定下)

F: 総実, $c \in C_\mathfrak{f}$ に対し $\Gamma(c) \in (B_{\mathrm{cris}}\overline{\mathbb{Q}})^{\mathbb{Q}}/\mu_\infty$ を

$$\Gamma(c) := \frac{\exp(X(c))}{\pi^{\zeta(0,c)} p_{H_\mathfrak{f},CM}(\mathrm{Art}(c), \sum_{c'\in C_\mathfrak{f}} \frac{\zeta(0,c')}{[H_\mathfrak{f}:H_{\mathfrak{f},CM}]}\mathrm{Art}(c'))} \times \frac{\pi_p^{\zeta(0,c)} p_{H_{\mathfrak{f},CM},p}(\mathrm{Art}(c), \sum_{c'\in C_\mathfrak{f}} \frac{\zeta(0,c')}{[H_\mathfrak{f}:H_{\mathfrak{f},CM}]}\mathrm{Art}(c'))}{\exp_p(X_p(c))}.$$

で定める. ただし $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}$ のとき $\exp_p(X_p(c)) := 1$ とみなす.

※ $[p_K(\sigma,\tau) : p_{K,p}(\sigma,\tau)]$, $[\exp(X(c)) : \exp_p(X_p(c))]$ が well-def $\bmod \mu_\infty$.

"不変量" の心

- $X(c) :≒ \frac{d}{ds}[\sum_{\{z\in\mathfrak{a}^{-1}|z\mathfrak{a}\in c\}/\mathcal{O}_F^\times} z^{-s}]_{s=0}$.
- $X_p(c) :≒ \frac{d}{ds}[\sum_{\{z\in\mathfrak{a}^{-1}|z\mathfrak{a}\in c\}/\mathcal{O}_F^\times} z^{-s}$ の p 進補間関数$]_{s=0}$.
- $\Gamma(c) := \frac{\exp(X(c))}{\text{“CM 周期”}} \cdot \frac{\text{“}p\text{ 進周期''}}{\exp_p(X_p(c))} \in (B_{\mathrm{cris}}\overline{\mathbb{Q}})^{\mathbb{Q}}/\mu_\infty$ $(\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f})$.

$$\prod_{\mathrm{Art}(c)=\sigma} \Gamma(c) \equiv \begin{cases} \exp(\zeta_S'(0,\sigma)) & \text{(S 予想の設定)} \\ 1/\exp_p(\zeta_{S,p}'(0,\sigma)) & \text{(G–S 予想の設定)} \end{cases} \mod \ker \log_p.$$

Proof.

- CM 周期の単項関係式 $\Rightarrow \prod_{\mathrm{Art}(c)=\sigma} p_*(\mathrm{Art}(c), \sum_{c'} \frac{\zeta(0,c')}{[H_{\mathfrak{f}}:H_{\mathfrak{f},CM}]}\mathrm{Art}(c'))$
  $= p_*(\sigma, \sum_{c'} \frac{\zeta_S(0,\mathrm{Art}(c'))}{[H_{\mathfrak{f}}:H_{\mathfrak{f},CM}]}\mathrm{Art}(c')) = 1$.
- $\prod_{\mathrm{Art}(c)=\sigma} \prod_{\iota:\ F\hookrightarrow\mathbb{R}} \exp(X(\iota(c))) = \exp(\zeta_S'(0,\sigma))$. (新谷–吉田)
- $\prod_{\mathrm{Art}(c)=\sigma} \prod_{\iota:\ F\hookrightarrow\mathbb{R}} \exp_p(X_p(\iota(c))) = \exp_p(\zeta_{S,p}'(0,\sigma))$. (修論)
- $\iota \neq \mathrm{id} \Rightarrow \exp(X(\iota(c))) = \exp_p(X_p(\iota(c)))$. $\square$

予想式

$$\Gamma(c) := \frac{\exp(X(c))}{\text{“CM 周期”}} \cdot \frac{\text{“}p\text{ 進周期”}}{\exp_p(X_p(c))\ (\mathfrak{p}|\mathfrak{f})\ \text{または}\ 1\ (\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{f})} \in (B_{\mathrm{cris}}\overline{\mathbb{Q}})^{\mathbb{Q}}/\mu_\infty.$$

Conjecture

1. $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}$ のとき, $c \in C_\mathfrak{f}$, $\tau \in W_{\mathrm{cris}}$ に対して

$$\Phi_\tau(\Gamma(c)) \equiv \Gamma(c_\tau c) \mod \mu_\infty.$$

ただし $c_\tau \in C_\mathfrak{f}$ s.t. $\mathrm{Art}\colon C_\mathfrak{f} \cong \mathrm{Gal}(H_\mathfrak{f}/F)$, $c_\tau \mapsto \tau|_{H_\mathfrak{f}}$.

2. $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}$ のとき, $c \in C_\mathfrak{f}$, $\tau \in W_{\mathrm{cris}}$, $\deg\tau = 1$ に対して

$$\Phi_\tau(\Gamma(c)) \equiv \frac{\pi_\mathfrak{p}^{\frac{\zeta_S(0,c)}{h}}}{\prod_{C_{\mathfrak{p}\mathfrak{f}} \ni \tilde{c} \overset{\mathrm{mod}\ \mathfrak{f}}{\mapsto} \overline{\mathfrak{p}}c \in C_\mathfrak{f}} \exp_p(X_p(\tilde{c}))} \Gamma(\overline{\mathfrak{p}}c) \mod \mu_\infty.$$

ただし $\pi_\mathfrak{p} \in F$ s.t. $\mathfrak{p}^h = (\pi_\mathfrak{p})$.

主結果

Conjecture

1. $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}$ のとき $\Phi_\tau(\Gamma(c)) \equiv \Gamma(c_\tau c) \mod \mu_\infty$.
2. $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}$ のとき $\Phi_\tau(\Gamma(c)) \equiv \dfrac{\pi_{\mathfrak{p}}^{\frac{\zeta_S(0,c)}{h}}}{\prod_{C_{\mathfrak{p}\mathfrak{f}} \ni \tilde{c} \overset{\text{mod } \mathfrak{f}}{\mapsto} \bar{\mathfrak{p}} c \in C_{\mathfrak{f}}} \exp_p(X_p(\tilde{c}))} \Gamma(\bar{\mathfrak{p}} c) \mod \mu_\infty$.

Theorem

1. Conjecture 1 $\Rightarrow \tau(\exp(\zeta_S'(0,\sigma))) \equiv \exp(\zeta_S(0, \tau|_K \sigma)) \mod \mu_\infty$.
2. Conjecture 2 $\Rightarrow$ Gross–Stark 予想.
3. $F = \mathbb{Q}$ なら Conjecture 成立.

Proof.

1. $\prod_{\mathrm{Art}(c)=\sigma} \Gamma(c) \equiv \exp(\zeta_S'(0,\sigma)) \mod \mu_\infty$.
2. $(\Phi_\tau)^{\text{“}\mathfrak{p}\text{ の } C_{\mathfrak{f}} \text{ での位数”}} = \mathfrak{p}$-単数倍. (虚数乗法論)
3. 次のスライド. □

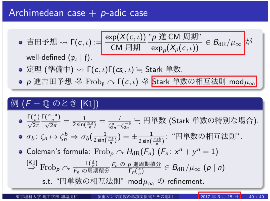
主結果からの展望

- Coleman の公式: $\Phi_\tau \curvearrowright F_n : x^n + y^n = 1$ を具体的に計算.
- Coleman の公式 ($p \mid n$, $p \nmid n$) $\Rightarrow$ Conjecture ①, ② ($F = \mathbb{Q}$).
  c.f. Coleman$\Rightarrow$ Gross–Koblitz $\Rightarrow$ Gross–Stark 予想 ($F = \mathbb{Q}$).

※ 一般の場合の “具体的な計算” はムリ (?).

- (別解)[3] Γ_p の関数等式 + CM 周期の単項関係式 + Φ_τ の p 進連続性
  $\Rightarrow$ Coleman の公式 ($p \nmid n$)

$\exp_p(X_p(c)) \fallingdotseq p$ 進多重 Γ 関数 (?) の関数等式 + CM 周期の単項関係式 + Φ_τ の p 進連続性 $\overset{?}{\rightsquigarrow}$ Coleman の公式の一般化 (?) $\overset{?}{\rightsquigarrow}$ Conjecture



Archimedean case + p-adic case

- 吉田予想 $\rightsquigarrow \Gamma(c,\iota) := \boxed{\dfrac{\exp(X(c,\iota))}{\text{CM 周期}} \dfrac{\text{“}p\text{ 進 CM 周期”}}{\exp_p(X_p(c,\iota))} \in B_{\mathrm{dR}}/\mu_\infty}$ が well-defined ($\mathfrak{p}_\iota \mid \mathfrak{f}$).
- 定理 (準備中) $\rightsquigarrow \Gamma(c,\iota)\Gamma(cs_\iota,\iota) \fallingdotseq$ Stark 単数.
- p 進吉田予想 $\overset{?}{\rightsquigarrow} \mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}} \curvearrowright \Gamma(c,\iota) \overset{?}{\rightsquigarrow}$ $\boxed{\text{Stark 単数の相互法則 mod}\mu_\infty}$.

例 ($F = \mathbb{Q}$ のとき [K1])

- $\dfrac{\Gamma(\frac{a}{n})}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{\Gamma(\frac{n-a}{n})}{\sqrt{2\pi}} = \dfrac{1}{2\sin(\frac{\pi a}{n})} = \dfrac{i}{\zeta_{2n}^a - \zeta_{2n}^{-a}} \fallingdotseq$ 円単数 (Stark 単数の特別な場合).
- $\sigma_b : \zeta_n \mapsto \zeta_n^b \Rightarrow \sigma_b(\frac{1}{2\sin(\frac{\pi a}{n})}) = \pm \frac{1}{2\sin(\frac{\pi ab}{n})}$: “円単数の相互法則”.
- Coleman's formula: $\mathrm{Frob}_p \curvearrowright H_{\mathrm{dR}}(F_n)$ ($F_n : x^n + y^n = 1$)
  $\overset{\text{[K1]}}{\Rightarrow} \mathrm{Frob}_p \curvearrowright \dfrac{\Gamma(\frac{a}{n})}{F_n \text{ の周期積分}} \dfrac{F_n \text{ の } p \text{ 進周期積分}}{\Gamma_p(\frac{a}{n})} \in B_{\mathrm{dR}}/\mu_\infty$ ($p \mid n$)
  s.t. “円単数の相互法則” modμ_∞ の refinement.

東京理科大学 理工学部 加塩朋和　多重ガンマ関数の単項関係式とその応用　2017 年 3 月 15 日　40 / 40

(参加初回時)

[3] K., Note on Coleman's formula for the absolute Frobenius on Fermat curves, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **74** (2024), no. 3, 1229–1250; MR4770342

予行練習中に思い付いたことのメモ

- (別解) の Γ_p は森田の p 進 Γ 関数

$$\Gamma_p(z) := \lim_{\mathbb{N}\ni n\mapsto z}(-1)^n \prod_{\substack{1\le k\le n-1\\ p\nmid k}} k$$

で "不完全な関数等式" を満たす.
- この "不完全な関数等式" は絶対 Frobenius 作用 (cf. $\Phi_\tau(\Gamma(c))/\Gamma(\overline{\mathfrak{p}}c)$) との相性が良かった.
- 一方で $\exp_p(X_p(c))$ ($\mathfrak{p}\mid\mathfrak{f}$) は "完全な関数等式" を満たす (ので困っていた).
- 一般化で対応するのは $\prod_{C_{\mathfrak{p}\mathfrak{f}}\ni\tilde{c}\overset{\mathrm{mod}\ \mathfrak{f}}{\mapsto}\overline{\mathfrak{p}}c\in C_{\mathfrak{f}}}\exp_p(X_p(\tilde{c}))$ の部分 (!) これを一まとめにして "関数等式" を考える必要がある.