On a common refinement of Stark units and Gross-Stark units.

Tomokazu Kashio*

早稲田大学整数論研究集会 (2019 年 3 月 13 日–15 日) において本稿と同タイトルのプレプリント (arXiv:1706.03198) の紹介させて頂きました. 本稿はその報告集原稿です.

概 要

実素点に関する Stark 予想は, 多重ガンマ関数の積で Stark 単数と呼ばれる代数的数を表す予想式を与える. この Stark 単数はある種の相互法則を満たすことも予想されている. 一方で吉田予想は, 多重ガンマ関数の別の積で CM 周期と呼ばれる幾何的不変量の超越数部分を表す予想式を与える. 筆者はこれまでに, Stark 予想の "代数性部分" と吉田予想を, 一つの予想式に統一できることを発見している. 今回はこの "Archimedean" な予想の下で, (p 進 Hodge 理論の) p 進周期環に値をとる不変量を構成し, Stark 予想の "相互法則" の部分と, Stark 予想の p 進類似 (Gross-Stark 予想) の両方を細分する予想を定式化する.

1 導入: フェルマー曲線と円単数 (とガウス和)

最初に, あまり知られていないと思われるが, 興味深い "別証明" を紹介したい: フェルマー曲線 $F_n\colon x^n + y^n = 1$ を使って, 以下の "代数性" を示すことができる.

$$\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-a}{n}\right) \in \pi\overline{\mathbb{Q}}^\times. \tag{1}$$

ただし, Euler の反射公式

$$\frac{\pi}{\Gamma(\frac{a}{n})\Gamma(1-\frac{a}{n})} = \sin\frac{a\pi}{n}$$

より直ちに従う事実であるので, その別証明ということになる. 更に Euler の反射公式はより多くの情報を含んでおり, この値は "円単数" に近いものであることも分かる.

"PROOF". F_n 上の第二種微分形式 $\eta_{r,s} := x^r y^{s-n}\frac{dx}{x}$ $(1 \le r,s < n,\ r+s \ne n)$ を考える. $F_n(\mathbb{C})$ 上の閉路 γ が $\int_\gamma \eta_{r,s} \ne 0$ を満たすとき, Rohrlich の公式 [Gr, Theorem in Appendix] により

$$\int_\gamma \eta_{r,s} \equiv \frac{\Gamma(\frac{r}{n})\Gamma(\frac{s}{n})}{\Gamma(\frac{r+s}{n})} \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times \tag{2}$$

*Tokyo University of Science, kashio_tomokazu@ma.noda.tus.ac.jp

が分かる. 右辺はベータ関数

$$B\left(\frac{r}{n},\frac{s}{n}\right) := \int_0^1 t^{\frac{r}{n}}(1-t)^{\frac{s}{n}}dt$$

と一致する. 一方でカップ積

$$\cup\colon H^1(F_n)\times H^1(F_n)\to H^2(F_n)\cong H^1(\mathbb{G}_m)\ \text{(Lefschetz motive)}$$

は環準同型であることより, 周期の単項関係式

$$\int_\gamma \eta_{r,s}\cdot\int_{\gamma'}\eta_{n-r,n-s} = \int_{\gamma\cup\gamma'}\eta_{r,s}\cup\eta_{n-r,n-s} \equiv \oint \frac{dx}{x} = 2\pi i \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times$$

を導くことができる. 合わせてベータ関数の積の "代数性"

$$B\left(\frac{r}{n},\frac{s}{n}\right)B\left(\frac{n-r}{n},\frac{n-s}{n}\right)\in\pi\overline{\mathbb{Q}}^\times \tag{3}$$

を得る. 更に Γ 関数の有理点での特殊値はベータ関数の有理点での特殊値で表せる: 例えば

$$B\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)^2\cdot B\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})^4}{\Gamma(\frac{4}{3})} = 3\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3.$$

このことにより (3) から (1) が従う (より詳細な議論は [Ka2] を参照). □

筆者はこの "PROOF" の一般化を目指し, 以下のような研究を行ってきた: 吉田氏は Rohrlich の公式 (2) の一般化にあたる予想 [Yo, Chap. III, Conjecture 3.9] を述べている. 一方で, Stark 予想の一部 (Conjecture 1) である "Stark 単数 $u(\sigma)$ の代数性" は, 代数性 (1) の一般化を与えている. これらに対し

吉田予想の自然な改良が, 総実体上の Stark 単数の代数性 ($u(\sigma)\in\overline{\mathbb{Q}}$) を含む

ことを示した ([Ka3, Proposition 5.6]).

Rohrlich の公式の p 進類似として, Coleman の公式 [Co, Theorems 1.7, 3.13] がある. これはフェルマー曲線上の絶対フロベニウス作用を p 進 Γ 関数で書き表したものであり, ガウス和を, 同じく p 進 Γ 関数で表す Gross-Koblitz 公式の別証明への応用が知られていた. 別の応用として, 筆者は Coleman の公式から "円単数の相互法則"

$$\sigma_b\left(\frac{\Gamma(\frac{a}{n})\Gamma(\frac{n-a}{n})}{\pi}\right)\equiv\frac{\Gamma(\frac{ab}{n})\Gamma(\frac{n-ab}{n})}{\pi} \mod \mu_\infty \tag{4}$$

を導けることを示した [Ka2, Corollary 7.6]. ここで μ_∞ は 1 のべき根全体のなす群であり, $\sigma_b\in\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ は $\sigma_b(\zeta_n)=\zeta_n^b$ ($\zeta_n := e^{\frac{2\pi i}{n}}$) を満たす任意の元とする. この相互法則 (4) も, やはり Euler の反射公式より直ちに従うが,

local な計算 (archimedean (Rohrlich の公式) + p-adic (Coleman の公式)) から
global なこと (円単数の "代数性 (1)" と "相互法則 (4)") が導かれる

という点が興味深い.

プレプリント [Ka5] において, これらの結果の一般化にあたる予想を定式化できたので, その概要を本稿で報告したい. §2 では, 円単数の一般化にあたる Stark 単数 $u(\sigma)$ と, Rohrlich の公式の一般化にあたる吉田予想 (Conjecture 2) を紹介する. §3 では, Coleman の公式の一般化にあたる予想式 (Conjecture 3) を紹介する. そして §4 では, Conjectures 2, 3 から "Stark 単数の相互法則"

$$\tau(u(\sigma)) \equiv u(\tau\sigma) \mod \mu_\infty$$

が導かれることを紹介する. なお, 同プレプリントにおいて, 同じ Conjectures 2, 3 から Gross-Koblitz 公式の一般化にあたる予想式 ([KY1, KY2]) が導かれることも示してあるが, 本稿では省略する.

2 Stark 予想と吉田予想

2.1 Stark 予想 (rank one abelian, 実素点の場合)

この小節では, 代数体の有限次アーベル拡大 K/k と $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)$ に付随する部分ゼータ関数

$$\zeta(s,\sigma) := \sum_{\left(\frac{K/k}{\mathfrak{a}}\right)=\sigma} N\mathfrak{a}^{-s}$$

を考える. ただし $\mathfrak{a}$ は k の整イデアルで, K/k の導手と互いに素であり, アルチン記号 $\left(\frac{K/k}{*}\right)$ での像が σ と一致するもの全体を動く.

Conjecture 1 (Stark 予想 [St] の一部)**.** k が総実体で, K が実素点 $\rho\colon K \hookrightarrow \mathbb{R}$ を持つとき

$$u(\sigma) := \exp(-2\zeta'(0,\sigma)) \in K \quad (\text{正確には} \in \rho(K) \subset \mathbb{R})$$

であり, さらに "相互法則"

$$\tau(u(\sigma)) = u(\tau\sigma) \quad (\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(K/k))$$

を満たす (ただし $K/k = \mathbb{Q}/\mathbb{Q}$ は例外). この $u(\sigma)$ を **Stark 単数** と呼ぶ.

Remark 1. Conjecture 1 の主張

$$u(\sigma) \in K,\ \tau(u(\sigma)) = u(\tau\sigma) \quad (\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(K/k))$$

は

$$u(\sigma) \in \overline{\mathbb{Q}},\ \tau(u(\sigma)) = u(\tau|_K\sigma) \quad (\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k),\ \tau \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/k))$$

と同値である.

Example 1. $K/k = \mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})/\mathbb{Q}$ は予想の仮定を満たしている．このとき

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})/\mathbb{Q}) = \{\sigma_{\pm a} \mid \pm a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\}, \qquad \sigma_{\pm a}(\zeta_n + \zeta_n^{-1}) := \zeta_n^a + \zeta_n^{-a}$$

であり, 部分ゼータ関数は

$$\zeta(s, \sigma_{\pm a}) = \sum_{\mathbb{N} \ni k \equiv \pm a \bmod n} k^{-s}$$

というように Hurwitz ゼータ関数の和で書ける．よって Lerch の公式により

$$u(\sigma_{\pm a}) := \exp(-2\zeta'(0, \sigma_{\pm a})) = \left(\frac{2\pi}{\Gamma(\frac{a}{n})\Gamma(\frac{n-a}{n})}\right)^2$$

を得る．特に §1 の "PROOF" は, 基礎体が $\mathbb{Q}$ のときの Stark 単数の代数性

$$u(\sigma_{\pm a}) \in \overline{\mathbb{Q}}$$

の別証明となっている．

2.2 CM 周期 (F_n 上の積分 $\int_\gamma \eta_{r,s}$ の一般化)

この小節では, CM 体 K と, その複素埋め込み $\sigma, \tau \in \mathrm{Hom}(K, \mathbb{C})$ に対して定まる志村の周期記号 [Shim, Theorem 32.5]

$$p_K(\sigma, \tau) \in \mathbb{C}^\times/\overline{\mathbb{Q}}^\times$$

を考える．これは CM-type (K, Ξ) のアーベル多様体 $A/\overline{\mathbb{Q}}$ と, K-固有な正則微分形式 η_σ $(\sigma \in \Xi)$ に対して以下を満たす．

$$\pi \prod_{\tau \in \Xi} p_K(\sigma, \tau) \equiv \int_\gamma \eta_\sigma \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times.$$

ただし γ は $A(\mathbb{C})$ の閉路で $\int_\gamma \eta_\sigma \neq 0$ を満たすものを取る: 用語を簡単に説明すると

- K を CM 体とする．$\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義されたアーベル多様体 A が $K \cong \mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ を満たすとき, A は K の虚数乗法を持つ, という．

- アーベル多様体 $A/\overline{\mathbb{Q}}$ が K の虚数乗法を持つとき K の ($K = \mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ を通しての) 各種コホモロジー群への作用が得られる．とくに $H^1_{dR}(A, \mathbb{C})$ への作用の分解には K の 1 次元表現 (複素埋め込み) が全て一度ずつ現れ, $H^0(A, \Omega^1_A)$ にはその半分が現れる:

$$\begin{array}{ccccc} K & \curvearrowright & H^1_{dR}(A, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{[K:\mathbb{C}]} & = & \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{Hom}(K,\mathbb{C})} \sigma \\ & & \cup & & \cup \\ K & \curvearrowright & H^0(A, \Omega^1_A) \cong \mathbb{C}^{[K:\mathbb{C}]/2} & = & \bigoplus_{\sigma \in \Xi} \sigma. \end{array}$$

  この $\Xi = \Xi_A \subset \mathrm{Hom}(K, \mathbb{C})$ を A の CM-type と呼ぶ．

- 上の作用の分解で σ に含まれる (K が σ を通して作用する) 正則微分形式を $\eta_\sigma \in H^0(A, \Omega_A^1)$ で表す.

Example 2. §1 の微分形式 $\eta_{r,s} = x^r y^{s-n} \frac{dx}{x}$ は, $r+s<n$, $(rs(r+s), n) = 1$ のとき, (F_n のヤコビ多様体の既約成分上の) $\mathbb{Q}(\zeta_n)$-固有な正則微分形式となる. このとき

$$\int_\gamma \eta_{r,s} \equiv \pi \prod_{\tau \in \Xi_{r,s}} p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\mathrm{id}, \tau) \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times, \quad \Xi_{r,s} = \left\{ \sigma_b \mid {}_{\langle \frac{br}{n} \rangle + \langle \frac{bs}{n} \rangle + \langle \frac{b(n-r-s)}{n} \rangle = 1}^{1 \le b \le m,\ (b,n)=1} \right\}$$

となる ([Yo, Chap. III, §2], [Ka5, §6]). ただし $\sigma_b \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$ を $\sigma_b(\zeta_n) := \zeta_n^b$ で定める.

2.3 吉田予想

この小節では, §1 の "RROOF" の一般化に関する予想と結果を紹介する. k を総実体, K/k を有限次アーベル拡大とする. 新谷氏 [Shin] は, 以下のような形の明示公式 (新谷公式, Lerch の公式の一般化) を与えた: $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)$ に対し

$$\exp(\zeta'(0, \sigma)) = \text{Barnes の多重ガンマ関数の特殊値の有限積} \times \text{補正項}.$$

更に吉田氏 [Yo] は, 以下のような新谷公式の "適切な分解" を発見した. 簡単のため k の狭義類数 $h_{k,+}$ が 1 の場合を考える. 実素点 $\rho\colon k \hookrightarrow \mathbb{R}$ と, $k_+^\times / \mathcal{O}_{k,+}^\times$ (X_+ は X の総正部分を表す) の基本領域 D で新谷のコーン分解で得られるものに対し

$$\exp(X(\sigma, \rho)) := \exp\left(\frac{d}{ds} \left[\sum_{z \in D \cap \mathcal{O}_k,\ \left(\frac{K/k}{(z)}\right) = \sigma} \rho(z)^{-s} \right] \Bigg|_{s=0} \right) \times \text{補正項} \tag{5}$$

とおけば

$$\exp(\zeta'(0, \sigma)) = \prod_{\rho\colon k \hookrightarrow \mathbb{R}} \exp(X(\sigma, \rho))$$

を満たす [Yo, Chap. III, (3.11)]. $[\sum \cdots]$ の部分は Barnes の多重ゼータ関数の有限和で書くことができ, その結果 $\exp(\frac{d}{ds}[\sum \cdots]|_{s=0})$ は Barnes の多重ガンマ関数の有限積となる.

Remark 2. 厳密に言えば, [Yo] 等の各参考文献中での実際の定式化は, $\mathfrak{f}$ を法とする ray class group の元 $c \in C_\mathfrak{f}$ に付随する部分ゼータ関数 $\zeta(s, c) := \sum_{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_k,\ \mathfrak{a} \in c} N\mathfrak{a}^{-s}$ に対して行われている. この場合 ($h_{k,+} > 1$ なら), ある $z \in k_+$ に対し $(z)\mathfrak{a} \in c$ となるイデアル $\mathfrak{a}$ を用いて

$$\exp(X(c, \rho)) := \exp\left(\frac{d}{ds} \left[\sum_{z \in D \cap \mathfrak{a}^{-1},\ (z)\mathfrak{a} \in c} \rho(z)^{-s} \right] \Bigg|_{s=0} \right) \times \text{補正項}$$

の形になる. 本稿では記号の節約のため, 少し修正して定式化している.

定義 (5) は D (や Remark 2 の $\mathfrak{a}$) の取り方によるが, 単元倍を除いて, これらの取り方には寄らないことが示せる:

$$\exp(X(\sigma,\rho)) \in \mathbb{C}^\times/\rho(\mathcal{O}_k^\times)^{\mathbb{Q}}.$$

吉田氏はこの不変量 $\exp(X(\sigma,\rho))$ を用いて, 志村の周期記号の値を表す明示式を予想した. 以下はこの予想式を少し拡張したものである.

Conjecture 2 (吉田予想 [Yo, Chap. III, Conjecture 3.9] の拡張 [Ka3, Conjecture 5.5])**.** K/k を上記の通りとする. K の最大 CM 部分体を K_{CM} とおくとき

$$\exp(X(\sigma,\mathrm{id})) \equiv \pi^{\zeta(0,\sigma)} \prod_{\sigma'\in\mathrm{Gal}(K/k)} p_{K_{CM}}(\sigma|_{K_{CM}},\sigma'|_{K_{CM}})^{\frac{\zeta(0,\sigma')}{[K:K_{CM}]}} \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times.$$

K が CM 体を含まないときは ($\zeta(0,\sigma)=0$ なので), 右辺は 1 だと解釈する.

Theorem 1 ([Ka3, Proposition 5.6])**.** Conjecture 2 は, Conjecture 1 の代数性部分 ($u(\sigma)\in\overline{\mathbb{Q}}$) を含む.

証明は, §1 の "PROOF" と同様に行われる.

3　p 進周期

Coleman の公式は, $H^1_{dR}(F_n,\mathbb{Q}_p)$ 上の絶対フロベニウス作用の明示公式である. これは具体的な基底 $\{\eta_{r,s} \mid 1\le r,s<n,\ r+s\neq n\}$ に関する表現行列を直接計算したものである. 一般に, 虚数乗法を持つアーベル多様体に対して, 同様の基底は明示的には書けない. そこで筆者は

[CM 周期: p 進周期] の形の "比"

を導入することにより, 基底に寄らない定式化を行った. その結果, 吉田予想の p 進的類似であるにも関わらず (p 進でない) 多重ガンマ関数も定式化に必要になり, (p 進でない) Stark 予想も巻き込むことになる.

Remark 3. 筆者は最近 Coleman の公式の一部に対し, 直接計算をしない別証明を与えた ([Ka6]).

Fontaine の p 進周期環 B_{dR} に値をとる "p 進積分" $\int_{p,\gamma}\eta\in B_{dR}$ が定義され (p 進 Hodge 理論, [Bl1, Bl2, Fa, Fo1, Fo2, Ts]), さらに "自然な分解" により, p 進周期記号

$$p_{p,K}(\sigma,\tau)\in B_{dR}^\times/\overline{\mathbb{Q}}^\times \quad \text{s.t.} \quad \pi_p\prod_{\tau\in\Xi} p_{p,K}(\sigma,\tau) \equiv \int_{p,\gamma}\eta_\sigma \mod \overline{\mathbb{Q}}^\times\ (\sigma\in\Xi)$$

を定義できる. さらに以下の性質を満たす.

Proposition 1 ([Ka5, §5.1])**.** (i) $p_K(\sigma,\tau), p_{p,K}(\sigma,\tau)$ のそれぞれの値は, アーベル多様体 A, 積分路 γ, 微分形式 η_σ などの取り方によるが, これらは "同変的" である:

$$[p_K(\sigma,\tau) : p_{p,K}(\sigma,\tau)] \in (\mathbb{C}^\times \times B_{dR}^\times)/(\mu_\infty \times \mu_\infty)\overline{\mathbb{Q}}^\times.$$

すなわち "比" は well-defined となる (μ_∞ は "分解操作" でべき根を取るときに起きる不確定性).

(ii) A は虚数乗法をもつので, 潜在的に良い還元をもつ. よって Weil 群 $W \subset \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ に付随する絶対フロベニウス作用

$$\int_{p,\gamma} \eta \in B_{cris}\overline{\mathbb{Q}}_p \curvearrowleft \Phi^{\deg \tau} \otimes \tau =: \Phi_\tau \quad (\tau \in W)$$

が考えられる. ただし Φ は p 進周期環 B_{cris} 上の絶対フロベニウスとする.

以下では再び k を総実体, K/k を有限次アーベル拡大とする. 埋め込み $k \subset K \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}, \mathbb{C}_p$ を固定し, k, K の p 進位相に対応する素イデアルをそれぞれ $\mathfrak{p}, \mathfrak{P}$ とおき, K/k の導手を $\mathrm{cond}_{K/k}$ で表す. 以下では簡単のため

$$\mathfrak{p} \mid \mathrm{cond}_{K/k}$$

を仮定する.

Definition 1 ([Ka5, Definition 5])**.** Conjecture 2 が成立するという仮定の元,

$$\Gamma(\sigma) := \frac{\exp(X(\sigma,\mathrm{id}))}{\pi^{\zeta(0,\sigma)} \prod_{\sigma' \in \mathrm{Gal}(K/k)} p_{K_{CM}}(\sigma|_{K_{CM}},\sigma')^{\frac{\zeta(0,\sigma')}{[K:K_{CM}]}}} \frac{\pi_p^{\zeta(0,\sigma)} \prod_{\sigma' \in \mathrm{Gal}(K/k)} p_{p,K_{CM}}(\sigma|_{K_{CM}},\sigma')^{\frac{\zeta(0,\sigma')}{[K:K_{CM}]}}}{\exp_p(X_p(\sigma,\mathrm{id}))}$$
$$\in (B_{cris}\overline{\mathbb{Q}}_p)^{\mathbb{Q}}/\mu_\infty$$

とおく. ただし $\pi_p \in B_{cris}$, $\exp_p(X_p(\sigma,\mathrm{id})) \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ は, それぞれ π, $\exp(X(\sigma,\mathrm{id}))$ の p 進類似である.

Remark 4. (i) 吉田氏の定義は

$$X(\sigma,\mathrm{id}) = \sum_{z,\mathbf{v}} \log\Gamma(z,\mathbf{v}) + \sum_{a,b} a\log b$$

の形 ($z, a, b \in k$, $\mathbf{v}$ は k 係数のベクトル). ただし

$$\log\Gamma(z,\mathbf{v}) := \frac{d}{ds}\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^r} (z+\mathbf{m}\cdot\mathbf{v})^{-s}|_{s=0} \quad (z \in \mathbb{R}_{>0},\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}_{>0}^r)$$

は Barnes の多重ガンマ関数の対数 (の補正項部分を除いたもの) である. 同じ $z, \mathbf{v}, a, b$ 達を用いて

$$X_p(\sigma, \mathrm{id}) := \sum_{z,\mathbf{v}} \log_p \Gamma_p(z, \mathbf{v}) + \sum_{a,b} a \log_p b$$

と定める. ただし

$$\log_p \Gamma_p(z, \mathbf{v}) := \frac{d}{ds} \left[\sum_{\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^r_{\geq 0}} (z + \mathbf{m} \cdot \mathbf{v})^{-s} \right]_{p\text{ 進補間}} \Bigg|_{s=0}$$

は Barnes の多重ガンマ関数 (の対数) の p 進類似 ([Ka1]) である. この p 進補間に仮定: $\mathfrak{p} \mid \mathrm{cond}_{K/k}$ が必要となる.

(ii) $\exp(X(\sigma, \mathrm{id})), \exp_p(X_p(\sigma, \mathrm{id}))$ のそれぞれの値は $D, \mathfrak{a}$ の取り方によるが, これらもやはり "同変的" で, 以下の "比" が well-defined となる ([Ka5, §2.3]).

$$[\exp(X(\sigma, \mathrm{id})) : \exp_p(X_p(\sigma, \mathrm{id}))] \in (\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}_p^\times)/(\mu_\infty \times \mu_\infty)\overline{\mathbb{Q}}^\times.$$

(iii) Conjecture 2 より $\frac{\exp(X(\sigma,\mathrm{id}))}{\pi^{\zeta(0,\sigma)} \prod_{\sigma'} p_{K_{CM}}(\sigma|_{K_{CM}}, \sigma')^{\frac{\zeta(0,\sigma')}{[K:K_{CM}]}}} \in \overline{\mathbb{Q}} \subset B_{cris}\overline{\mathbb{Q}}_p$ となる. 更に Proposition 1-(i) と, この Remark の (ii) より, $\Gamma(\sigma)$ 全体として $\mathrm{mod}\mu_\infty$ で well-defined になる.

Conjecture 3 ([Ka5, Conjecture 4])**.** k を総実体, K/k を有限次アーベル拡大とし, $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)$, $\tau \in W \cap \mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}})$ をとる.

(i) $\mathfrak{p} \mid \mathrm{cond}_{K/k}$ なら

$$\Phi_\tau(\Gamma(\sigma)) \equiv \Gamma(\tau\sigma) \mod \mu_\infty.$$

ただし右辺では $\tau \in \mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}) \subset \mathrm{Gal}(K/k)$ とみなす.

(ii) $\mathfrak{p} \nmid \mathrm{cond}_{K/k}$ の時は少し複雑: 定式化の概要は

$$\Gamma(\sigma) := \frac{\exp(X(\sigma, \mathrm{id}))\pi_p^{\zeta(0,\sigma)} \prod_{\sigma' \in \mathrm{Gal}(K/k)} p_{p,K_{CM}}(\sigma|_{K_{CM}}, \sigma')^{\frac{\zeta(0,\sigma')}{[K:K_{CM}]}}}{\pi^{\zeta(0,\sigma)} \prod_{\sigma' \in \mathrm{Gal}(K/k)} p_{K_{CM}}(\sigma|_{K_{CM}}, \sigma')^{\frac{\zeta(0,\sigma')}{[K:K_{CM}]}}}$$

に対して

$$\Phi_\tau(\Gamma(\sigma)) \equiv \Gamma\left(\left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}}\right)\sigma\right) \cdot \frac{\text{補正項}}{\prod_{\substack{\tilde{\sigma} \in \mathrm{Gal}(\tilde{K}/k) \\ \tilde{\sigma}|_K = \left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}}\right)\sigma}} \exp_p(X_p(\tilde{\sigma}, \mathrm{id}))}$$

という形になる. ただし $\deg \tau = 1$ とし, $\tilde{K} \supset K$ を $\mathfrak{p} \mid \mathrm{cond}_{\tilde{K}/k}$ を満たすように取る.

4　主結果

Theorem 2 ([Ka5, Theorems 1, 2, 3, 4]). $p \neq 2$ とする.

(i) $k = \mathbb{Q}$ の場合 Conjectures 2, 3 は, それぞれ Rohrlich の公式, Coleman の公式より成立する.

(ii) $k \neq \mathbb{Q}$ でも, K が $\mathbb{Q}$ 上アーベルで, かつ

- p が $k/\mathbb{Q}$ で惰性, または
- $\mathfrak{p}$ が K/k で分岐

の場合に成立する.

(iii) Conjectures 2, 3 は, “Stark 単数の相互法則”

$$u(\sigma) \in \overline{\mathbb{Q}}, \quad \tau(u(\sigma)) \equiv u(\tau\sigma) \bmod \mu_\infty \quad (\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k),\ \tau \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/k))$$

を含む.

(iv) Conjecture 2 を少し強めた仮定 ([Ka5, (35)]) と, Conjecture 3-(ii) は, Gross-Koblitz 公式の一般化 [KY1, Conjecture A'] (= Gross-Stark 予想の精密化) も含む.

証明の概略. (i) はほぼ自明 (そうなるように定式化を行った).

(ii) は基礎体が $\mathbb{Q}$ の場合 (すなわち (i)) に帰着して示す. その際, 基礎体が $\mathbb{Q}, k$ の場合の $\exp(X(\sigma, \mathrm{id})), \exp_p(X_p(\sigma, \mathrm{id}))$ 達を結びつける必要がある. ここに L 関数間の関数等式

$$L(s, \psi) = \prod_{\substack{\chi \in \widehat{\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})} \\ \chi|_{\mathrm{Gal}(K/k)} = \psi}} L(s, \chi) \ (\psi \in \widehat{\mathrm{Gal}(K/k)}) \tag{6}$$

とその p 進補間, 及び, 新谷公式とその p 進類似 ([Ka1]) を用いる. $p, \mathfrak{p}$ に関する条件は, 関数等式 (6) を p 進補間する際, 補正項によるズレの影響をなくすために必要となる.

(iii) 代数性は Theorem 1 より従う. 複素共役 c をとる. このとき §1 の “PROOF” のカップ積と同様の議論により, 積 $\Gamma(\sigma)\Gamma(c\sigma)$ の周期部分が消えることが示せる:

$$\Gamma(\sigma)\Gamma(c\sigma) \fallingdotseq \frac{\exp(X(\sigma, \mathrm{id}))\exp(X(c\sigma, \mathrm{id}))}{\exp_p(X_p(\sigma, \mathrm{id}))\exp_p(X_p(c\sigma, \mathrm{id}))}.$$

この右辺は, おおよそ Stark 単数と一致することを [Ka4] において示した:

$$\frac{\exp(X(\sigma, \mathrm{id}))\exp(X(c\sigma, \mathrm{id}))}{\exp_p(X_p(\sigma, \mathrm{id}))\exp_p(X_p(c\sigma, \mathrm{id}))} \fallingdotseq u(\sigma).$$

さらに Φ_τ は τ-semilinear ($\Phi_\tau|_{\overline{\mathbb{Q}}_p} = \tau$) なので, Conjecture 3 より

$$\tau(u(\sigma)) \fallingdotseq \Phi_\tau(\Gamma(\sigma)\Gamma(c\sigma)) \equiv \Gamma(\tau\sigma)\Gamma(c\tau\sigma) \fallingdotseq u(\tau\sigma)$$

を得る．これで $\mathfrak{p}$ の分解群に対して題意が導けた．さらに $\mathfrak{p}$ も動かすことで題意を得る．
(iv) (iii) の証明の複素共役をフロベニウスに置き換えて

$$\prod_{i=0}^{\left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}}\right) \text{の位数} - 1} \Gamma\left(\left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}}\right)^i \sigma\right)$$

に対して同様の議論を行う (ただし, 本稿ではきちんと定義していない, $\mathfrak{p} \nmid \mathrm{cond}_{K/k}$ の場合の $\Gamma(\sigma)$ を用いる). □

参考文献

[Bl1] D. Blasius, On the critical values of Hecke L-series, *Ann. of Math. (2)* **124** (1986), no. 1, 23–63.

[Bl2] D. Blasius, A p-adic property of Hodge classes on abelian varieties, *Motives (Seattle, WA, 1991)*, Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1994), 293–308.

[Co] R. Coleman, On the Frobenius matrices of Fermat curves, *p-adic analysis*, Lecture Notes in Math. **1454** (1990), Springer, Berlin, 173–193.

[Fa] G. Faltings, Crystalline cohomology and p-adic Galois representations, *Algebraic Analysis, Geometry, and Number Theory* (J. I. Igusa, ed.), Johns Hopkins Univ. Press (1990), 25–79.

[Fo1] J. M. Fontaine, Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneaux de Barsotti-Tate, *Ann. of Math.,* **115** (1982), 529–577.

[Fo2] J. M. Fontaine, Le corps des périodes p-adiques (avec un appendice par P. Colmez), Exposé II, *Astérisque* **223** (1994), 59–111.

[Gr] B. H. Gross, On the periods of abelian integrals and a formula of Chowla and Selberg (with an appendix by D. E. Rohrlich), *Inv. Math.* **45** (1978), 193–211.

[Ka1] T. Kashio, On a p-adic analogue of Shintani's formula, *J. Math. Kyoto Univ.* **45** (2005), 99–128.

[Ka2] T. Kashio, Fermat curves and a refinement of the reciprocity law on cyclotomic units, *J. Reine Angew. Math.*, **741** (2018), no. 3, 255–273.

[Ka3] T. Kashio, On the algebraicity of some products of special values of Barnes' multiple gamma function *Amer. J. Math.* **140** (2018), no. 3, 617–651.

[Ka4] T. Kashio, On the ratios of Barnes' multiple gamma functions to the p-adic analogues, *J. Number Theory* **199** (2019), 403–435.

[Ka5] T. Kashio, On a common refinement of Stark units and Gross-Stark units, preprint (arXiv:1706.03198).

[Ka6] T. Kashio, Note on Coleman's formula for the absolute Frobenius on Fermat curves, preprint (arXiv:1904.02879).

[KY1] T. Kashio, and H. Yoshida, On p-adic absolute CM-Periods, I, *Amer. J. Math.* **130** (2008), no. 6, 1629–1685.

[KY2] T. Kashio, and H. Yoshida, On p-adic absolute CM-Periods, II, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **45** (2009), no. 1, 187–225.

[Shim] G. Shimura, *Abelian varieties with complex multiplication and modular functions*, Princeton Math. Ser. **46**, Princeton University Press, 1998.

[Shin] Shintani, T., On values at $s = 1$ of certain L functions of totally real algebraic number fields, *Algebraic Number Theory, Proc. International Sympos., Kyoto, 1976*, Kinokuniya, Tokyo (1977), 201–212.

[St] H. M. Stark, L-functions at $s = 1$. IV. First derivatives at $s = 0$, *Adv. in Math.* **35** (1980), no. 3, 197–235.

[Ts] T. Tsuji, Semi-stable conjecture of Fontaine-Jannsen: A survey, *Astérisque* **279** (2002), 323–370.

[Yo] H. Yoshida, *Absolute CM-Periods*, Math. Surveys Monogr. **106**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2003).