

デカルト以外のよく使う座標系

講義ではデカルト座標以外を解説する時間が十分に取れないのでこのスライドに簡単にまとめておく。途中の計算は全て自分で確かめること。

もくじ

- (1) 2次元デカルト座標
- (2) 2次元極座標
- (3) 円柱座標
- (4) 3次元極座標

2次元デカルト座標

基底ベクトル（デカルト座標）

デカルト座標の基底ベクトルは場所によらず同じ値を取る（微分したら0）

2次元

$$e_x = (1, 0)$$

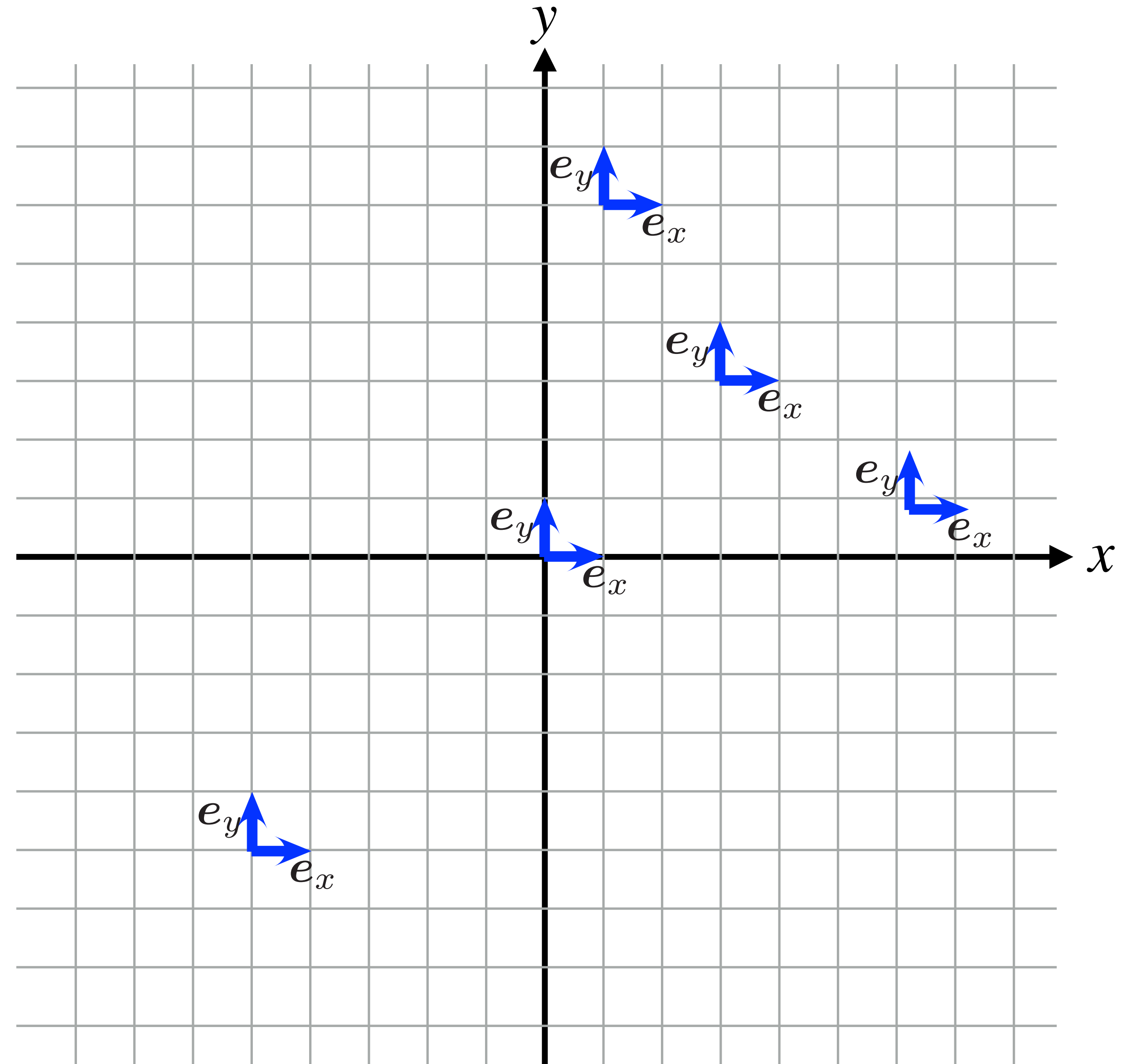
$$e_y = (0, 1)$$

3次元

$$e_x = (1, 0, 0)$$

$$e_y = (0, 1, 0)$$

$$e_z = (0, 0, 1)$$



基底ベクトルで展開

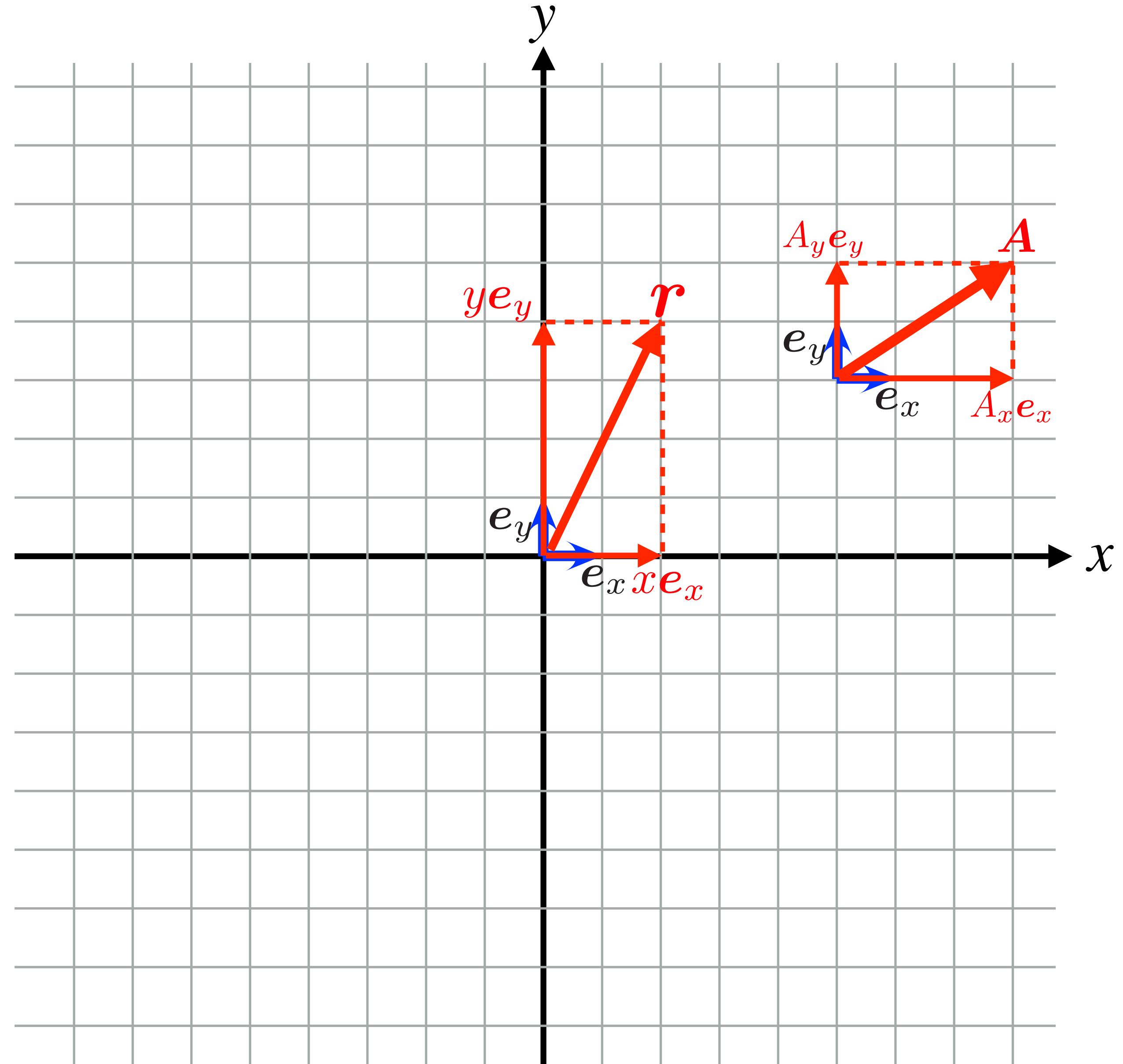
ベクトルは基底ベクトルを使って展開できる

位置ベクトル (2次元)

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y$$

ベクトル場 (2次元)

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y$$



2次元極座標

極座標

r と θ で座標を指定する

- ・ r は原点からの距離
- ・ θ は角度

(x 軸正のところでは $\theta = 0$, y 軸へ向かうと増加する)

デカルト座標との関係 (変換則)

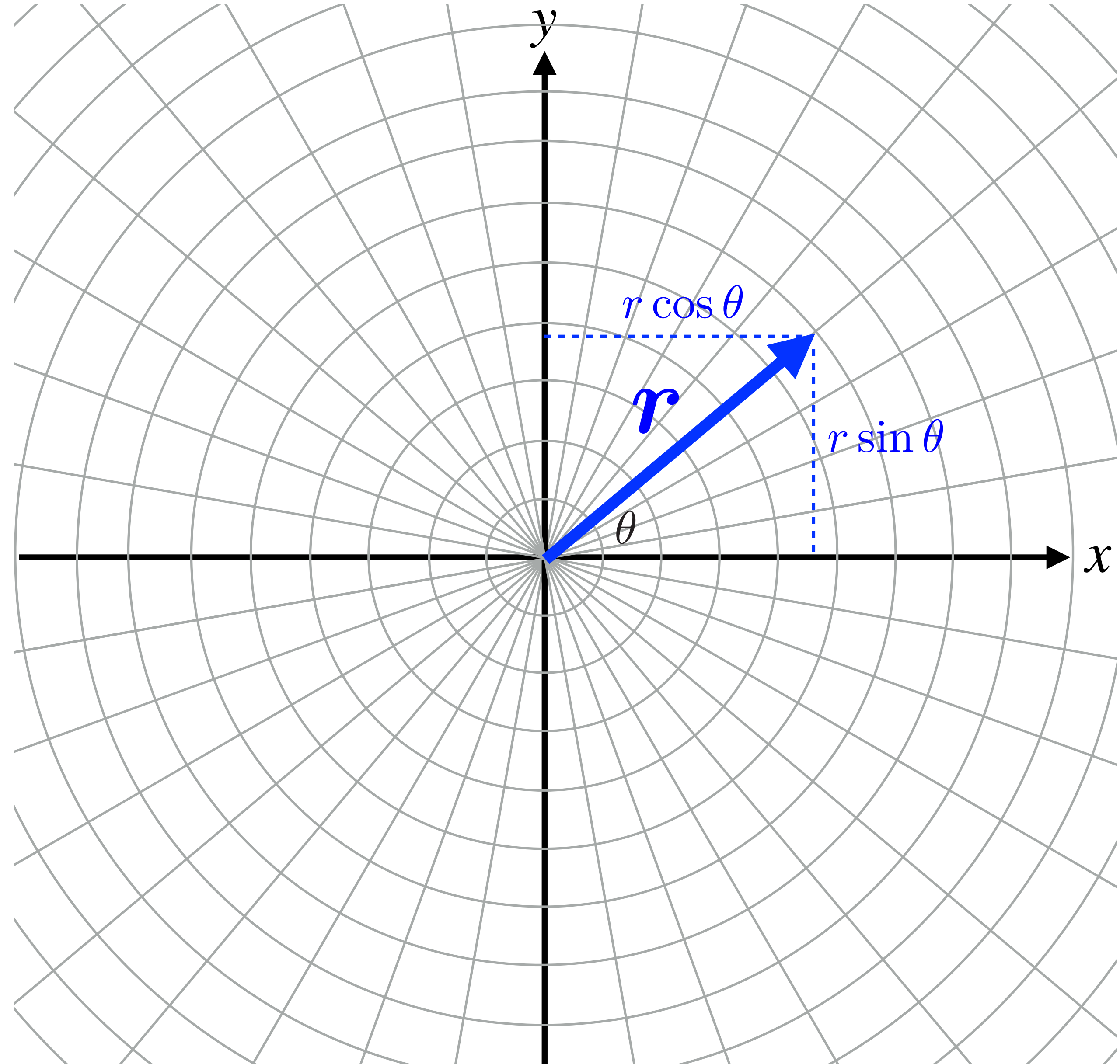
$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

(r と θ について解くと)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$



基底ベクトル（極座標）

極座標の基底ベクトルは場所による

- ・ 長さは1
- ・ 向きが θ による
 - ・ $\mathbf{e}_r$ は動径方向
 - ・ $\mathbf{e}_\theta$ は $\mathbf{e}_r$ を90度回転した方向
(半径一定の円の接線方向で θ が増える向き)
- ・ デカルト座標の基底ベクトルで展開すると

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y$$

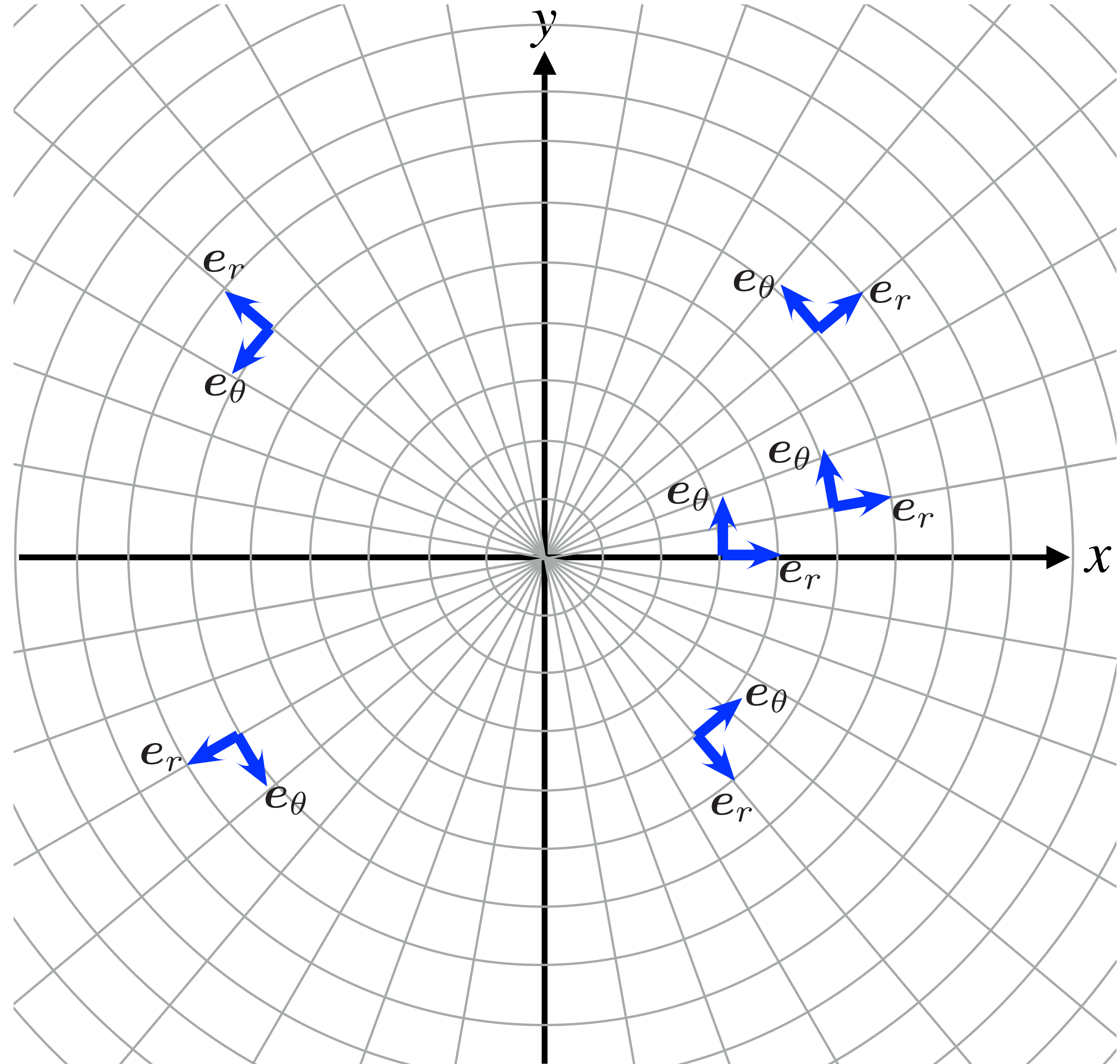
$$\mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y$$

内積は正規直交する

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = 1$$

$$\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta = 1$$

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta = 0$$



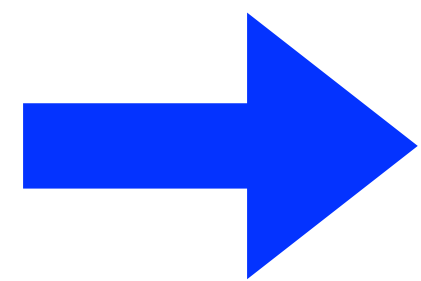
極座標の基底ベクトルは微分される

$$\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r = 0 \quad \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_\theta = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_r$$

証明はデカルト座標で表してから微分すればできる

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y$$



$$\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_\theta = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_r = \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y)$$

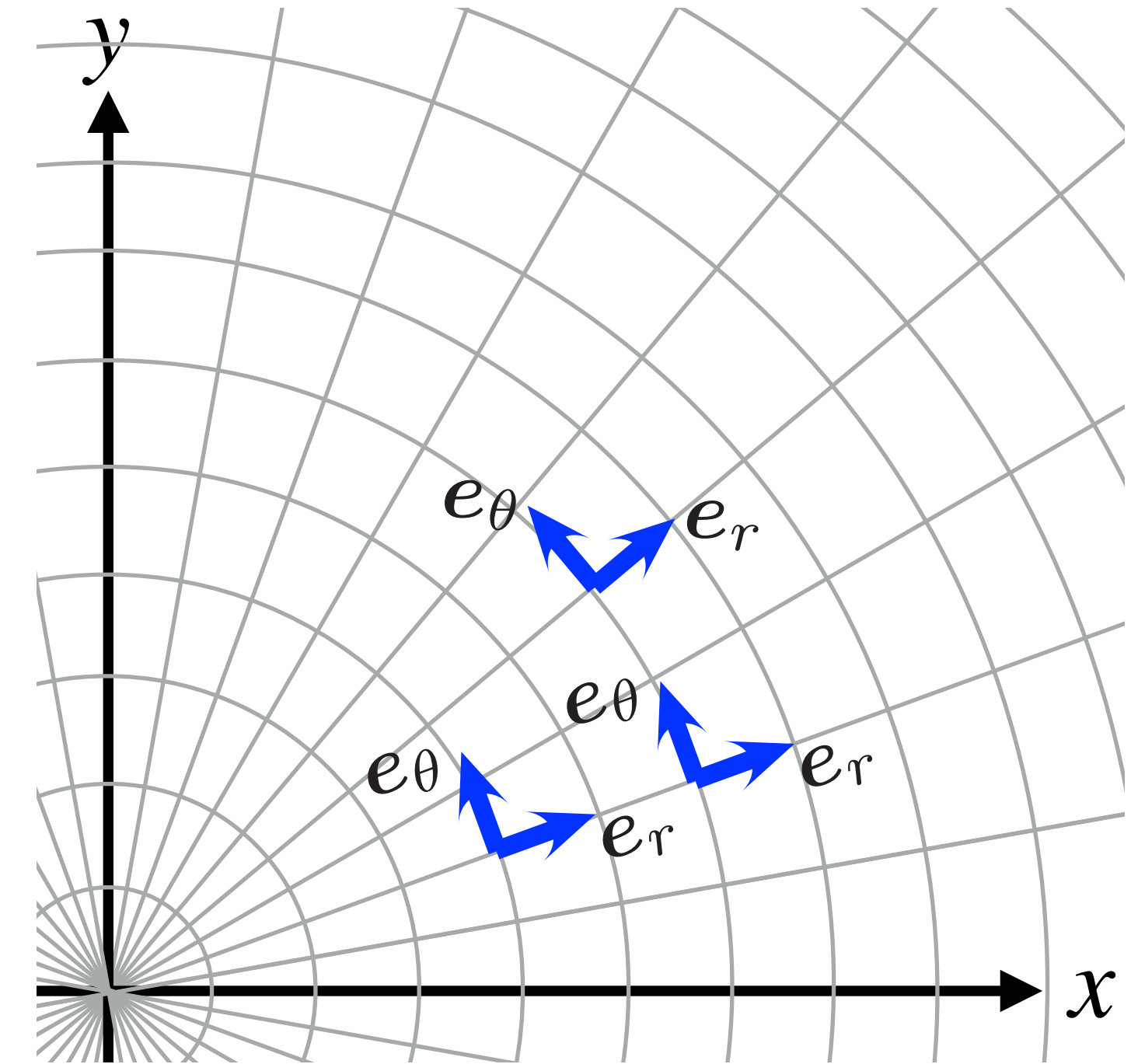
$$= -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y$$

$$= \mathbf{e}_\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} (-\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y)$$

$$= -\cos \theta \mathbf{e}_x - \sin \theta \mathbf{e}_y$$

$$= -\mathbf{e}_r$$

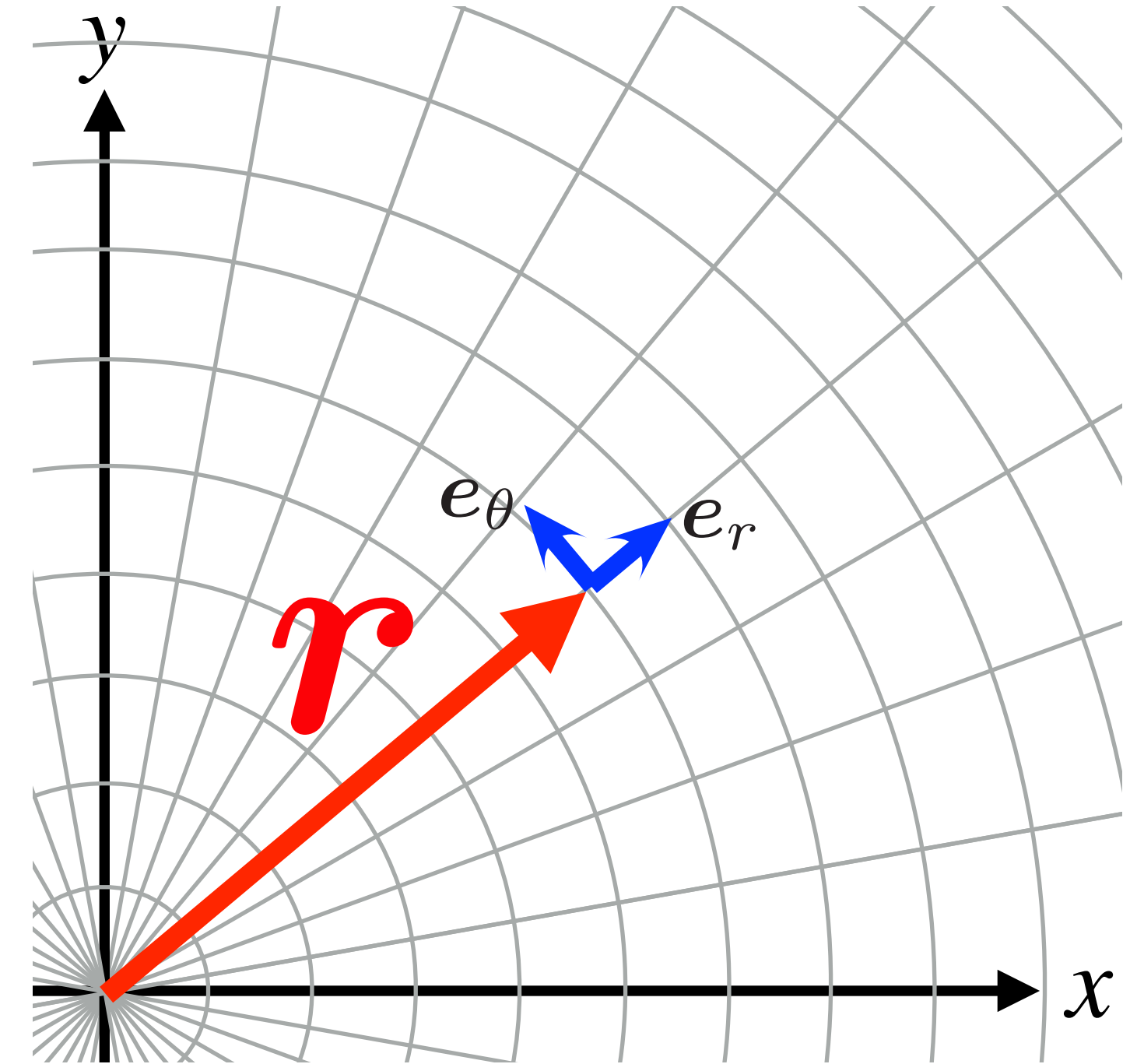


極座標の位置ベクトル

位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は (r, θ) における $\boldsymbol{e}_r$ と同じ向き (図からわかる)

$$\boldsymbol{r} = r \boldsymbol{e}_r$$

(注意) θ の情報は右辺の $\vec{e}_r$ が持っている ($\vec{e}_r$ は θ の関数だから)



極座標の位置ベクトルの微分

位置ベクトル $\mathbf{r}$ は (r, θ) における $\mathbf{e}_r$ と同じ向き

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$$

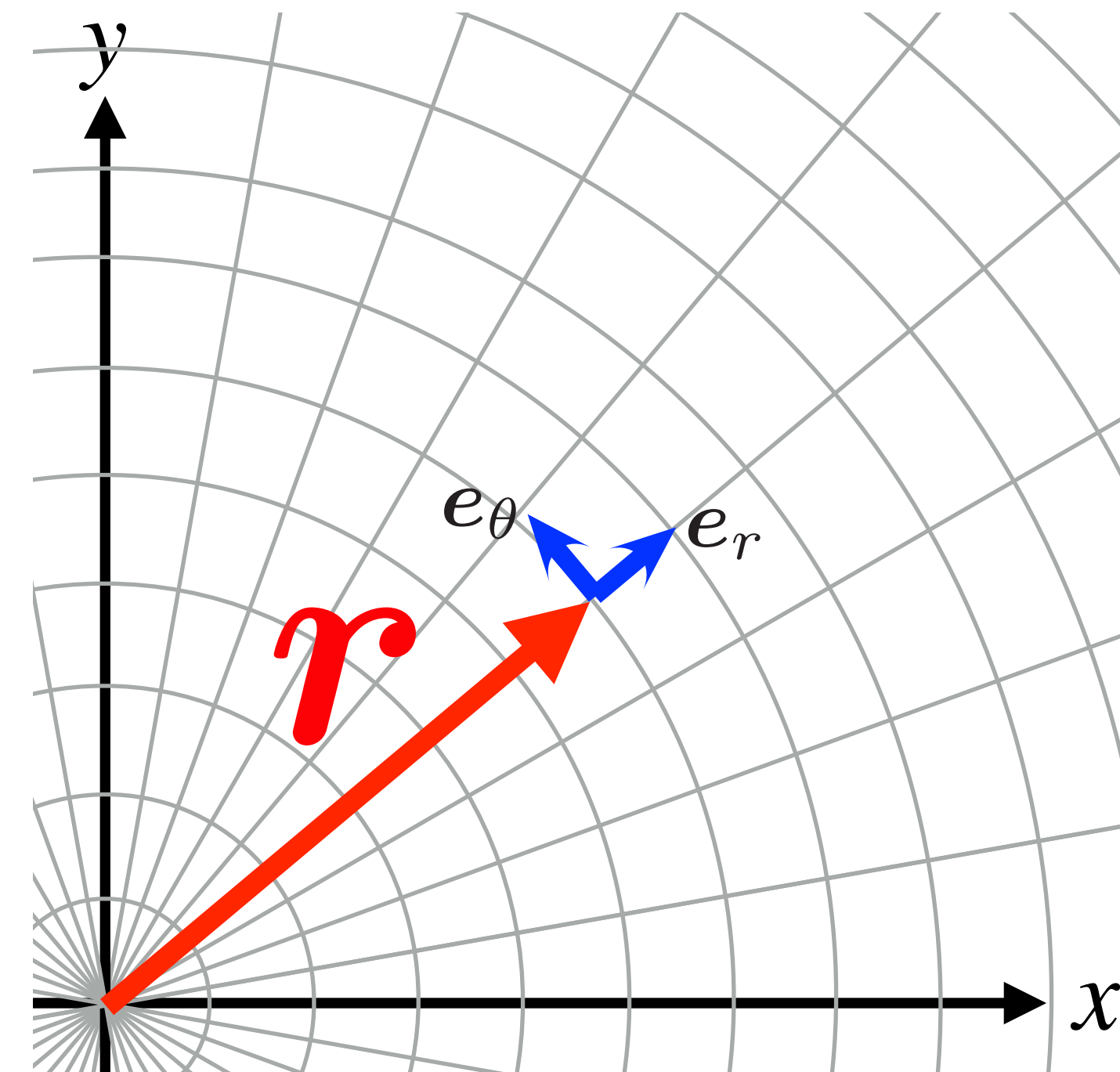
偏微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{r} &= \frac{\partial}{\partial r}(r\mathbf{e}_r) \\ &= \frac{\partial r}{\partial r}\mathbf{e}_r + r \underbrace{\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{e}_r}_{=0} \\ &= \mathbf{e}_r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \theta}\mathbf{r} &= \frac{\partial}{\partial \theta}(r\mathbf{e}_r) \\ &= \underbrace{\frac{\partial r}{\partial \theta}}_{=0}\mathbf{e}_r + r \underbrace{\frac{\partial}{\partial \theta}\mathbf{e}_r}_{=\mathbf{e}_\theta} \\ &= r\mathbf{e}_\theta\end{aligned}$$

全微分

$$\begin{aligned}d\mathbf{r} &= dr \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} + d\theta \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \\ &= \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\theta r d\theta\end{aligned}$$



極座標のベクトル場

位置 $\boldsymbol{r}$ におけるベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ と書く

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ は基底ベクトルで展開できる

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = A_x(\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}_x + A_y(\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}_y \quad (\text{デカルト座標で展開した場合})$$

$$= A_r(\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}_r + A_\theta(\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}_\theta \quad (\text{極座標で展開した場合})$$

極座標の成分とデカルト座標の成分の関係

$$A_r = \boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{A}$$

$$= \boldsymbol{e}_r \cdot (A_x \boldsymbol{e}_x + A_y \boldsymbol{e}_y)$$

$$= A_x \boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_x + A_y \boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_y$$

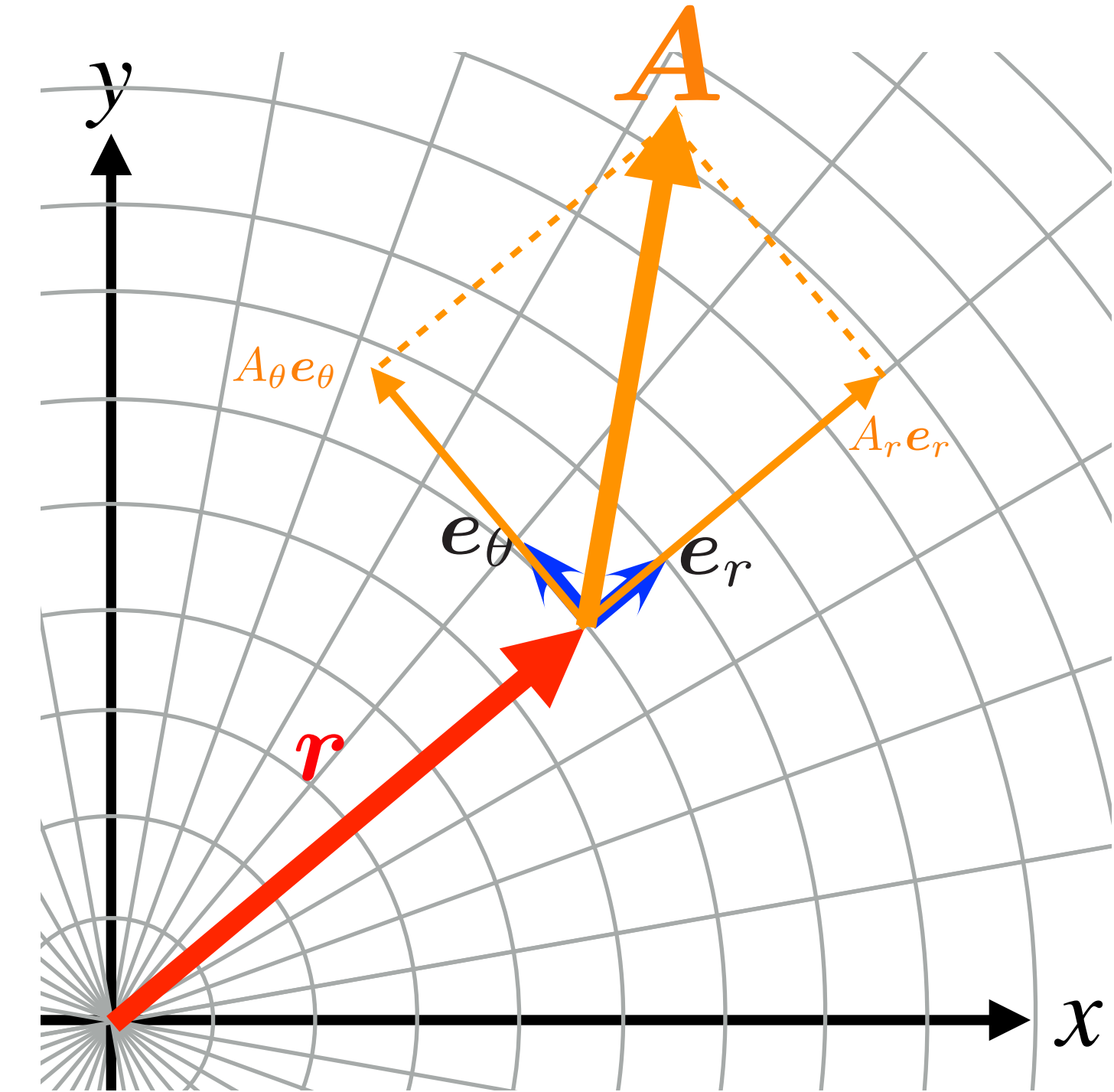
$$= A_x \cos \theta + A_y \sin \theta$$

$$A_\theta = \boldsymbol{e}_\theta \cdot \boldsymbol{A}$$

$$= \boldsymbol{e}_\theta \cdot (A_x \boldsymbol{e}_x + A_y \boldsymbol{e}_y)$$

$$= A_x \boldsymbol{e}_\theta \cdot \boldsymbol{e}_x + A_y \boldsymbol{e}_\theta \cdot \boldsymbol{e}_y$$

$$= -A_x \sin \theta + A_y \cos \theta$$



(引数の $\boldsymbol{r}$ は書くと煩雑なので省略した)

物理での使用例：極座標における速度と加速度¹²

r と θ は時間の関数

基底ベクトルの時間微分

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} &= \frac{dr}{dt} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} + \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} \\ &= \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} &= \frac{dr}{dt} \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} + \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} \\ &= -\dot{\theta} \mathbf{e}_r\end{aligned}$$

位置ベクトルの時間微分

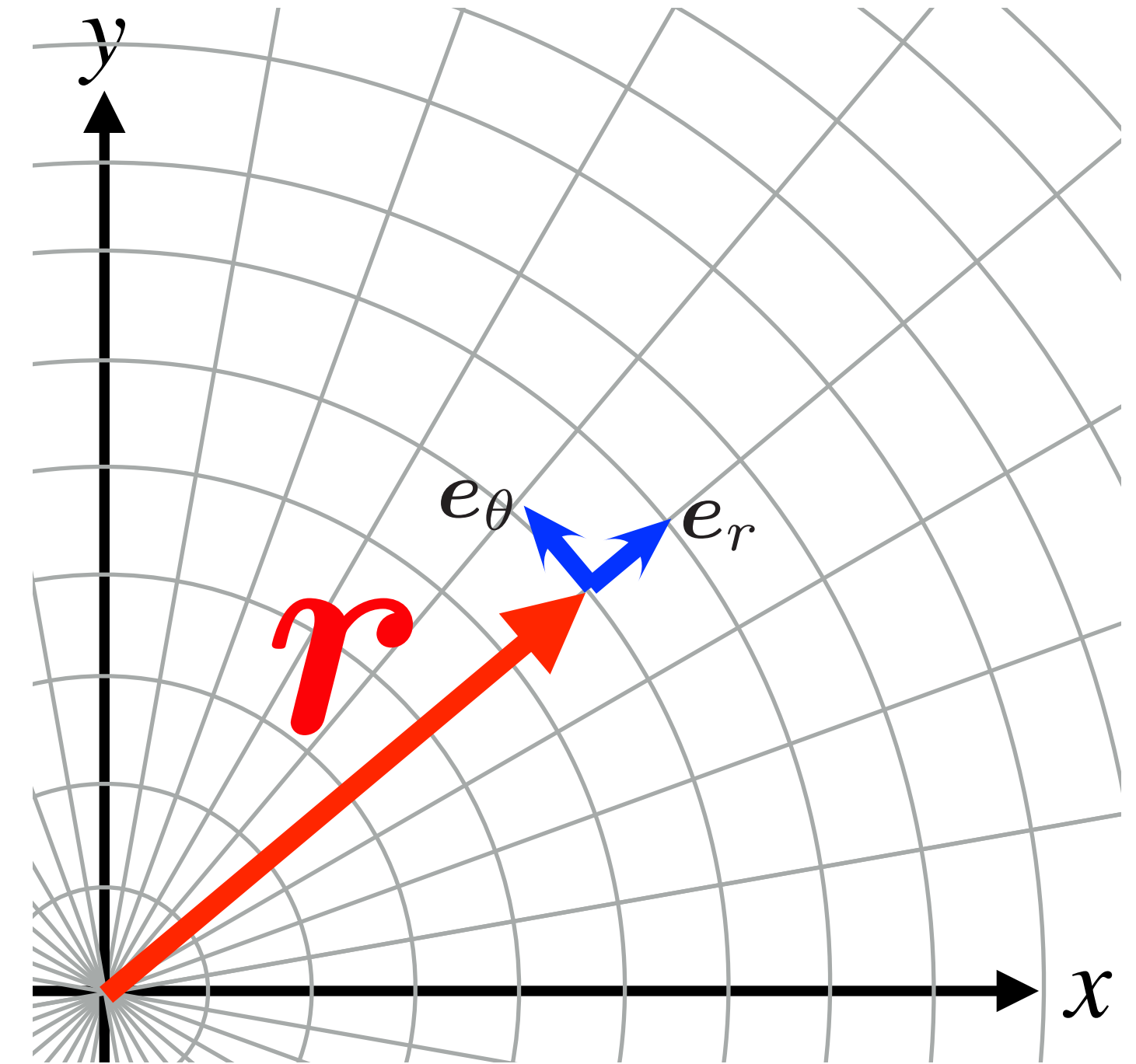
$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{d}{dt}(r\mathbf{e}_r) \\ &= \dot{r}\mathbf{e}_r + r\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \\ &= \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta\end{aligned}$$

動径方向と θ 方向の速度が出てくる

加速度

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) \\ &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} \mathbf{e}_\theta\end{aligned}$$

運動方程式にしたときに外向きの力になる部分



変換則

デカルト座標から極座標への変換則は行列を使うと綺麗に書ける

座標の微少量

$$\begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{xとyをrと}\theta\text{の関数とみなして全微分} \\ \longrightarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} dx = d(r \cos \theta) = dr \cos \theta - r d\theta \sin \theta \\ dy = d(r \sin \theta) = dr \sin \theta + r d\theta \cos \theta \end{array}$$

行列を使って書ける



$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \end{pmatrix}$$

変換の時に出てきた行列は直交行列
(転置行列が逆行列に一致)

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$R^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

逆行列を左からかけると dr と $r d\theta$ について解ける



$$\begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

変換則

基底ベクトル

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\theta &= -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

行列を使って書ける

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix}$$

逆行列を左からかける

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \end{pmatrix} = R^{-1}(\theta) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \end{pmatrix}$$

ベクトル場の成分

同様にやれば以下がわかる

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \end{pmatrix} = R^{-1}(\theta) \begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \end{pmatrix}$$

極座標の偏微分

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} \\ &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y} \\ &= -r \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}\end{aligned}$$

行列を使って書ける

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

逆行列を左からかけると dr と $r d\theta$ について解ける

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

変換則まとめ

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}r \\ r \mathrm{d}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$$

2次元極座標のナブラ演算子(1/3)

ナブラ演算子は3次元でよく使うが練習として2次元のものを考えてみる

$$\begin{aligned}\nabla &= \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} && \text{(デカルト座標で展開した場合。これでナブラ演算子を定義)} \\ &= \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} && \text{(極座標で展開した場合。これは上の式から導ける)}\end{aligned}$$

極座標表示の導出いくつかやり方がある (次ページ)

注意 基底ベクトルは必ず偏微分の記号の左

基底ベクトルが偏微分の記号の右側にあると、基底ベクトルも微分されるので上記のナブラ演算子と一致しない

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} \\ &= \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \mathbf{e}_r \\ &\neq \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\end{aligned}$$

2次元極座標のナブラ演算子(2/3)

(証明 1) 変換則を使って地道に計算する

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} &= (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + (\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta) \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\
 &= \dots \\
 &= \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}
 \end{aligned}$$

- ・展開すると8つ項が出てくるがほとんどが逆符号で打ち消し合う
- ・残りは $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ を使って整理する

2次元極座標のナブラ演算子(3/3)

(証明2) スカラー場の全微分とナブラの関係を使う

デカルト座標だと $d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = \nabla \phi \cdot d\mathbf{r}$

成分を使わないで書いたベクトルの式は座標系によらずに成り立つ

極座標だと $d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} dr + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\theta = \nabla \phi \cdot d\mathbf{r}$

$$= \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta \right) \cdot (\mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\theta d\theta)$$

位置ベクトルの微分になるように式変形する
 $d\mathbf{r} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta$

$$= \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta \right) \cdot (\mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\theta r d\theta)$$

$= d\mathbf{r}$

$= \nabla \phi$

スカラー場の全微分を計算して結果を比較することで $\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$ とわかる

2次元極座標の勾配と発散とラプラシアン

勾配 $\nabla \phi = \mathbf{e}_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$

発散 $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}$

ラプラシアン $\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$

- ・勾配の導出はすでにやった（前のページ）
- ・発散とラプラシアンの導出は次ページから
- ・3次元の回転に対応するベクトルはない（対応するスカラーは作れる）

2次元極座標の発散 (1/2)

デカルト座標で次で定義 $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}$

変換則を使って右辺を計算する, あるいはナブラ演算子とベクトル場の極座標表示を使って左辺を計算することで, 極座標表示での発散が次であることが示せる

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} A_r + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}\end{aligned}$$

2次元極座標の発散 (2/2)

(証明方法その1) 変換則で計算

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} &= \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (\cos \theta A_r - \sin \theta A_\theta) + \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (\sin \theta A_r + \cos \theta A_\theta) \\ &= \dots \end{aligned}$$

(証明方法その2) ナブラ演算子とベクトル場の極座標表示を使って計算 (基底ベクトルの微分を忘れないこと)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \cdot (A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta) \\ &= \mathbf{e}_r \cdot \left(\frac{\partial A_r}{\partial r} \mathbf{e}_r + A_r \underbrace{\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r}}_{=0} + \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \mathbf{e}_\theta + A_\theta \underbrace{\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r}}_{=0} \right) + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \cdot \left(\frac{\partial A_r}{\partial \theta} \mathbf{e}_r + A_r \underbrace{\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta}}_{=\mathbf{e}_\theta} + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + A_\theta \underbrace{\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta}}_{=-\mathbf{e}_r} \right) \\ &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(A_r + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

2次元極座標のラプラシアン

次で定義 $\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$

発散の極座標表示 $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}$ で $\mathbf{A} = \nabla \phi$ の場合であるから

$A_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad A_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$ を代入して次が得られる

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \end{aligned}$$



！階微分の項が現れることに注意！

(偏微分の変換則をつかっても導出可能だが計算は大変)

円柱座標

円柱座標

xy座標だけ極座標表示したもの

- ・ r と θ の代わりに ρ と ϕ を使う
- ・ z はデカルト座標のまま

デカルト座標との関係 (変換則)

$$x = \rho \cos \phi$$

$$y = \rho \sin \phi$$

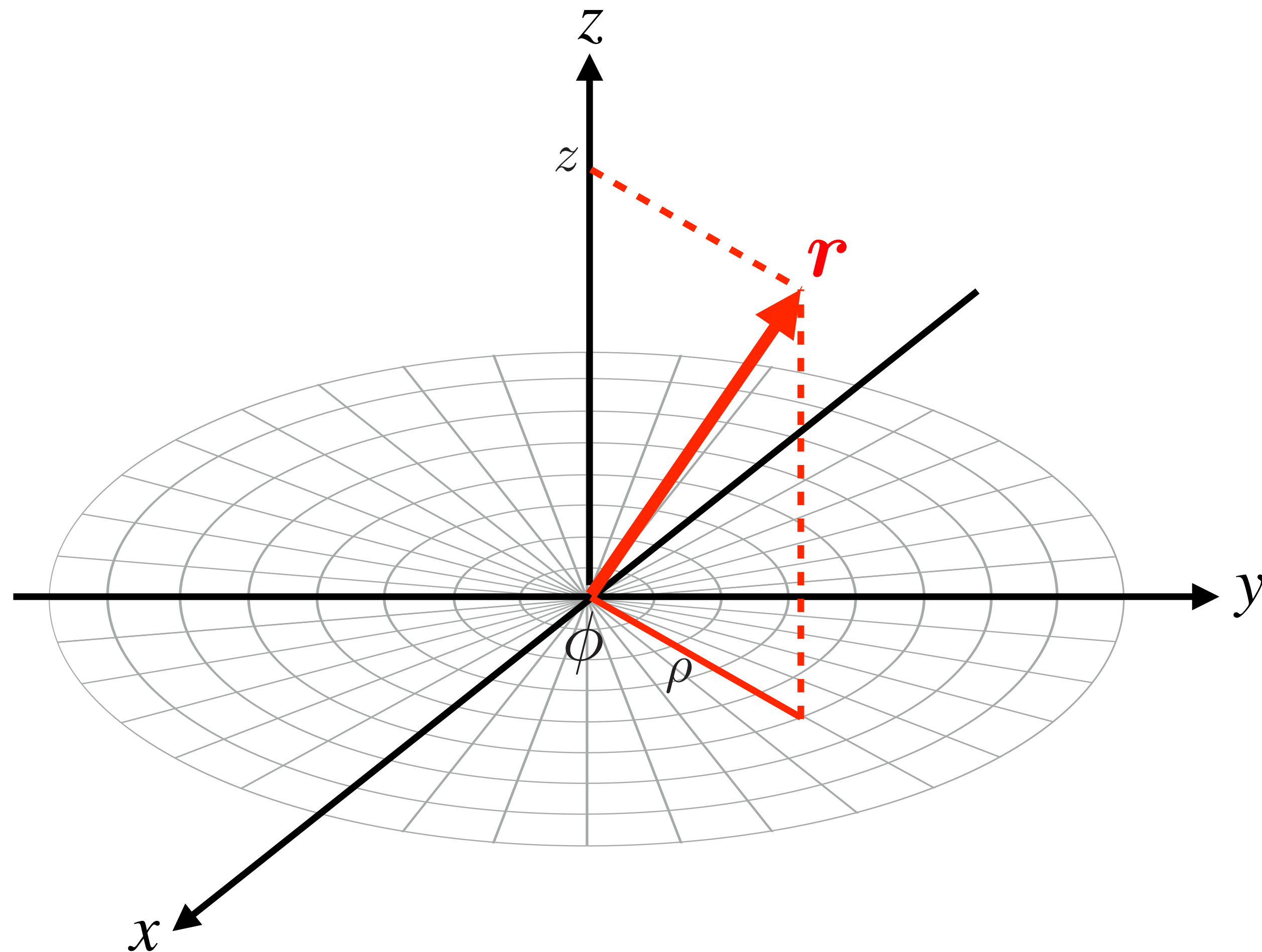
$$z = z$$

(ρ と θ について解くと)

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \arctan \frac{y}{x}$$

$$z = z$$



円柱座標の基底ベクトル

xy座標だけ極座標表示する

$$\mathbf{e}_\rho = \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y$$

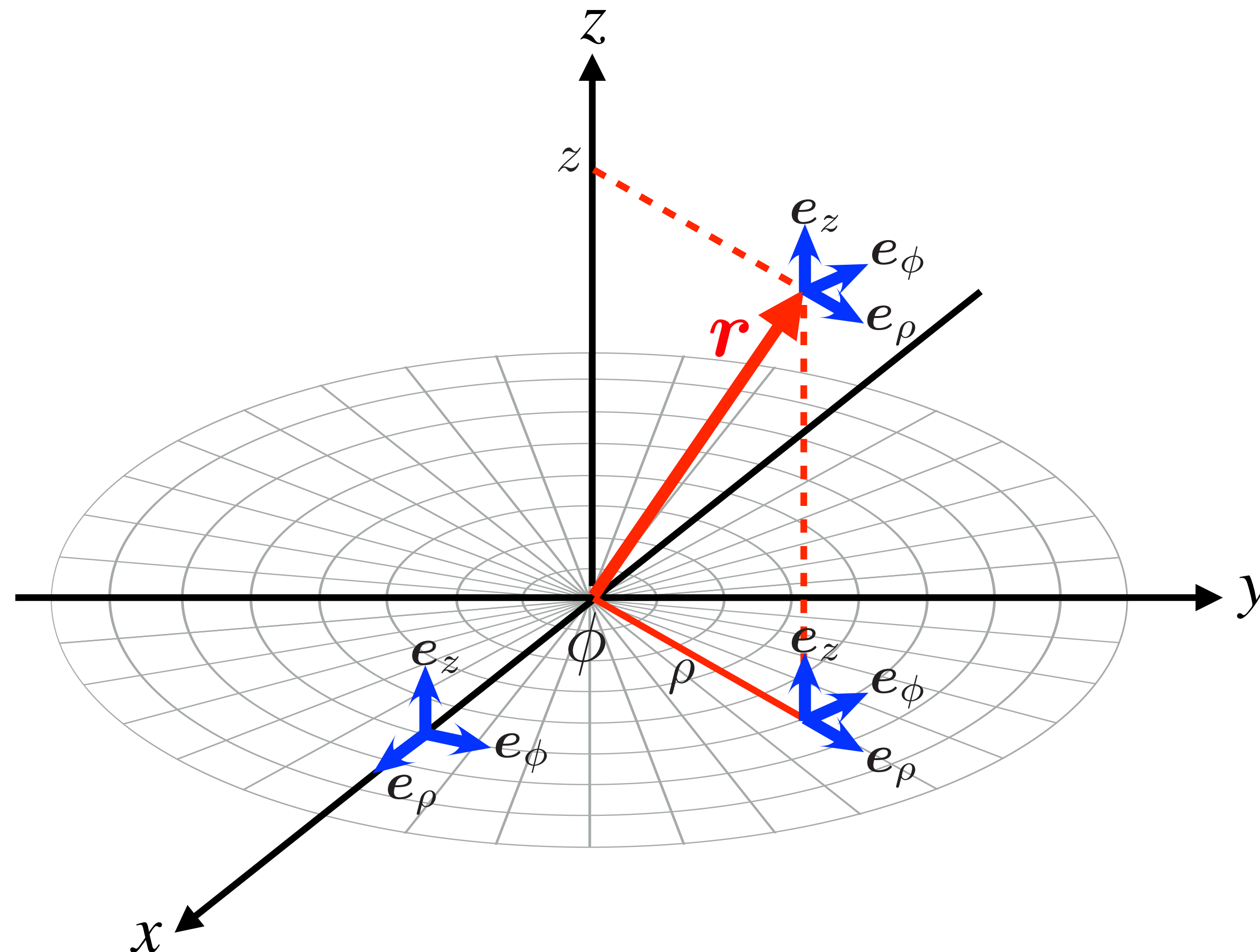
$$\mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z$$

$\mathbf{e}_\rho$ と $\mathbf{e}_\phi$ は場所によることに注意

内積・外積

基底ベクトルは正規直交

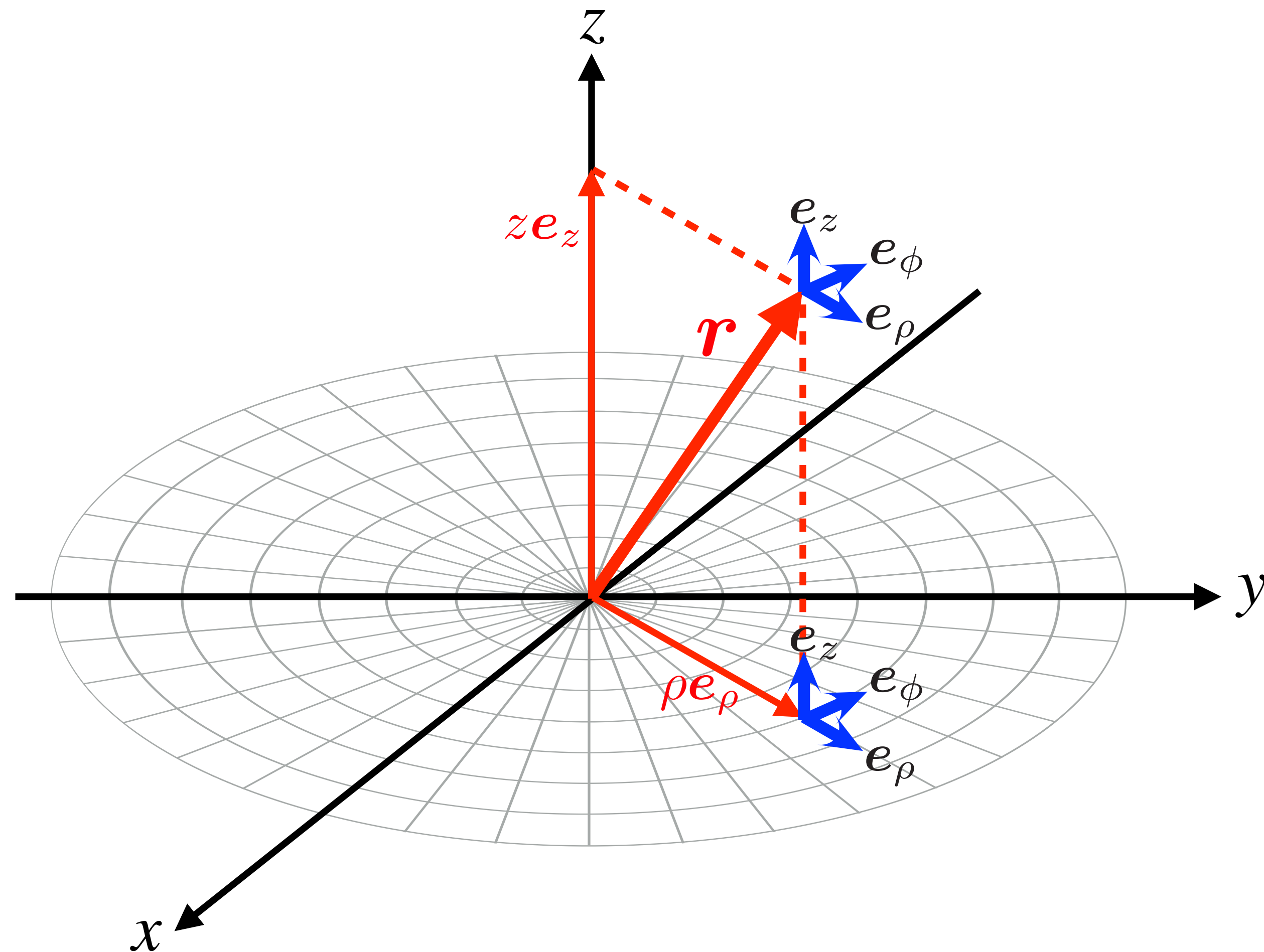


円柱座標の位置ベクトル

位置ベクトル

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z$$

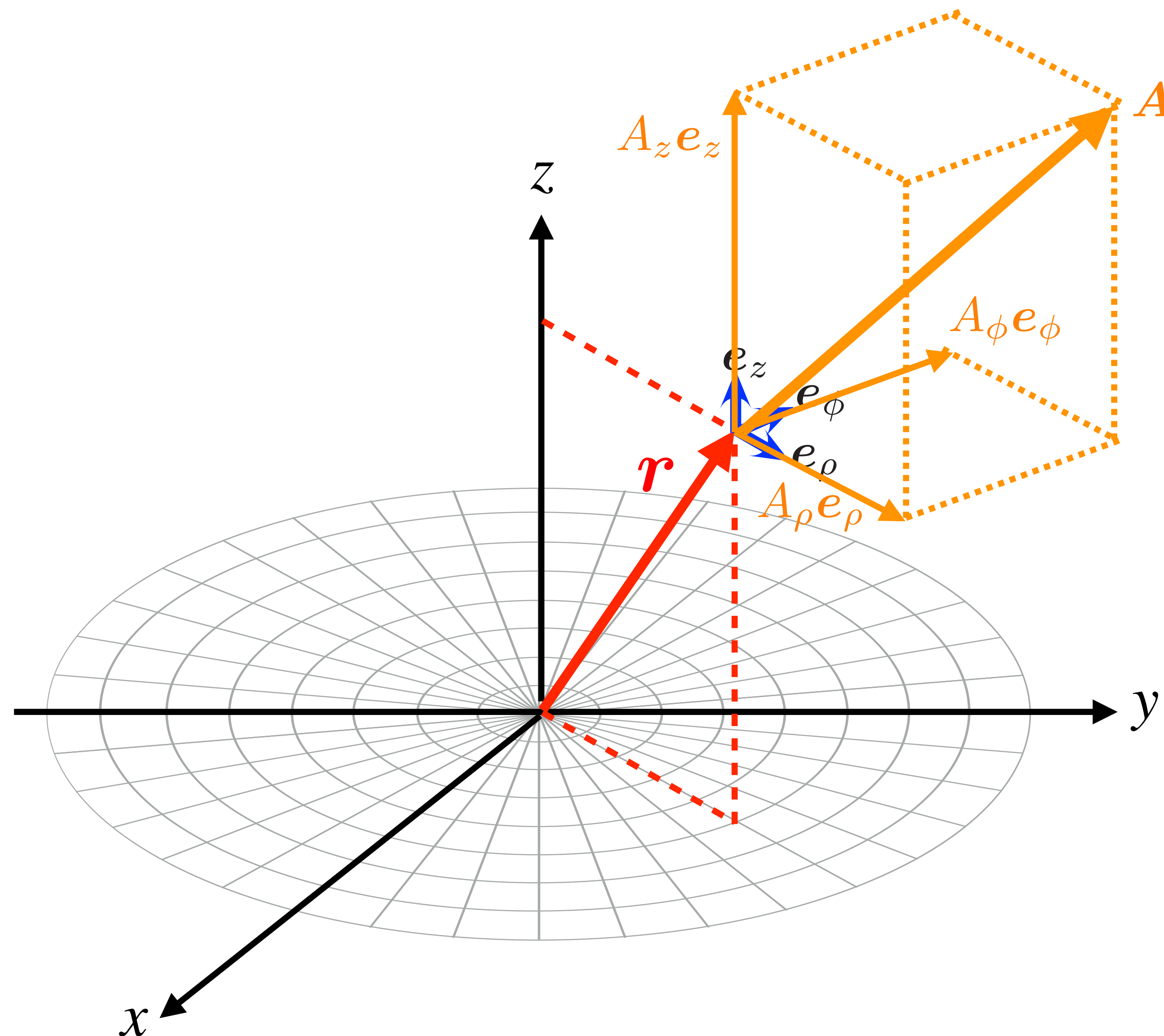
(ϕ の情報は $\mathbf{e}_\rho$ が持っていることに注意)



円柱座標のベクトル場

ベクトル場

$$\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\phi \mathbf{e}_\phi + A_z \mathbf{e}_z$$



円柱座標におけるナブラ演算子など

ナブラ演算子

$$\begin{aligned}\nabla &= \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}$$

勾配と発散

勾配 $\nabla f = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}$

発散 $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

ラプラシアン $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

導出は2次元極座標と同様（自分で導出してみることに）

円柱座標における回転 (1/4)

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_\rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\phi \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right)$$

証明

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\underbrace{\mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho}}_{\text{red}} + \underbrace{\mathbf{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi}}_{\text{orange}} + \underbrace{\mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}}_{\text{blue}} \right) \times (\mathbf{e}_\rho A_\rho + \mathbf{e}_\phi A_\phi + \mathbf{e}_z A_z)$$

$$= \underbrace{\mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho}}_{\text{red}} \times (\mathbf{e}_\rho A_\rho + \mathbf{e}_\phi A_\phi + \mathbf{e}_z A_z) + \underbrace{\mathbf{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi}}_{\text{orange}} \times (\mathbf{e}_\rho A_\rho + \mathbf{e}_\phi A_\phi + \mathbf{e}_z A_z) + \underbrace{\mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}}_{\text{blue}} \times (\mathbf{e}_\rho A_\rho + \mathbf{e}_\phi A_\phi + \mathbf{e}_z A_z)$$

①
②
③

円柱座標における回転 (2/4)

$$\textcircled{1} = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \times (\mathbf{e}_\rho A_\rho + \mathbf{e}_\phi A_\phi + \mathbf{e}_z A_z)$$

(偏微分と外積の記号は順番を入れ替えてよい)

$$= \mathbf{e}_\rho \times \frac{\partial}{\partial \rho} (\mathbf{e}_\rho A_\rho + \mathbf{e}_\phi A_\phi + \mathbf{e}_z A_z)$$


(偏微分は6箇所作用するが基底ベクトルは ρ によらない)

$$= \mathbf{e}_\rho \times \left(\mathbf{e}_\rho \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\phi \frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} + \mathbf{e}_z \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right)$$

$$= \mathbf{e}_z \frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} - \mathbf{e}_\phi \frac{\partial A_z}{\partial \rho}$$

(基底ベクトルの外積を計算して整理)

円柱座標における回転 (3/4)

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} &= \mathbf{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \times (\mathbf{e}_\rho A_\rho + \mathbf{e}_\phi A_\phi + \mathbf{e}_z A_z) \\
 &= \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\phi \times \left(\underbrace{\frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \phi}}_{=\mathbf{e}_\phi} A_\rho + \mathbf{e}_\rho \underbrace{\frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}}_{=-\mathbf{e}_\rho} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \phi}}_{=\mathbf{0}} A_\phi + \mathbf{e}_\phi \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \phi}}_{=\mathbf{0}} A_z + \mathbf{e}_z \frac{\partial A_z}{\partial \phi} \right) \\
 &= \frac{1}{\rho} \left(-\mathbf{e}_z \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} + \mathbf{e}_z A_\phi + \mathbf{e}_\rho \frac{\partial A_z}{\partial \phi} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} &= \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \times (\mathbf{e}_\rho A_\rho + \mathbf{e}_\phi A_\phi + \mathbf{e}_z A_z) \\
 &= \mathbf{e}_z \times \left(\mathbf{e}_\rho \frac{\partial A_\rho}{\partial z} + \mathbf{e}_\phi \frac{\partial A_\phi}{\partial z} + \mathbf{e}_z \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \\
 &= \mathbf{e}_\phi \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \mathbf{e}_\rho \frac{\partial A_\phi}{\partial z}
 \end{aligned}$$

(基底ベクトルは z によらない)

円柱座標における回転 (4/4)

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} &= \left(\mathbf{e}_z \frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} - \mathbf{e}_\phi \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \left(-\mathbf{e}_z \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} + \mathbf{e}_z A_\phi + \mathbf{e}_\rho \frac{\partial A_z}{\partial \phi} \right) + \left(\mathbf{e}_\phi \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \mathbf{e}_\rho \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \\
 &= \mathbf{e}_\rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\phi \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho} A_\phi \right) \\
 &= \mathbf{e}_\rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\phi \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right)
 \end{aligned}$$

(証明終)

3次元極座標

3次元極座標 (球座標)

デカルト座標との関係 (変換則)

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

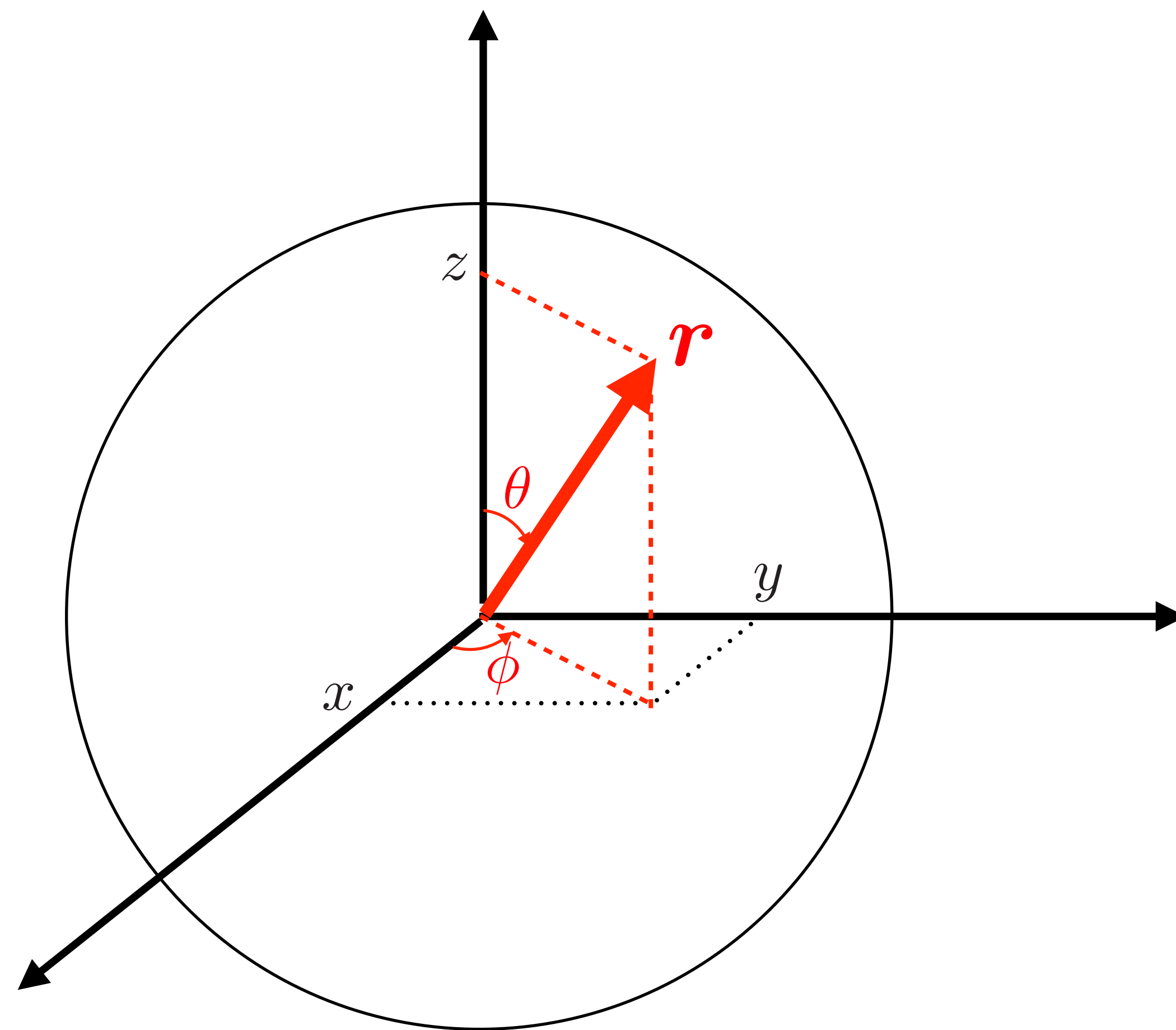
$$z = r \cos \theta$$

(r, θ, ϕ について解くと)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$



3次元極座標の基底ベクトル (1/3)

言葉で説明すると…

- $\mathbf{e}_r$ は位置ベクトルをそのまま伸ばした方向
- $\mathbf{e}_\theta$ は北極と南極を結ぶ曲線の接線方向
- $\mathbf{e}_\phi$ は同じ緯度の曲線の接線方向
- (図も見ながら考えよう)

デカルト座標の基底ベクトルとの関係

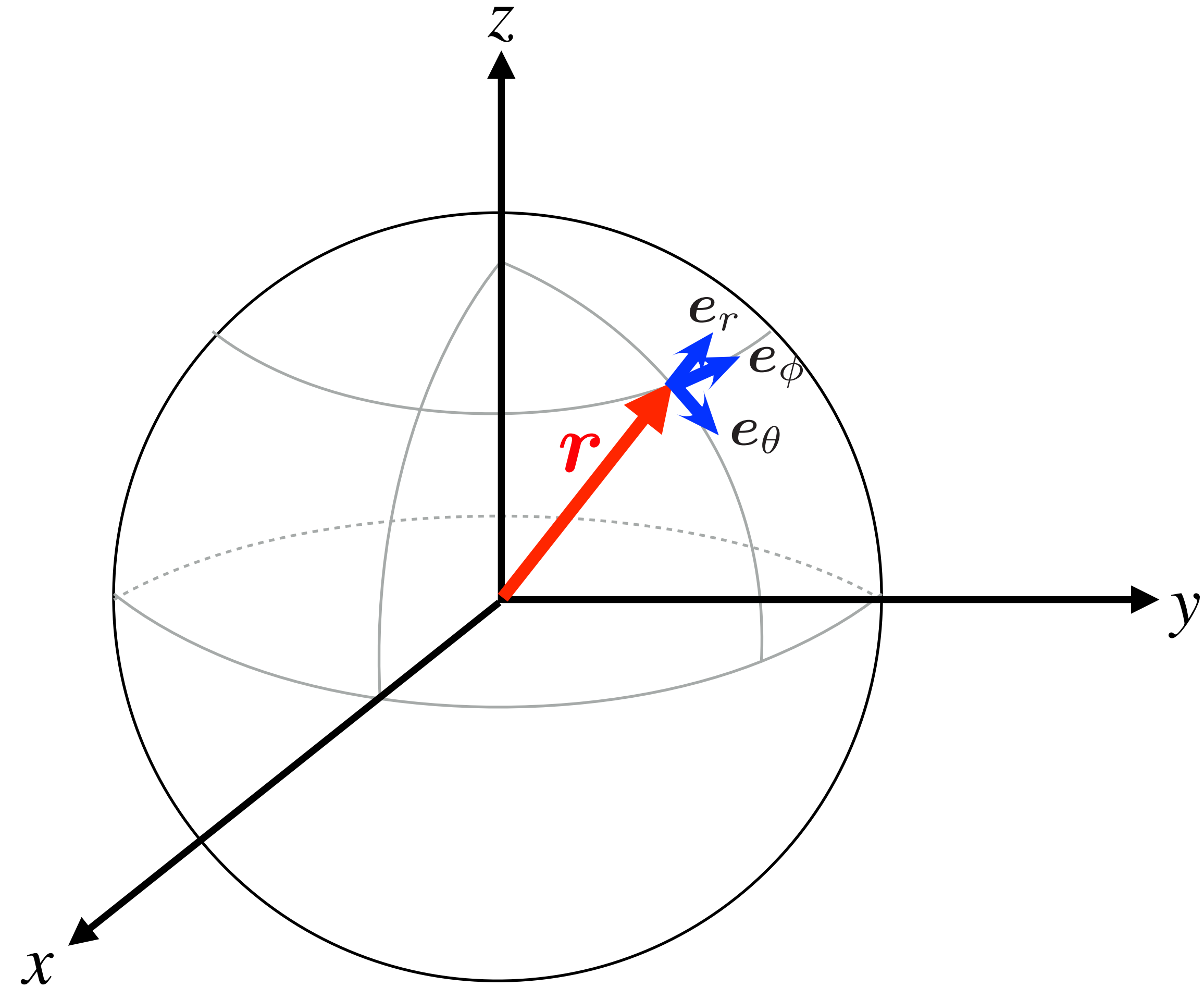
$$\mathbf{e}_r = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z = \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta}$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \phi}$$

正規直交する

内積と外積は次ページ



3次元極座標の基底ベクトル (2/3)

内積

正規直交する

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = 1$$

$$\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta = 1$$

$$\mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_\phi = 1$$

これ以外は0

外積

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\phi$$

$$\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_r = -\mathbf{e}_\phi$$

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_r = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{0}$$

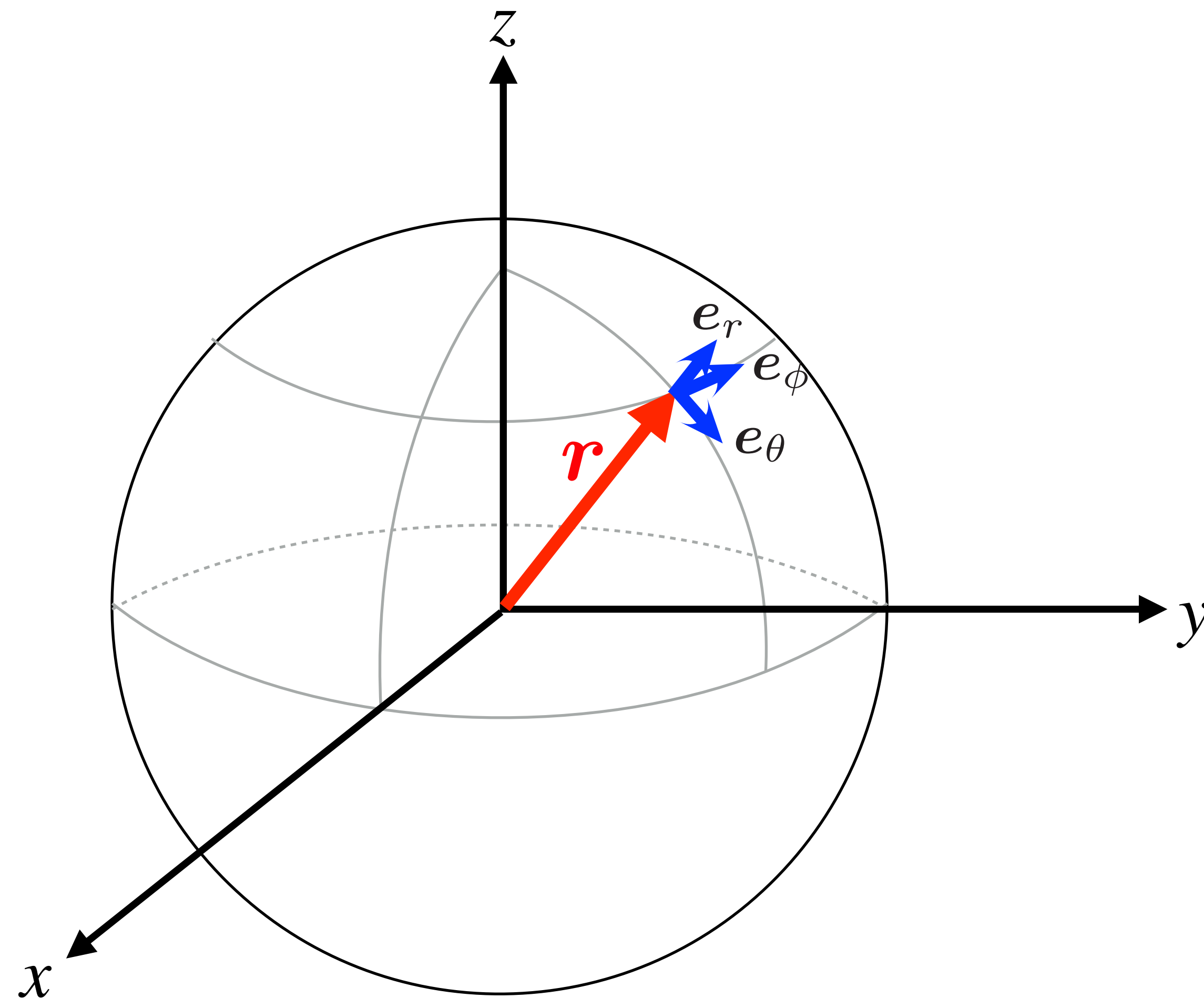
$$\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\phi = -\mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_\phi = \mathbf{0}$$

左の3つの式と
 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$
 から導出できる

$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$
 からわかる



3次元極座標の基底ベクトル (3/3)

微分

デカルト座標の基底ベクトルで書き下し，デカルト座標の基底ベクトルは微分したら0になること注意して計算する

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial r} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \theta} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \phi} = \sin \theta \mathbf{e}_\phi$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \phi} = \cos \theta \mathbf{e}_\phi$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \phi} = -\sin \theta \mathbf{e}_r - \cos \theta \mathbf{e}_\theta$$

3次元極座標の位置ベクトルおよびベクトル場³⁹

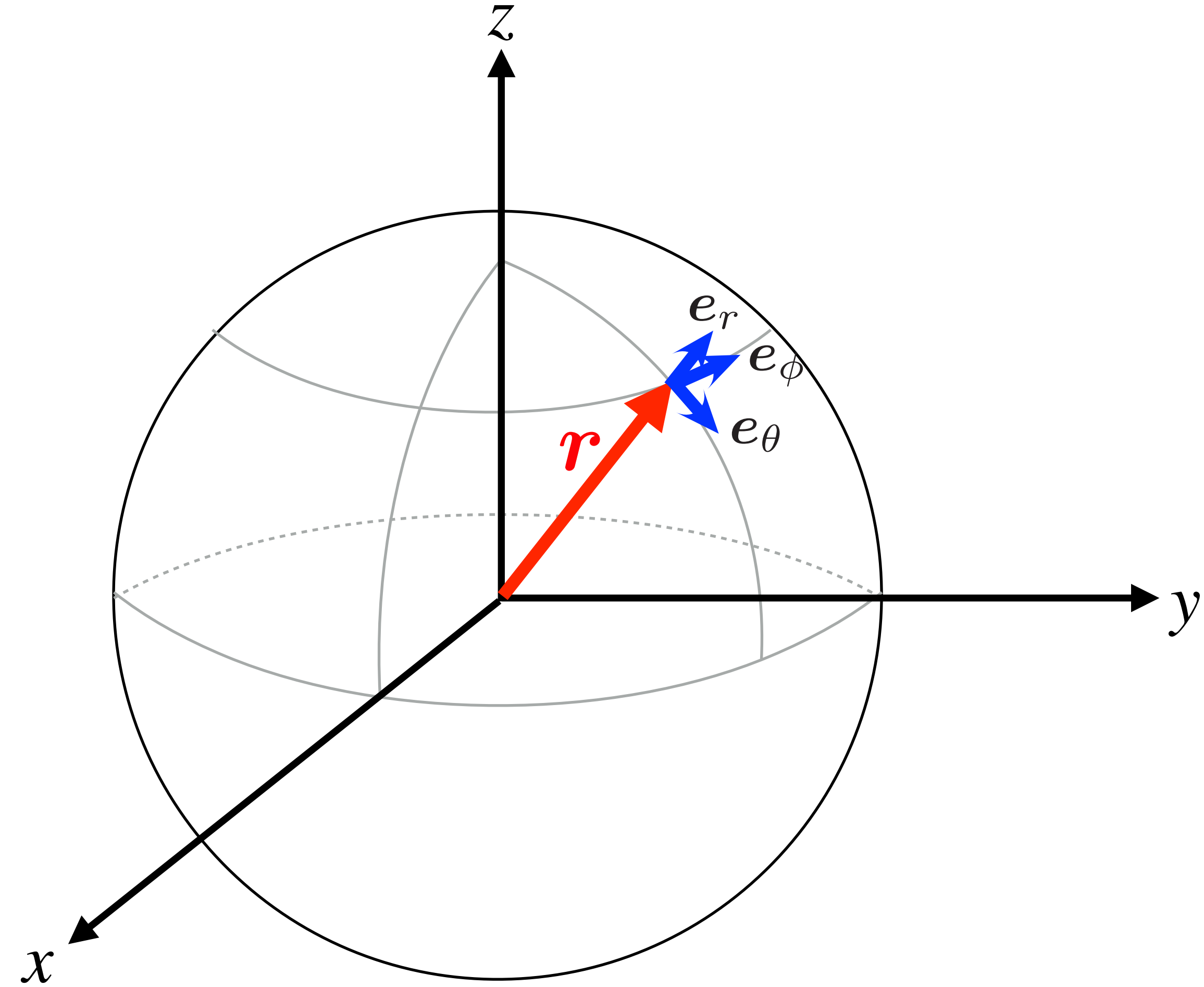
位置ベクトル

$$\boldsymbol{r} = r \boldsymbol{e}_r$$

($\boldsymbol{e}_r$ が θ と ϕ の情報を持っている)

ベクトル場

$$\boldsymbol{A} = A_r \boldsymbol{e}_r + A_\theta \boldsymbol{e}_\theta + A_\phi \boldsymbol{e}_\phi$$



3次元極座標の位置ベクトルの微分

$$d\mathbf{r} = \underbrace{dr}_{\text{位置ベクトルを } r \text{ 方向にのばしたときに変わる長さ}} \mathbf{e}_r + \underbrace{r d\theta}_{\text{位置ベクトルを } \theta \text{ 方向に } d\theta \text{ 動かしたときに描く曲線の長さ (図も参照せよ)}} \mathbf{e}_\theta + \underbrace{r \sin \theta d\phi}_{\text{位置ベクトルを } \phi \text{ 方向に動かしたときに描く曲線の長さ}} \mathbf{e}_\phi$$

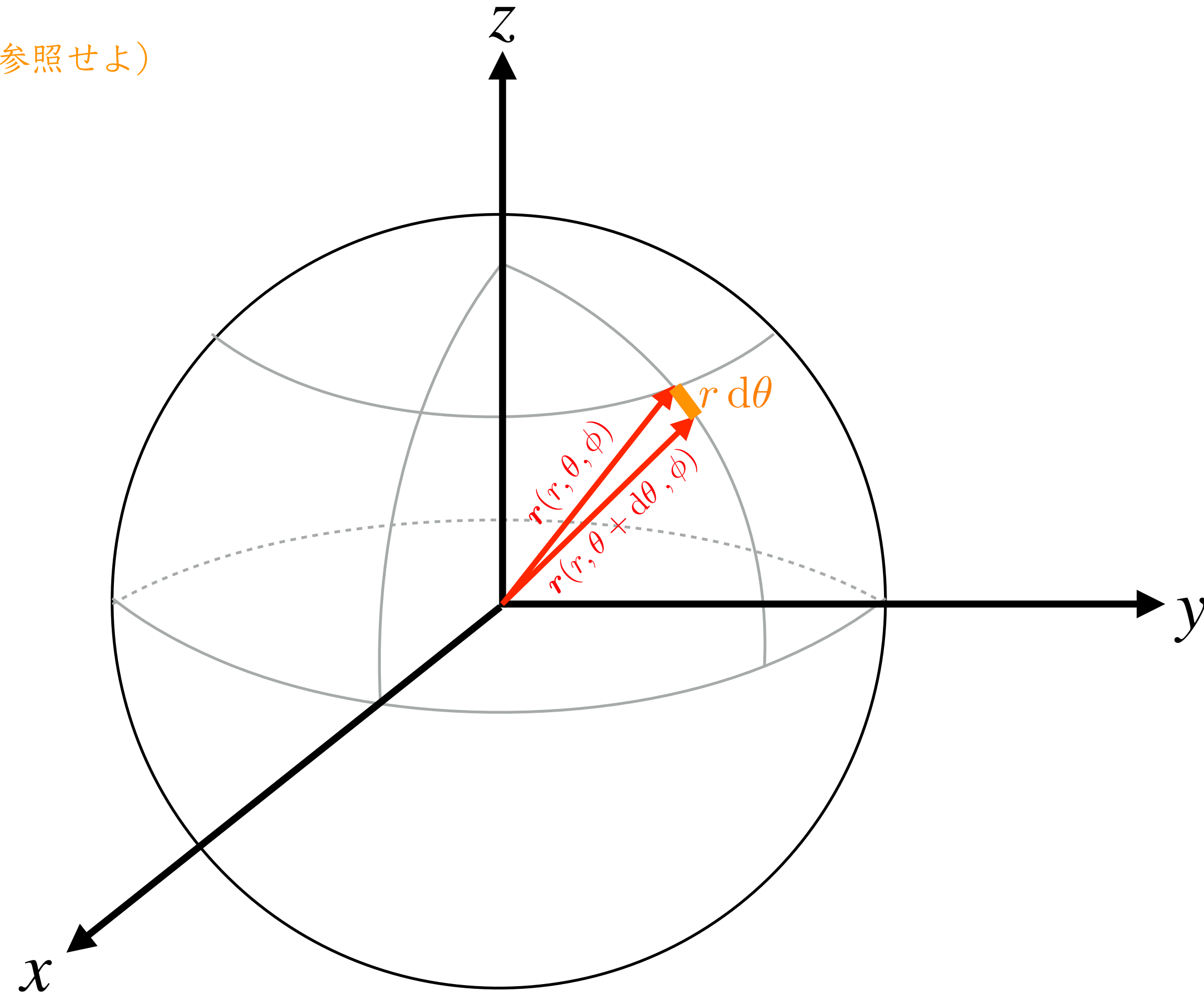
位置ベクトルを r 方向にのばしたときに変わる長さ

位置ベクトルを θ 方向に $d\theta$ 動かしたときに描く曲線の長さ (図も参照せよ)

位置ベクトルを ϕ 方向に動かしたときに描く曲線の長さ

証明

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= d(r\mathbf{e}_r) \\ &= dr \mathbf{e}_r + r d\mathbf{e}_r \\ &= dr \mathbf{e}_r + r \left(\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} dr + \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \phi} d\phi \right) \\ &= dr \mathbf{e}_r + r(\mathbf{e}_\theta d\theta + \sin \theta \mathbf{e}_\phi d\phi) \\ &= dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$



3次元極座標の勾配ベクトルとナブラ演算子⁴¹

スカラー場 f の全微分は
$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi$$

デカルト座標のときに^{なら}倣うと
$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

$d\mathbf{r} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{e}_\phi$ をつかって二つの式を比較すると

勾配ベクトル
$$\nabla f = \mathbf{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi}$$

ナブラ演算子
$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

3次元極座標の発散・回転・ラプラシアン

(方法1) 円柱座標の時と同様に, 基底ベクトルも微分されることに気をつけて計算する

(方法2) デカルト座標から変数変換する

[方法1の方が比較的楽]

発散 $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$

回転 $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_r \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial(r \sin \theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial \phi} \right) + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r \sin \theta A_\phi)}{\partial r} \right) + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right)$

ラプラシアン $\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$