ϵ_{ijk}

阿部智広

2023 年 12 月 5 日

目次

1　クロネッカーのデルタ

　便利なものとして，次で定義されるクロネッカーのデルタ δ_{ij} を導入する。

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}. \tag{1}$$

デカルト座標では基底ベクトルの内積は全部書くと、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_x &= 1, & \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y &= 0, & \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_z &= 0, \quad (2) \\ \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_x &= 0, & \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_y &= 1, & \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_z &= 0, \quad (3) \\ \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_x &= 0, & \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_y &= 0, & \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_z &= 1, \quad , \quad (4) \end{aligned}$$

であるが，クロネッカーのデルタを使うとまとめて書くことができて、

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}, \tag{5}$$

となる。

　ベクトルの内積は，クロネッカーのデルタを使えば次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} =& (\sum_j A_j \boldsymbol{e}_j) \cdot (\sum_k B_k \boldsymbol{e}_k) \\ =& \sum_{j,k} A_j B_k (\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k) \\ =& \sum_{j,k} A_j B_k \delta_{jk} \\ =& \sum_j A_j B_j, \end{aligned} \tag{6}$$

最後の等式は，k について和を取ると，クロネッカーのデルタのために，$k = j$ となるところしか残らないことをつかった。

2　ナブラ演算子

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x},\ \partial_y = \frac{\partial}{\partial y},\ \partial_z = \frac{\partial}{\partial z}, \tag{7}$$

と書くことにして

$$\boldsymbol{\nabla} = \sum_j \boldsymbol{e}_j \partial_j, \tag{8}$$

と書く。

3 ϵ_{ijk}

講義では扱わない発展した内容として，レビ・チビタの記号 ϵ_{ijk} について説明する。ただし，講義では扱わないだけで，いつの間にかこれくらい知っていることが前提となる[*1][*2]。

3.1 定義

３つ添字のある完全反対称テンソル ϵ_{ijk} を用意する。完全反対称とは、３つある添字のうち任意の２つの入れ替えたときに (-1) 倍されるということである。例えば、$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$ などである（i と j を入れ替えた)。入れ替える添字の選び方は３通りあるので，全部書くと以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{ijk} =& -\epsilon_{jik}, \quad &\text{(左辺に比べて } i \text{ と } j \text{ を入れ替わった)} \qquad (9)\\
=& -\epsilon_{ikj}, \quad &\text{(左辺に比べて } j \text{ と } k \text{ が入れ替わった)} \qquad (10)\\
=& -\epsilon_{kji}. \quad &\text{(左辺に比べて } i \text{ と } k \text{ が入れ替わった)} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

これより、同じ添字のところは０になることがわかる。例えば，式 (9) で $i = j$ とすると，

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{iik} =& -\epsilon_{iik}, \quad &\text{(式 (9) で } j = i \text{ を代入)} \qquad (12)\\
2\epsilon_{iik} =& 0, \quad &\text{(移項した)} \qquad (13)\\
\epsilon_{iik} =& 0, \quad &\text{(整理した)} \qquad (14)
\end{aligned}
$$

となり，$\epsilon_{iik} = 0$ となる。同様にして $\epsilon_{iji} = 0, \epsilon_{ijj} = 0$ も示すことができる。これより添字はすべて異なるものでなければ０になることがわかる。

ゼロでない成分は，どれか１つ決めると，完全反対称性より全て決まる。慣習に従い，

$$\epsilon_{xyz} = +1, \tag{15}$$

と定義する。これを使うと０でない成分は１もしくは -1 になることが，添字の完全反対称性よりわかる。０でない成分をすべて書き下すと，

$$
\begin{aligned}
1 =& \epsilon_{xyz} = \epsilon_{yzx} = \epsilon_{zxy}, \qquad (16)\\
-1 =& \epsilon_{zyx} = \epsilon_{yxz} = \epsilon_{xzy}, \qquad (17)
\end{aligned}
$$

となる。

添字を２回入れ替えると符号が２回ひっくり返ってもとに戻るので，

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij}, \tag{18}$$

などが成り立つ。つまり３つの添字をサイクリックに動かしても良いということである。

[*1] 量子力学で角運動量演算子の交換関係を学ぶところで出てくる可能性がある。知らなくても学べるが，知っておいたほうがよい。

[*2] ϵ_{ijk} に限らず，講義で扱ってないのにいつの間にか知っていることが前提になる事柄はある。もちろん講義で扱った内容は当然身についていることが前提とされる。教科書も読むなどして自学自習しましょう。

3.2　対称 vs 反対称

添字を２つもった量 A_{ij} と S_{ij} があり，２つの添字の入れ替えに対して A は反対称，S は対称だとする。すなわち，

$$A_{ji} = -A_{ij}, \tag{19}$$
$$S_{ji} = S_{ij}, \tag{20}$$

とする。このとき

$$\sum_{ij} A_{ij} S_{ij} = 0, \tag{21}$$

がなりたつ。

$$\sum_{i,j} A_{ij} S_{ij} = \sum_{j,i} A_{ji} S_{ji} \quad \text{（ダミーの添字なので，} i \text{ と } j\text{，} j \text{ を } i \text{ と書くことにした）} \tag{22}$$
$$= \sum_{j,i} (-A_{ij}) S_{ij} \quad (A_{ji} = -A_{ij}, S_{ji} = S_{ij}) \tag{23}$$
$$= -\sum_{j,i} A_{ij} S_{ij}, \tag{24}$$

となるが，最後の式は，最左辺の (-1) 倍である。(-1) 倍して自分自身になる数は 0 しかない。よって，$\sum_{ij} A_{ij} S_{ij} = 0$ である。

同様にすれば,

$$\sum_{i,j} \epsilon_{ijk} a_i a_j = 0, \tag{25}$$

がわかる。

3.3　完全反対称テンソルを使った外積の表現

デカルト座標の基底ベクトル同士の外積は

$$\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_x = 0, \qquad \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z, \qquad \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_z = -\boldsymbol{e}_y, \tag{26}$$
$$\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_x = -\boldsymbol{e}_z, \qquad \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_y = 0, \qquad \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x, \tag{27}$$
$$\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y, \qquad \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_y = -\boldsymbol{e}_x, \qquad \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_z = 0, \tag{28}$$

となる。これは完全反対称テンソルを使うと、

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \sum_k \epsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_k \tag{29}$$

とかける。両辺の i と j に x,y, または z を適当に入れては確かめよ。全部で 9 パターンある。たとえば，$i = x, j = y$ のときは,

$$\begin{aligned}\text{式 (29) の右辺} &= \sum_k \epsilon_{xyk} \boldsymbol{e}_k \\ &= \underbrace{\epsilon_{xyx}}_{=0} \boldsymbol{e}_x + \underbrace{\epsilon_{xyy}}_{=0} \boldsymbol{e}_y + \underbrace{\epsilon_{xyz}}_{=1} \boldsymbol{e}_z \\ &= \boldsymbol{e}_z, \end{aligned} \tag{30}$$

となるが，これは $\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y$ であり，式 (29) は確かに成り立っている。残り 8 通りは各自で確かめよ。

完全反対称テンソルを使うと，２つのベクトルの外積は

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \sum_{i,j} (A_i \boldsymbol{e}_i) \times (B_j \boldsymbol{e}_j) = \sum_{i,j} A_i B_j \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \sum_{i,j,k} A_i B_j \epsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_k, \tag{31}$$

となる。成分は、

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_k = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} A_i B_j \tag{32}$$

とかける。式 (25) を使えば,

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A})_k = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} A_i A_j = 0, \tag{33}$$

という，自分自身との外積が 0 という式もすぐわかる。

式 (31) を展開すればよく知っている

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \boldsymbol{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \boldsymbol{e}_y + (A_x B_y - A_y B_z) \boldsymbol{e}_z, \tag{34}$$

となることは各自で確認されたし。

3.4 内積と外積の組み合わせ

$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ はスカラーになるが、これは 3 つのベクトルで作られる立体の体積になる。

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \sum_i A_i (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})_i = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k. \tag{35}$$

最右辺の表式をみると，一次独立なベクトルを 3 つ持ってきて，それらの成分を完全反対称テンソルを使って掛け合わせると体積になるということがわかる。これは何次元になっても同じ。

3.5　完全反対称テンソルの公式

しばしば２つ以上の完全反対称テンソルが出てくることがある。その際以下の公式を使うと計算は簡単になる。

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{abc} = \begin{vmatrix} \delta_{ia} & \delta_{ib} & \delta_{ic} \\ \delta_{ja} & \delta_{jb} & \delta_{jc} \\ \delta_{ka} & \delta_{kb} & \delta_{kc} \end{vmatrix}. \tag{36}$$

ベクトル解析ではどれかの添字について和をとったものを使う場合が多いのでそれも書いておくと、

$$\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{abk} = \delta_{ia}\delta_{jb} - \delta_{ib}\delta_{ja}, \tag{37}$$

$$\sum_{j,k} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ajk} = 2\delta_{ia}, \tag{38}$$

$$\sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6. \tag{39}$$

これらを示したければ、全ての組み合わせを試してみれば良い。$3 \times 3 \times 3 = 27$ 通りある。

3.6　外積２つと完全反対称テンソルの公式の有用性

外積１つでもややこしく感じるかもしれないが、$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$ のように２つ連続して外積を取ることがあるこれはベクトルになる。外積を２回計算するのはしんどいが，実はこれは内積を使って計算できるという公式がある。

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}). \tag{40}$$

内積のほうが外積を直接計算するよりも楽なので，この公式は便利そうである。ではこの公式はどう証明するか。もちろん真面目に成分ごとに計算しても良いが、完全反対称テンソルを使うと楽である。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) &= \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_i A_j (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})_k \\ &= \sum_{i,j,k,\ell,m} \epsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_i A_j \epsilon_{k\ell m} B_\ell C_m \\ &= \sum_{i,j,k,\ell,m} \epsilon_{ijk}\epsilon_{k\ell m} \boldsymbol{e}_i A_j B_\ell C_m \\ &= \sum_{i,j,\ell,m} (\delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}) \boldsymbol{e}_i A_j B_\ell C_m \\ &= \sum_{i,j} (\boldsymbol{e}_i A_j B_i C_j - \boldsymbol{e}_i A_j B_j C_i) \\ &= \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}). \end{aligned} \tag{41}$$

公式を覚えるが苦手な人には，このように完全反対称テンソルを使ってその場で公式を作るのが実用的である。

3.7 ベクトル解析の公式は ϵ_{ijk} をつかえば簡単に求められる

さまざまな公式は完全反対称テンソルを使うとすぐ導ける。なので覚えるのではなくその場で導くことが可能になる。もちろん重要な式は覚えておくべきであるが，係数があやふやになったときにはその場で確認したほうが良い。

3.7.1 $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})=0$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) &= \sum_j \partial_j(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})_j \\ &= \sum_j \partial_j\left(\sum_{k,l}\epsilon_{jkl}\partial_k A_l\right) \\ &= \sum_{j,k,l}\epsilon_{jkl}\partial_j\partial_k A_l, \end{aligned} \tag{42}$$

ここで，ϵ_{jkl} は k と l について反対称，$\partial_j\partial_k$ は微分の順番は変えて良いので，k と l について対称，である。対称な添字と反対称な添字の和は 0 になるから，これは 0 となる。よって $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})=0$ が示せた。

3.7.2 $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\phi=0$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\phi &= \sum_{i,j,k}\epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_i\partial_j(\boldsymbol{\nabla}\phi)_k \\ &= \sum_{i,j,k}\epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_i\partial_j\partial_k\phi \\ &=0. \end{aligned} \tag{43}$$

ここで，$\partial_j\partial_k$ は j と k の入れ替えについて対称，ϵ_{ijk} は j と k の入れ替えについて反対称，したがって j,k について和を取ると 0，ということを使った。よって，$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\phi=0$ が示せた。

3.7.3 $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$

これは Maxwell 方程式から，電磁波の式を導くときなどに使う。これを覚えるのは大変なので，こんな感じで毎回求めるのがよい。ただし素早く求められないなら覚えたほうがよい。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) =& \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_i \partial_j (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})_k \\
=& \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_i \partial_j \sum_{l,m} \epsilon_{klm} \partial_l A_m \\
=& \sum_{i,j,k,l,m} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \boldsymbol{e}_i \partial_j \partial_l A_m \\
=& \sum_{i,j,l,m} \left(\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \right) \boldsymbol{e}_i \partial_j \partial_l A_m \\
=& \sum_{i,j} \left(\boldsymbol{e}_i \partial_i \partial_j A_j - \partial_j \partial_j \boldsymbol{e}_i A_i \right) \\
=& \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}.
\end{aligned} \tag{44}$$