

擬南部ゴールドストーン暗黒物質と残存対称性

津村浩二 (九州大学)

2024年7月16日, セミナー@東京理科大学, 野田キャンパス

Pseudo-Nambu-Goldstone dark matter from gauged $U(1)_{B-L}$ symmetry

Y. Abe, T. Toma, K. Tsumura

[JHEP 05 \(2020\) 057](#) [arXiv:2001.03954 \[hep-ph\]](#)

Pseudo-Nambu-Goldstone Dark Matter from Non-Abelian Gauge Symmetry

H. Otsuka, T. Shimomura, K. Tsumura, Y. Uchida, N. Yamatsu

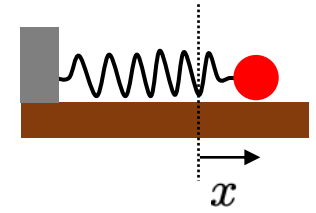
[Phys. Rev. D106, 115033 \(2022\)](#) [arXiv:2210.08696 \[hep-ph\]](#)

目次

- 場の量子論入門
- 対称性の自発的破れと南部ゴールドストンボソン
- 暗黒物質と擬南部ゴールドストンボソン(pNGB)
- $U(1)_{B-L}$ にもとづくpNGB暗黒物質模型
- カイラル対称性と残存対称性
- 暗黒SU(2)にもとづくpNGB暗黒物質模型
- まとめ

場の量子論入門

量子力学の復習



- 調和振動子のハミルトニアン (質量 m , 振動数 ω)

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}\hbar\omega \left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2 \right) \quad \text{無次元化した長さ } \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$$

固有値と固有関数

$$\begin{cases} E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \\ \psi_n = \left\{ \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \right\}^{1/2} H_n(\xi) e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \end{cases}$$

↑ エルミート多項式

基底状態

$$\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}$$

$$H_0(\xi) = 1$$

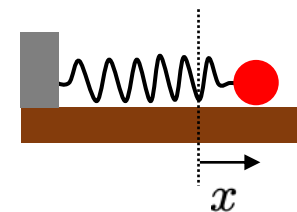
$$H_1(\xi) = 2\xi$$

$$H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$$

$$H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi$$

...

量子力学の復習



- 調和振動子のハミルトニアン (質量 m , 振動数 ω)

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}\hbar\omega \left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2 \right) \quad \text{無次元化した長さ } \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$$

昇降演算子を使った解法

$$\begin{cases} E_n = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \\ \psi_n = (a^\dagger)^n \psi_0 \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi + \frac{d}{d\xi} \right)$$

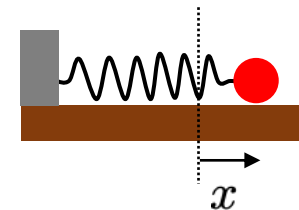
$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{d}{d\xi} \right)$$

基底状態

$$\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \quad \Longleftarrow \quad a\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi + \frac{d}{d\xi} \right) \psi_0 \equiv 0$$

これなら誰でも解ける。後は芋づる式に微分すればよい

量子力学の復習



- 調和振動子のハミルトニアン (質量 m , 振動数 ω)

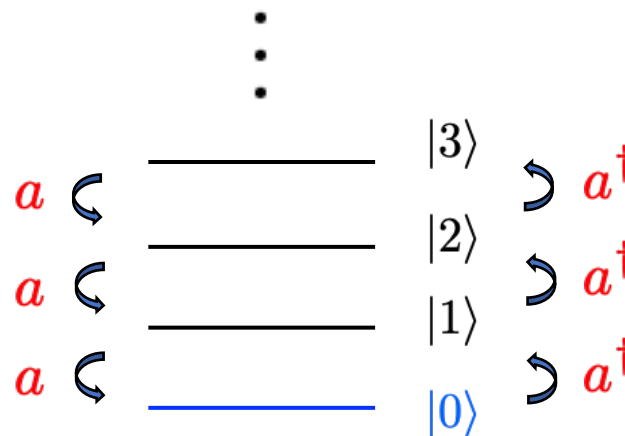
$$\hat{H} = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega$$

昇降演算子の重要な性質

$$[a, a^\dagger] = 1$$

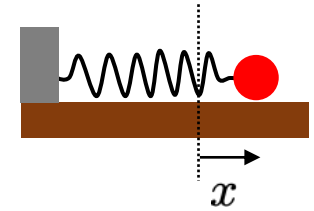
$$[\hat{H}, a] = -\hbar \omega a \quad \text{エネルギーを}\hbar\omega\text{減らす}$$

$$[\hat{H}, a^\dagger] = \hbar \omega a^\dagger \quad \text{エネルギーを}\hbar\omega\text{増やす}$$

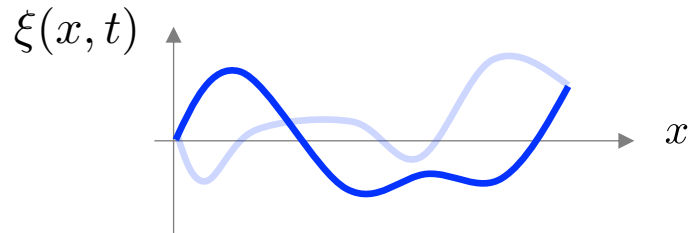


場の量子論では粒子の個数とみなす

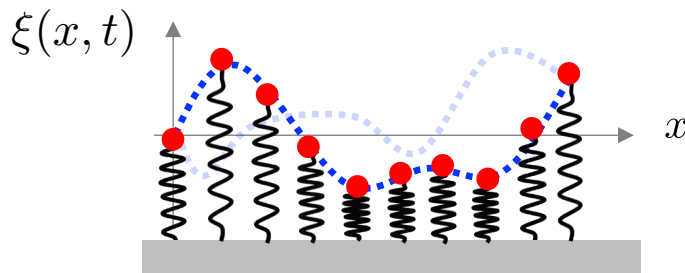
場の理論



- ひもの振動 ひもの場合には実空間での振動であるが, 内部空間の振動の場合もある



- 各点各点で振動するバネの集まりとみなす



隣り合う質点も互いに影響しあってもよい (連成振動)

膜の振動

$$\xi(x, y, t)$$

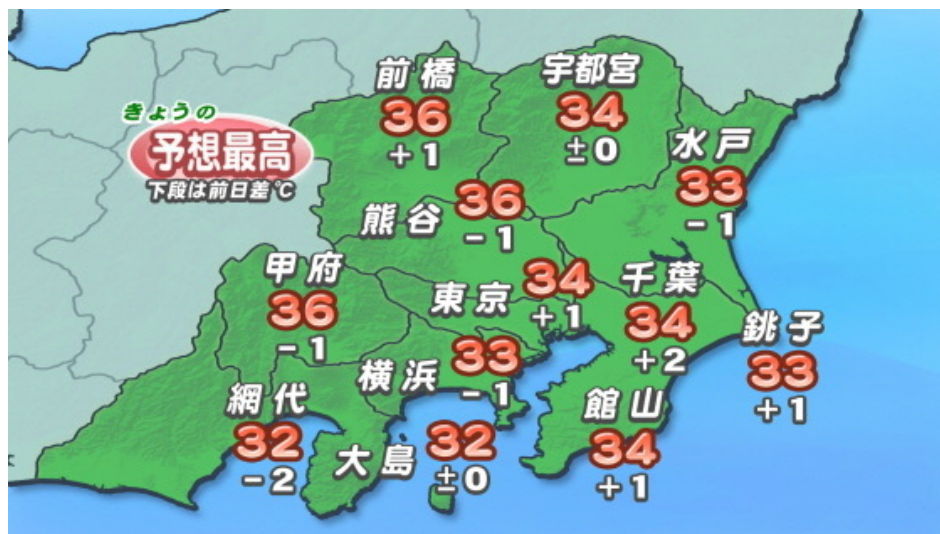
マットレスのイメージ

空間の各点の振動

$$\xi(x, t)$$

例えば, 音波は空気の粗密

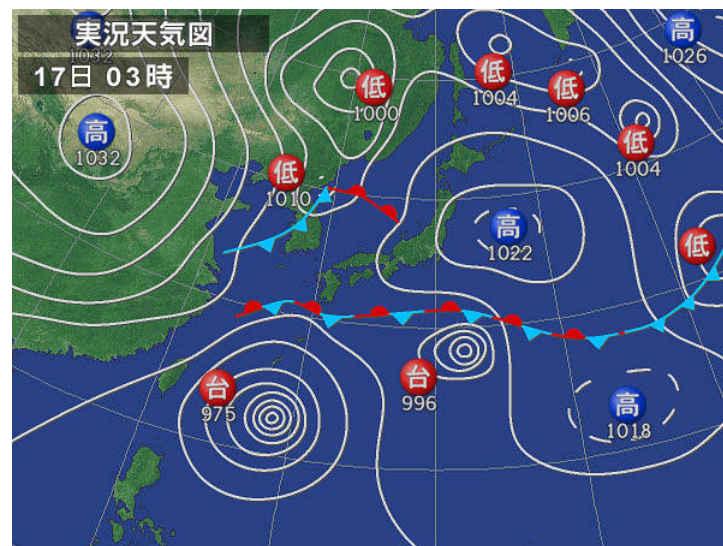
古典場から量子場へ



方向を持たない場
(スカラー場)

電磁気では

スカラーポテンシャルφ



方向を持つ場
(ベクトル場とか)

ベクトルポテンシャル

場を量子化する！ → 場に対応する粒子の生成/消滅を考える

粒子の生成・消滅

$$\phi(x) \sim \int d^4k \left(\textcolor{red}{a} e^{-ikx} + \textcolor{red}{a}^\dagger e^{ikx} \right)$$

粒子を消滅させる 粒子を生成する

自由なスカラー場

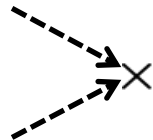
ばね定数に対応する部分が~~粒子の質量~~になる

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \underline{M^2} \phi^2$$

生成消滅演算子に注目すると4タイプ

$$a a, \quad a a^\dagger, \quad a^\dagger a, \quad a^\dagger a^\dagger$$

粒子を2個消す



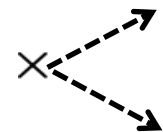
粒子を作って消す



粒子を消して作る



粒子を2個作る



粒子の自由な伝播

粒子の生成・消滅

$$\phi(x) \sim \int d^4k \left(\textcolor{red}{a} e^{-ikx} + \textcolor{red}{a}^\dagger e^{ikx} \right)$$

粒子を消滅させる 粒子を生成する

相互作用するスカラー場

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} M^2 \phi^2 + \textcolor{blue}{\kappa \phi^3} \quad \text{相互作用 (摂動論)}$$

$$\phi^3 \sim (a + a^\dagger)^3 = a^3 + a^2 a^\dagger + a (a^\dagger)^2 + (a^\dagger)^3$$



違う種類の場と相互作用してもよい → 例えば, 電磁場との相互作用

$$e \textcolor{red}{A}^\mu \phi \partial_\mu \phi$$

複素場と位相変換

- 実スカラー場

$$\mathcal{L} = +\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}M^2\phi^2$$

このラグランジアンは Z_2 (反転)の下で不変

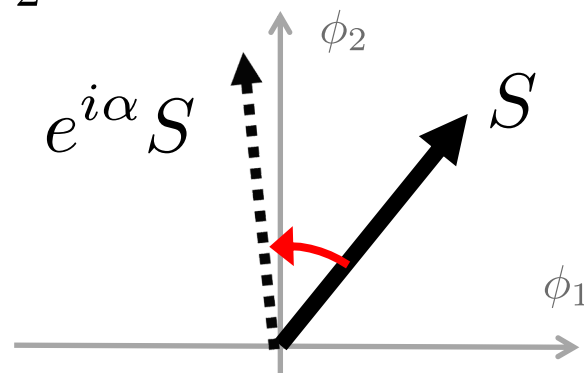
$$\phi \rightarrow -\phi$$

- 複素スカラー場 (同じ質量で2個用意する) $S = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= +\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 - \frac{1}{2}M^2\phi_1^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 - \frac{1}{2}M^2\phi_2^2 \\ &= +\partial_\mu S^*\partial^\mu S - M^2 S^* S\end{aligned}$$

このラグランジアンは位相変換の下で不変

$$S \rightarrow e^{i\alpha} S$$



対称性の自発的破れと 南部ゴールドストーンボソン

対称性の自発的破れ

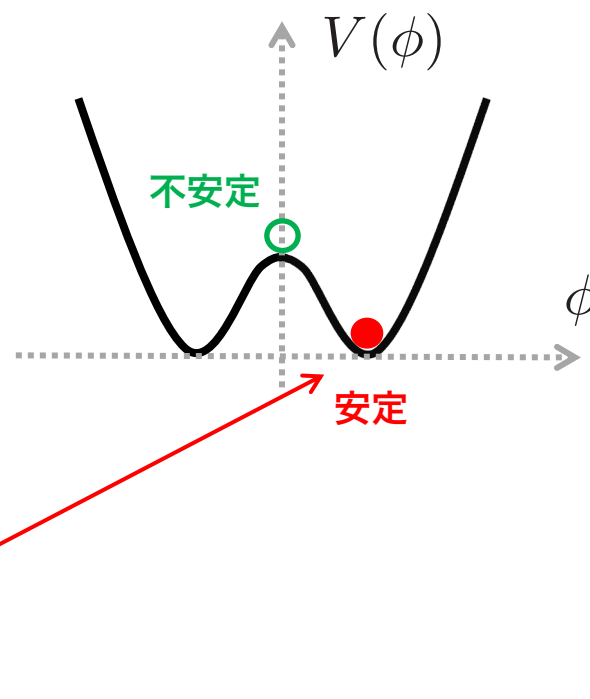
- 実スカラー場を考える

$$V(\phi) = \lambda(\phi^2 - v^2)^2$$

理論は $\phi \rightarrow -\phi$ の対称性を持つ

このポテンシャルは $\phi=0$ の周りで不安定
→ 対称性が自発的に破れる

真空期待値を持つ: $\langle \phi \rangle = v$



我々は $\phi=v$ に住んでいるので対称性に気づかない
(物理を記述するには $\phi \rightarrow v+\phi$ の置き換え)

理論の対称性 $\neq$ この世界の対称性

自発的破れ: 理論は対称性を破っていないが, 真空が対称性を破っている

南部ゴールドストンボソン

- 複素スカラー場を考える

$$V(S^*S) = \lambda \left(S^*S - \frac{v^2}{2} \right)^2$$

理論は $S \rightarrow e^{i\alpha} S$ の対称性を持つ

このポテンシャルは **$\Phi=0$ の周りで不安定**

→ 対称性が自発的に破れる

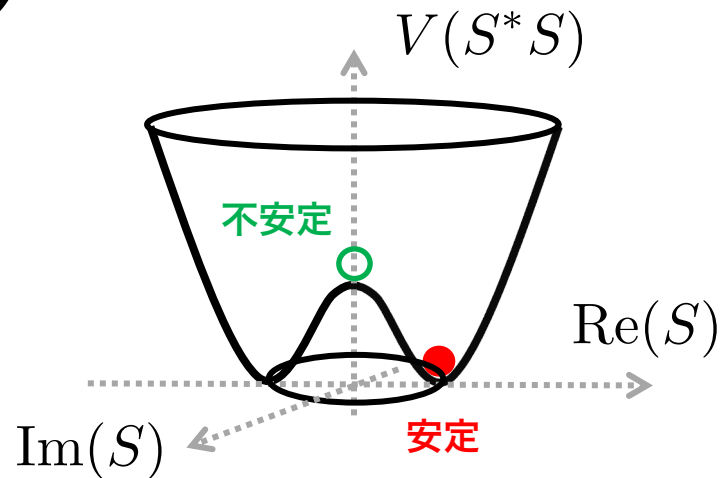
真空期待値を持つ : $\langle S \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}$

$S = \frac{v + \rho + i\eta}{\sqrt{2}}$ と置き換えてみると

$$\begin{aligned} V(S^*S) &= \lambda \left(\frac{(v + \rho)^2 + \eta^2}{2} - \frac{v^2}{2} \right)^2 \\ &= +\frac{1}{2}(2\lambda v^2)\rho^2 + \lambda v\rho^3 + \frac{1}{4}\lambda\rho^4 \\ &\quad + \color{red}{0}\eta^2 + \frac{1}{4}\lambda\eta^4 + \lambda v\rho\eta^2 + \frac{1}{2}\lambda\rho^2\eta^2 \end{aligned}$$

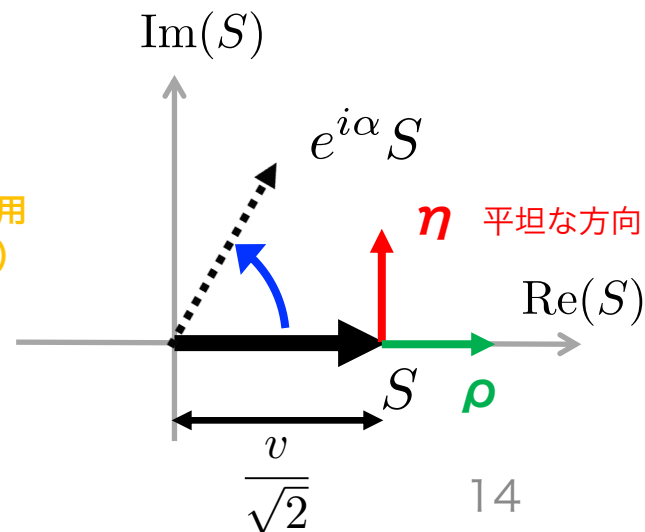
η は質量ゼロ η の自己相互作用 ρ と η の相互作用

ρ の自己相互作用
(ポテンシャル)



軸周りの回転対称性は残る

→ **動径方向の並進対称性が破れた**
= **南部ゴールドストンボソン(NGB)**



自発的でない破れ（陽な破れ）

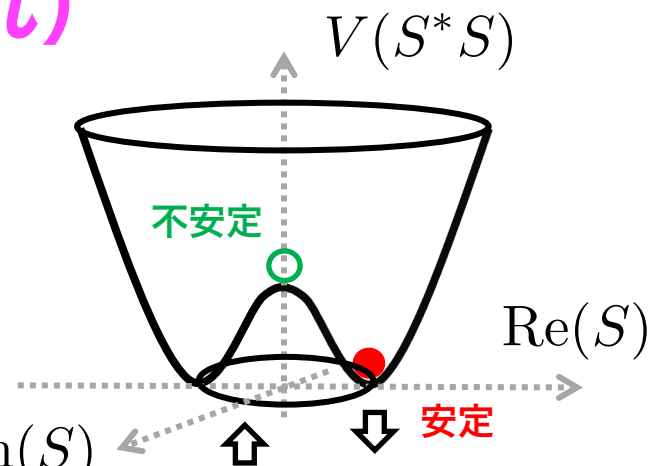
● 追加の項を加える

$$V(S^*S) = \lambda \left(S^*S - \frac{v^2}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} m^2 (S^2 + \text{H.c.})$$

質量次元を持った量に比例している
のでソフトな破れとも言える

$$= -\frac{m^2}{2} \{ \text{Re}(S)^2 - \text{Im}(S)^2 \}$$

実軸方向に2次関数で下がる
(虚軸方向に2次関数で上がる)



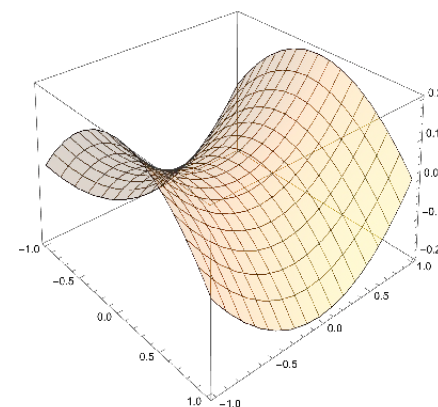
平坦な方向がなくなる！

追加の分だけ真空期待値の位置がズれる $v \rightarrow \bar{v} = \sqrt{v^2 + \frac{m^2}{2\lambda}}$

$S = \frac{\bar{v} + \rho + i\eta}{\sqrt{2}}$ と置き換えてみると

$$V(S^*S) = +\frac{1}{2} (2\lambda \bar{v}^2) \rho^2 + \lambda \bar{v} \rho^3 + \frac{1}{4} \lambda \rho^4$$

$$+ \frac{1}{2} m^2 \eta^2 + \frac{1}{4} \lambda \eta^4 + \lambda \bar{v} \rho \eta^2 + \frac{1}{2} \lambda \rho^2 \eta^2 + \text{const.}$$



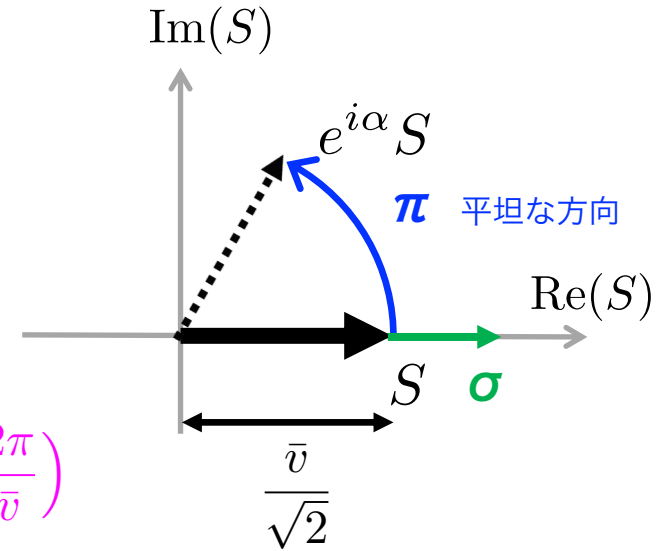
陽な破れからNGBが質量を獲得！ ➡ 擬NGB = pseudo NGB (pNGB)

非線形表現

- 場を**極座標表示**する $S = \frac{\bar{v} + \sigma}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{v}}$

$$V(S^* S) = \lambda \left(S^* S - \frac{v^2}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} m^2 (S^2 + \text{H.c.})$$

$$= \frac{\lambda}{4} \left((\bar{v} + \sigma)^2 - v^2 \right)^2 - m^2 (\bar{v} + \sigma)^2 \cos \left(\frac{2\pi}{\bar{v}} \right)$$



対称な項からは**位相場** π のポテンシャル（相互作用）は出ない

追加の項からは**位相場** π の質量と相互作用が出てくる

$$= +\frac{1}{2} (2\lambda \bar{v}^2) \sigma^2 + 2\lambda \bar{v} \sigma^3 + \frac{1}{4} \lambda \sigma^4 \quad \sigma \text{ は質量は } \rho \text{ と同じ}$$

$$+ \frac{1}{2} m^2 \pi^2 - \frac{m^2}{6\bar{v}^2} \pi^4 + \mathcal{O}(\pi^6) \quad \pi \text{ は質量ゼロ} = \text{NGB}$$

南部ゴールドストンの定理は座標の取り方に依らない

$$+ \frac{m^2}{\bar{v}} \sigma \pi^2 + \frac{m^2}{2\bar{v}^2} \sigma^2 \pi^2 + \mathcal{O}(\sigma \pi^4) + \dots$$

デカルト座標でも極座標でも物理は同じ

(ただし見かけの相互作用は異なる)

NGBの微分相互作用（非線形表示）

- 運動項からも相互作用がでる

$$\begin{aligned}(\partial_\mu S)(\partial^\mu S) &= +\frac{1}{2}\partial_\mu\rho\partial^\mu\rho + \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta \\&= +\partial_\mu\left((\bar{v} + \sigma)e^{-i\pi/\bar{v}}\right)\partial^\mu\left((\bar{v} + \sigma)e^{i\pi/\bar{v}}\right) \\&= +\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \underbrace{\left(1 + \frac{\sigma}{\bar{v}}\right)^2}_{\sigma\pi\pi\text{相互作用は微分型}}\partial_\mu\pi\partial^\mu\pi\end{aligned}$$

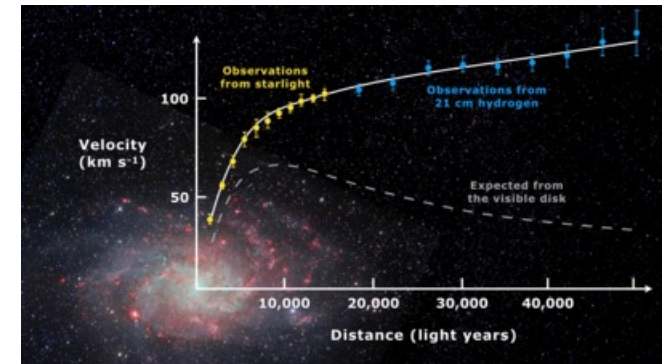
$\sigma\pi\pi$ 相互作用は微分型

→ 特徴づけるエネルギー（運動量）が相互作用の強さを変える

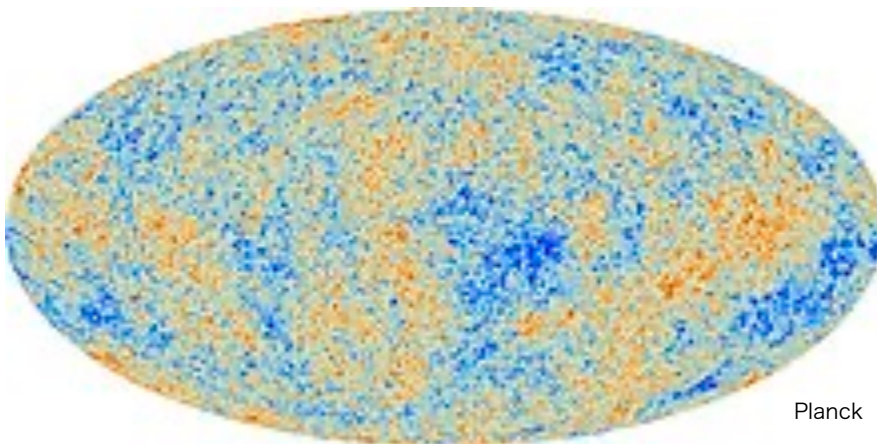
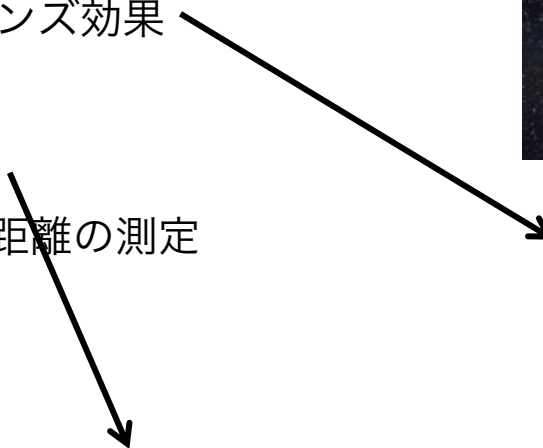
暗黒物質

暗黒物質はある

- 銀河の回転曲線
- 銀河の速度分散
- クラスター銀河の重力レンズ効果
- バリオン音響振動
- 宇宙マイクロ波背景放射
- タイプIa型超新星による距離の測定
- Lyman-Alpha Forest
- 宇宙の構造形成



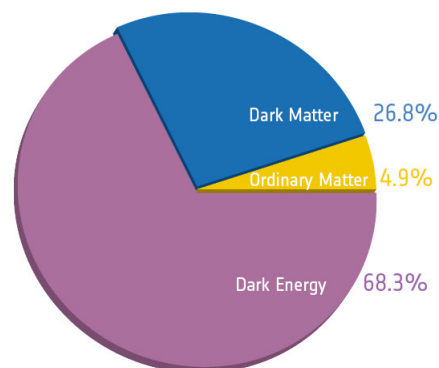
https://en.wikipedia.org/wiki/Galaxy_rotation_curve



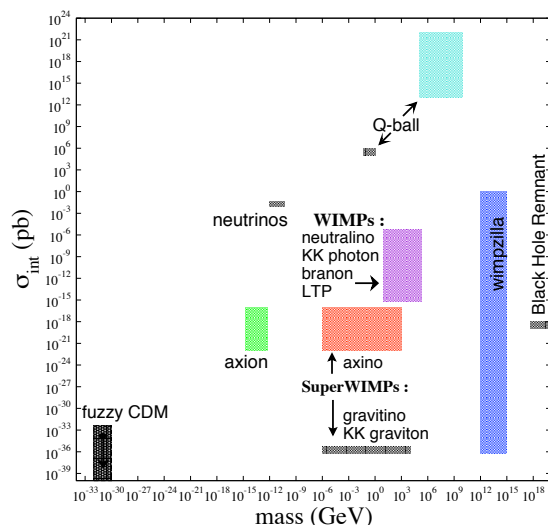
https://en.wikipedia.org/wiki/Dark_matter

暗黒物質の性質

- 安定 (宇宙年齢より長寿命)
- 電氣的に中性
- 宇宙のエネルギー密度の27%
- 非相対論的 (冷たい)



Some Dark Matter Candidate Particles



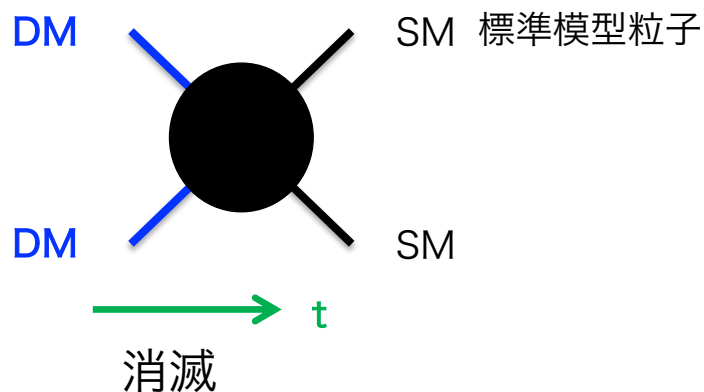
暗黒物質の候補

- ✓ 原始ブラックホール
- ~~✗ ニュートリノ (熱い)~~
- ✓ **WIMP [Weakly Interacting Massive Particle]**
- ✓ SIMP
- ✓ アクシオン, アクシオンクラスター
- ✓ ソリトン (電弱スキルミオン, Q-ball, B-ball, ...)
- ✓ 超質量残骸 (WIMPzilla, ...)
- ✓ ...

WIMP暗黒物質

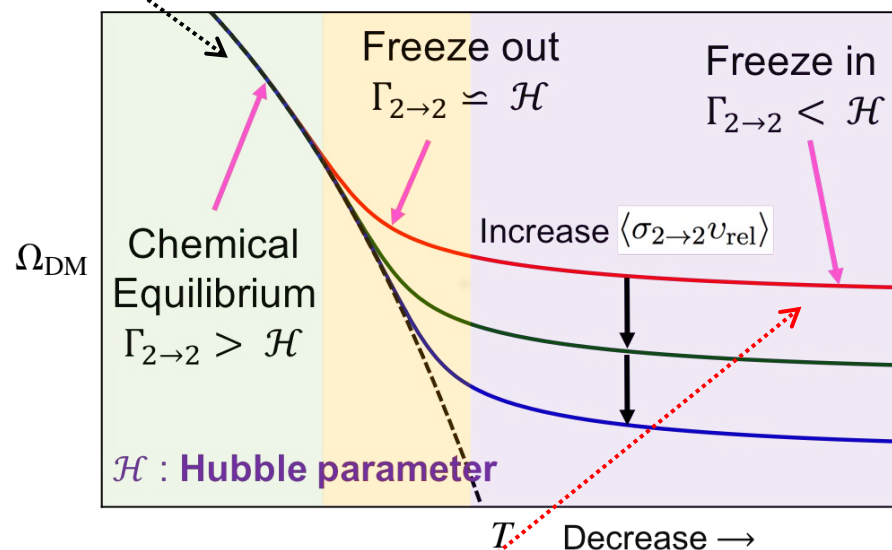
- 化学平衡中に熱的に生成される

- 残存量の凍結



$$\dot{n} + 3Hn = -(n^2 - n_{\text{eq}}^2) \langle \sigma_{2 \rightarrow 2} v_{\text{rel}} \rangle$$

$$\Gamma_{2 \rightarrow 2} = n_{\text{DM}} \langle \sigma_{2 \rightarrow 2} v_{\text{rel}} \rangle$$

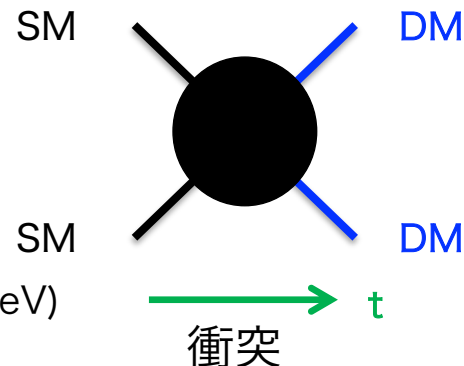


$$\langle \sigma_{2 \rightarrow 2} v_{\text{rel}} \rangle \equiv \frac{\alpha_{2 \rightarrow 2}^2}{M_{\text{DM}}^2} \Rightarrow \Omega_{\text{DM}} \simeq \frac{0.1 \text{ pb}}{\langle \sigma_{2 \rightarrow 2} v_{\text{rel}} \rangle}$$

暗黒物質探索

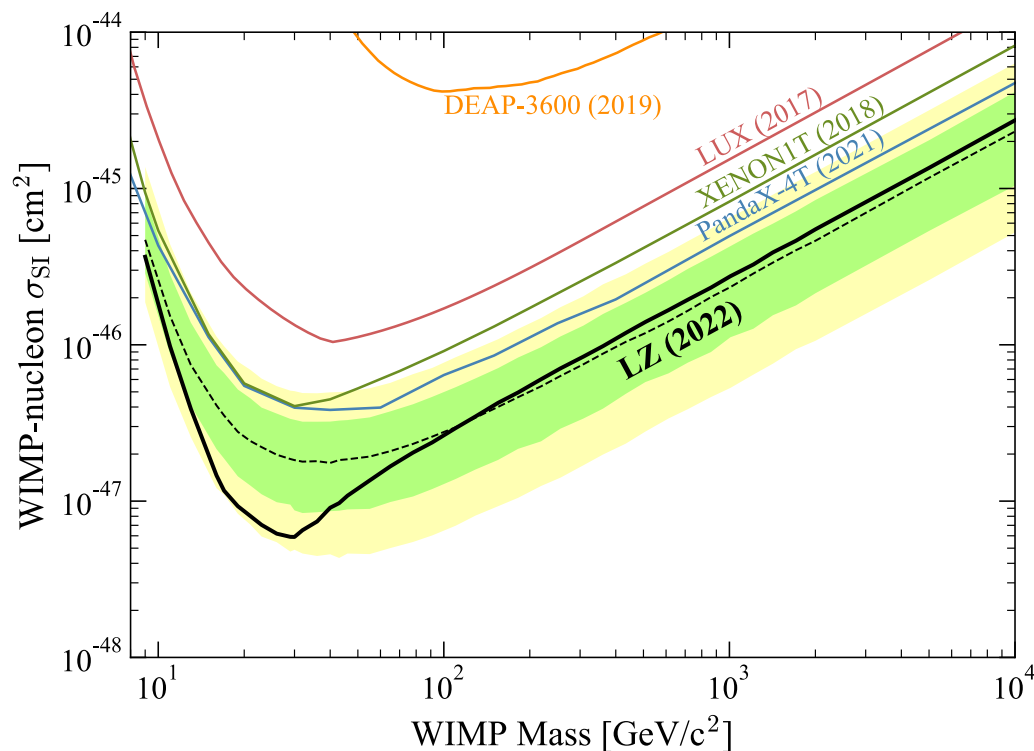
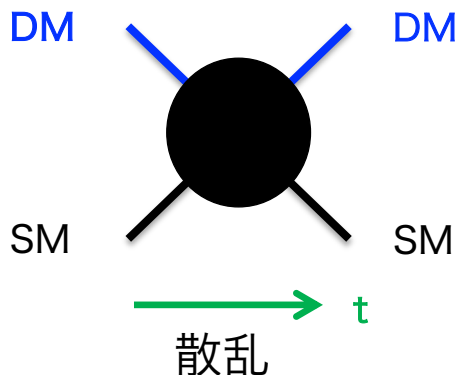
● 加速器による探索

標準模型粒子を衝突させて暗黒物質を生成 (cf. LHC エネルギー 14TeV)



● 直接検出

暗黒物質がSM粒子と散乱



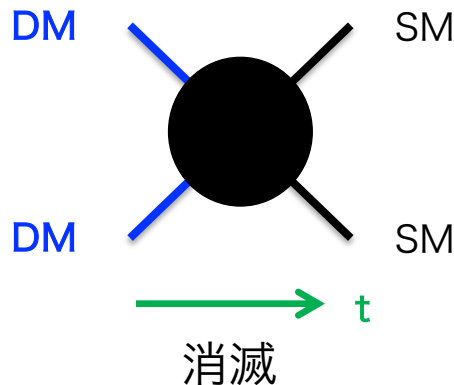
散乱断面積の制限が次第に強くなっている一方で、
残存量を凍結させるための断面積は決まっている!!

pNGB暗黒物質

pNGB暗黒物質

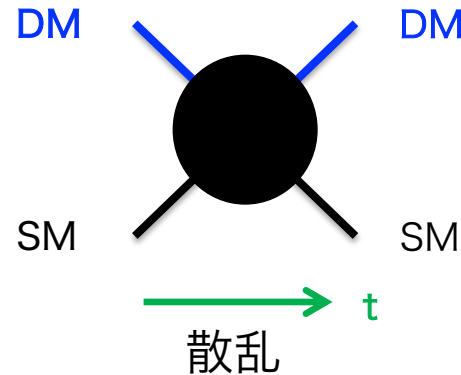
- 対称性の自発的破れと陽な破れに伴う pNGB
- (速度で抑制された) 微分相互作用

残存量の凍結



$$E_{\text{ann}} \sim 2M_{\text{DM}} c^2$$

直接検出



$$E_{\text{recoil}} \sim \frac{1}{2} M_{\text{DM}} v_{\text{DM}}^2$$

直接検出を自然に抑制しつつも、消滅断面積は保つ

直接検出が抑制される理由

陽なU(1)_sの破れ

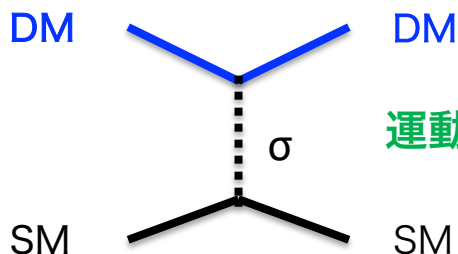
- オリジナル模型 : $V(H, S) = -\mu_H^2 |H|^2 - \mu_S^2 |S|^2 - \frac{1}{4} m^2 (S^2 + \text{H.c.})$
 $+ \lambda_H |H|^4 + \frac{\lambda_S}{2} |S|^4 + \lambda_{HS} |H|^2 |S|^2$

- 非線形表現で考える

$$S = \frac{v_S + \sigma}{\sqrt{2}} e^{i\pi_{\text{DM}}/v_S}$$

- DM-DM-Higgs結合の構造

$$\mathcal{L} = +\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sigma}{v_S} \right)^2 \underbrace{(\partial_\mu \pi_{\text{DM}} \partial^\mu \pi_{\text{DM}})}_{\text{運動項から}} - \underbrace{m_{\text{DM}}^2 \pi^2}_{\text{ポテンシャルから}} + \mathcal{O}(\pi^4)$$



運動方程式を満たすDMについては相互作用が消える

オリジナル模型の不満点

C. Gross, O. Lebedev, T. Toma, *Phys.Rev.Lett.* 119 (2017) 19, 191801, *Cancellation Mechanism for Dark-Matter–Nucleon Interaction*

- NGB模型に“手で”質量項だけを加えている

一般にはU(1)を破る項がたくさん書ける

$$V(S) = -\mu_S^2(S^*S) + \lambda_S(S^*S)^2 + \left\{ -\frac{1}{4}m^2S^2 + \cancel{\kappa S^3} + \cancel{\kappa'(S^*S)S} + \cancel{\lambda S^4} + \cancel{\lambda'(S^*S)S^2} + \text{H.c.} \right\}$$

Z_2 で禁止できる項 $U(1)$ をハードに破る項

すなわち, $U(1)$ をソフトに破る Z_2 模型である

- ドメインウォール問題 (Z_2 を自発的に破ってはいけない)
- グローバル対称性は量子重力と矛盾

$U(1)_{B-L}$ にもとづく pNGB 暗黒物質模型

UV模型

Pseudo-Nambu-Goldstone dark matter from gauged $U(1)_{B-L}$ symmetry

Y. Abe, T. Toma, K. Tsumura

[JHEP 05 \(2020\) 057](#) [hep-ph/2001.03954](#)

- ゲージ化した $U(1)_{B-L}$ (シーソー機構によるニュートリノ質量の説明では定番のシナリオ)

	Q_L	L	u_R^c	d_R^c	e_R^c	ν_R^c	H	S_1	S_2
$SU(3)_c$	3	1	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	1	1	1	1	1
$SU(2)_W$	2	2	1	1	1	1	2	1	1
$U(1)_Y$	+1/6	-1/2	-2/3	+1/3	+1	0	+1/2	0	0
$U(1)_{B-L}$	+1/3	-1	-1/3	-1/3	+1	+1	0	+1	+2

- 模型構築のアイデア $V_{\text{sym}} = V_1(S_1^* S_1) + V_2(S_2^* S_2)$

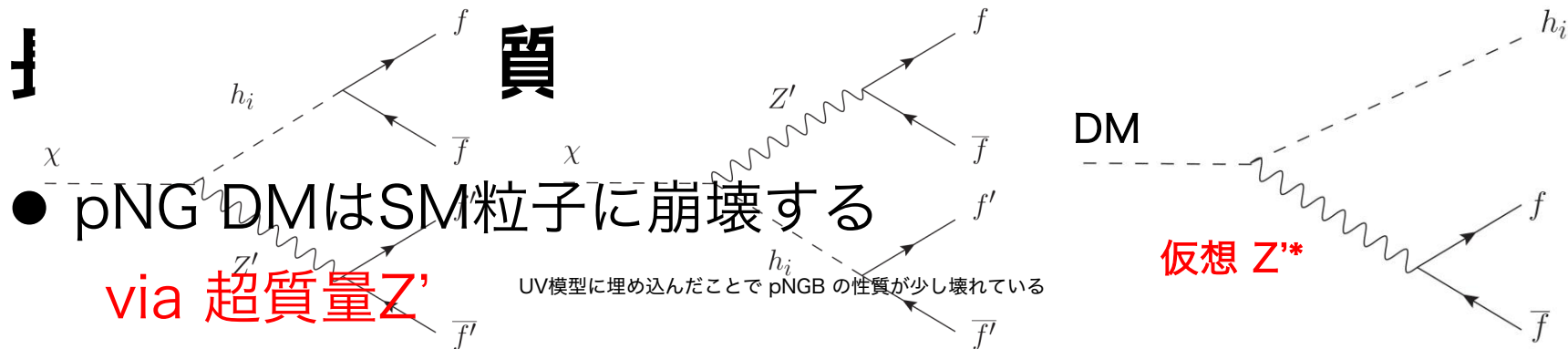
$U(1)_1 \times U(1)_2 \rightarrow \text{None}$ κ なし $\rightarrow$ 2 NGB (1個は Z_{B-L} が吸収, 残り1個は質量を持たないNGB)

$\Downarrow \kappa$

$U(1)_{B-L} \rightarrow \text{None}$ κ あり $\rightarrow$ 1 NGB (1個は Z_{B-L} が吸収 + 質量を持つNGB = pNGB)

$$V_{\text{soft-breaking}} = \kappa S_2^* S_1^2 + \text{H.c.} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} m_{\text{DM}}^2 \pi_{\text{DM}}^2 \quad (m_{\text{DM}}^2 \propto \kappa)$$

κ を通じて, $U(1)_1$ と $U(1)_2$ が, $U(1)_{B-L}$ のグローバルな部分群として同一視される

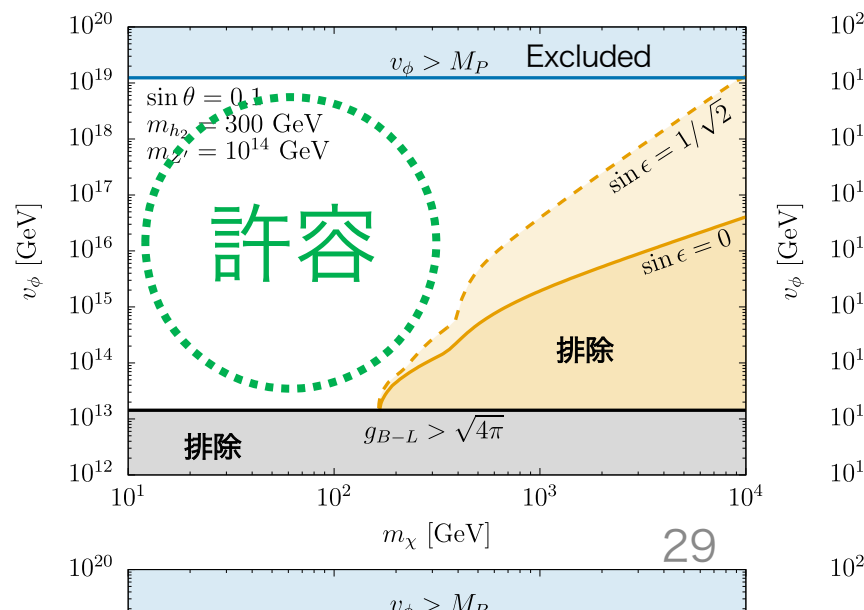


● 暗黒物質の寿命 $\tau_{\text{DM}} \simeq \frac{1}{M_{Z'}^4} 10^{27} \text{ s} > 10^{27} \text{ sec}$

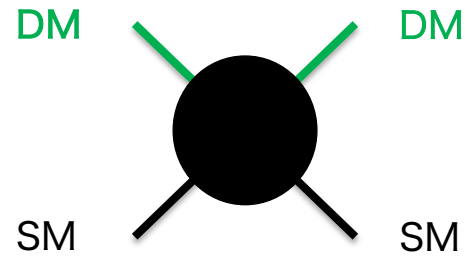
安定性 (長寿命性) 制限

$\Rightarrow M_{Z'} > 10^{13} \text{ GeV}$ for $M_{\text{DM}} < 1 \text{ TeV}$

超高エネルギーの新物理スケールを暗示



U(1)_{B-L} 模型の不満点



- 直接検出の抑制には3つのヒッグスが寄与

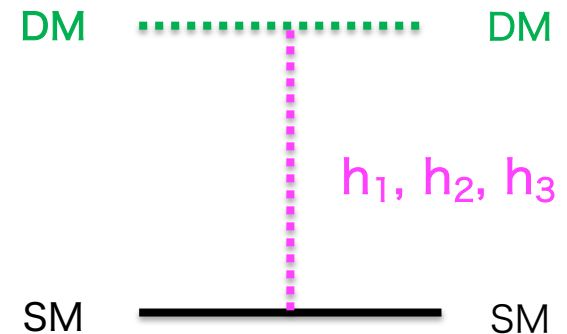
$$m_{h_1}^2 \approx \lambda_H^2 v_{EW}^2 - \frac{\lambda_{H2}^2 \lambda_1 - 2\lambda_{H1} \lambda_{12} + \lambda_2 \lambda_{H1}^2}{\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_{12}^2} v_{EW}^2 \quad \leftarrow 125 \text{ GeV ヒッグス}$$

$$m_{h_2}^2 \approx \frac{\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_{12}^2}{\lambda_2} v_1^2 + \frac{(\lambda_2 \lambda_{H1} - \lambda_{H2} \lambda_{12})^2}{\lambda_2 (\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_{12}^2)} v_{EW}^2 \quad \leftarrow 2^{\text{nd}} \text{ ヒッグス}$$

$$m_{h_3}^2 \approx \lambda_2 v_2^2 \quad \leftarrow 3^{\text{rd}} \text{ (超重) ヒッグス}$$

➔ 真空期待値の階層性問題

$$v_1^2 \ll v_2^2$$



- DMの安定性を保つためには v_2 は超高エネルギー
- DMの残存量を合わせるには $v_1 \approx v_{EW}$ (相互作用の大きさ: m_{DM}^2/v_1)

阿部-濱田 模型

T. Abe, Y. Hamada, PTEP(2023), *A model of pNG DM from a softly broken SU(2) global symmetry with a U(1) gauge symmetry*

- pNGBの質量は対称性で制御 $\phi \rightarrow e^{iT_a \theta_g^a} e^{i\theta} \phi$

$$V(S) = -\mu_S^2(\phi^\dagger \phi) + \lambda_\phi(\phi^\dagger \phi)^2 + m_{\text{DM}}^2(\phi^\dagger T_3 \phi)$$

SU(2)_gをソフトにU(1)_gに破る模型

- DMは安定 (グローバル対称性の荷量を持つ)
- ドメインウォール問題なし
- グローバル対称性 U(1)_g を仮定 (量子重力と整合しない?)
- 荷電共役対称性を仮定 (kinetic mixingを切るため) $\phi \rightarrow \phi^*, V_\mu \rightarrow -V_\mu$
- Asymptotic non-free

余計な仮定を排除したい！ゲージ対称性のみで説明したい！

カイラル対称性と残存対称性

質量はカイラル対称性を破る

● Dirac ラグランジアン

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - \cancel{M})\Psi \quad \text{質量を無視すると左巻きと右巻きの場は独立}$$

$$= i\bar{\Psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_L + i\bar{\Psi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_R - \cancel{M(\bar{\Psi}_L\Psi_R + \bar{\Psi}_R\Psi_L)}$$

2つの異なる位相変換 (対称性) の下で不変: $U(1)_L \times U(1)_R$

$$\begin{array}{ll} \text{左巻き数} & \begin{cases} \Psi_L \rightarrow e^{i\theta_L}\Psi_L \\ \Psi_R \rightarrow \Psi_R \end{cases} \\ \text{右巻き数} & \begin{cases} \Psi_L \rightarrow \Psi_L \\ \Psi_R \rightarrow e^{i\theta_R}\Psi_R \end{cases} \end{array}$$

位相変換を取り直すこともできる: $U(1)_V \times U(1)_A$

$$\begin{array}{ll} \text{同じ方向に回す} & \begin{cases} \Psi_L \rightarrow e^{i\theta_V}\Psi_L \\ \Psi_R \rightarrow e^{i\theta_V}\Psi_R \end{cases} \\ \text{逆方向に回す} & \begin{cases} \Psi_L \rightarrow e^{-i\theta_A}\Psi_L \\ \Psi_R \rightarrow e^{i\theta_A}\Psi_R \end{cases} \end{array}$$

質量があっても保たれる対称性
(ψ数: バリオン数)

質量があると破れている対称性
(カイラル対称性)

カイラル対称性とその破れ：U(1)

- 質量を禁止しなくて済むように複素スカラー場を導入

$$\mathcal{L} = i \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L + i \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_R - y(\phi \bar{\Psi}_L \Psi_R + \phi^* \bar{\Psi}_R \Psi_L)$$

~~2つの異なる位相変換 (対称性) の下で不変：U(1)_L × U(1)_R~~

$$\text{左巻き数} \quad \begin{cases} \Psi_L \rightarrow e^{i\theta_L} \Psi_L \\ \Psi_R \rightarrow \Psi_R \\ \phi \rightarrow e^{i\theta_L} \phi \end{cases}$$

$$\text{右巻き数} \quad \begin{cases} \Psi_L \rightarrow \Psi_L \\ \Psi_R \rightarrow e^{i\theta_R} \Psi_R \\ \phi \rightarrow e^{-i\theta_R} \phi \end{cases}$$

模型には左巻きの対称性のみを要請したが、
右巻きの対称性も偶発的に実現している

真空は両方の対称性を破る： $\phi \rightarrow \langle \phi \rangle$

保たれる対称性
(Ψ 数：バリオン数)

U(1)対称性の組み換え

2つの異なる位相変換 (対称性) の下で不変 : $U(1)_L \times U(1)_R$

左巻き数 $\begin{cases} \Psi_L \rightarrow e^{i\theta_L} \Psi_L \\ \Psi_R \rightarrow \Psi_R \\ \phi \rightarrow e^{i\theta_L} \phi \end{cases}$

右巻き数 $\begin{cases} \Psi_L \rightarrow \Psi_L \\ \Psi_R \rightarrow e^{i\theta_R} \Psi_R \\ \phi \rightarrow e^{-i\theta_R} \phi \end{cases}$

位相変換の組み換え

	Ψ_L	Ψ_R	ϕ
$U(1)_L$	+1	0	+1
$U(1)_R$	0	+1	-1
$U(1)_V = U(1)_\Psi$	+1	+1	0
$U(1)_A = U(1)_{\Psi 5}$	1	-1	+2

VEVは $U(1)_L$ と $U(1)_R$ のどちらも破る

Q_L

Q_R

$Q_V = Q_L + Q_R$

$Q_A = Q_L - Q_R$

$U(1)_V$ は破れない

(残存対称性)

線形結合を取り直してみると破れたのは $U(1)_A$

(NGボソン=アクシオン)

ゲージ対称性の破れと残存対称性

● 左巻き対称性をゲージ化 (NGボソンを吸わせる)

$$\mathcal{L} = i \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L + i \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_R - y(\phi \bar{\Psi}_L \Psi_R + \phi^* \bar{\Psi}_R \Psi_L)$$

局所位相変換 (対称性) の下で不変 : $U(1)_L$

$$\begin{cases} \Psi_L \rightarrow e^{i\theta_L(x)} \Psi_L \\ \Psi_R \rightarrow \Psi_R \\ \phi \rightarrow e^{i\theta_L(x)} \phi \end{cases}$$

2つの大域的位相変換 (対称性) の下でも不変 : $U(1)_L \times U(1)_R$

左巻き数

$$\begin{cases} \Psi_L \rightarrow e^{i\theta_L} \Psi_L \\ \Psi_R \rightarrow \Psi_R \\ \phi \rightarrow e^{i\theta_L} \phi \end{cases}$$

右巻き数

$$\begin{cases} \Psi_L \rightarrow \Psi_L \\ \Psi_R \rightarrow e^{i\theta_R} \Psi_R \\ \phi \rightarrow e^{-i\theta_R} \phi \end{cases}$$

ゲージ対称性が破れた場合でも $U(1)_V$ が残る

カイラル対称性とその破れ：SU(2)

- フェルミオンを2成分場に拡張 $\Psi_L = \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}, \quad \Psi_R = \begin{pmatrix} t_R \\ b_R \end{pmatrix}$

注意：標準模型では右巻き場の上成分とした成分は独立

$$\mathcal{L} = i \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L + i \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_R - y(\bar{\Psi}_L \Sigma \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Sigma^\dagger \Psi_L)$$

複素スカラー場 Σ は 2×2 行列

2つの異なる位相変換 (対称性) の下で不変：SU(2)_L x SU(2)_R

$$\begin{array}{ll} \text{左巻きSU(2)} & \left\{ \begin{array}{l} \Psi_L \rightarrow U_L \Psi_L \\ \Psi_R \rightarrow \Psi_R \\ \Sigma \rightarrow U_L \Sigma \end{array} \right. \\ \text{右巻きSU(2)} & \left\{ \begin{array}{l} \Psi_L \rightarrow \Psi_L \\ \Psi_R \rightarrow U_R \Psi_R \\ \Sigma \rightarrow \Sigma U_R^\dagger \end{array} \right. \end{array}$$

コメント：標準模型ではSU(2)_L x U(1)_Y [SU(2)_Rの3方向+全体の位相変換] がゲージ化されている

$$Y = T_{3R} + \frac{1}{6} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Y(Q_L) = +\frac{1}{6} \\ Y(t_R) = +\frac{2}{3} = +\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \\ Y(b_R) = -\frac{1}{3} = +\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \end{cases}$$

SU(2)対称性の組み換え

別のSU(2)変換でもいい：SU(2)_V × SU(2)_A

同じ方向に回す

$$\begin{cases} \Psi_L \rightarrow U \Psi_L \\ \Psi_R \rightarrow U \Psi_R \\ \Sigma \rightarrow U \Sigma U^\dagger \end{cases}$$

逆方向に回す

$$\begin{cases} \Psi_L \rightarrow V \Psi_L \\ \Psi_R \rightarrow V^\dagger \Psi_R \\ \Sigma \rightarrow V \Sigma V \end{cases}$$

真空期待値は SU(2)_L × SU(2)_R の両方の対称性を破る： $\Sigma \rightarrow \langle \Sigma \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

標準模型では自動的に単位行列に比例する期待値

→ SU(2)_Aのみ破れる

	Ψ_L	Ψ_R	ϕ
$SU(2)_L$	2	1	2
$SU(2)_R$	1	2	2
$SU(2)_V$	2	2	1 + 3
$SU(2)_A$	2	2	1 + 3

残ったSU(2)_Vで粒子が分類できる

カストディアル対称性と呼ばれる

標準模型のヒッグスセクターの対称性

- 2×2 の Σ を使って運動項とポテンシャルを書き換え

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \phi^{0*} & \phi^+ \\ -\phi^- & \phi^0 \end{pmatrix} = (\tilde{H} \ H) \quad \begin{cases} H = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_2 + i\varphi_3 \\ \varphi_0 + i\varphi_1 \end{pmatrix} \\ \tilde{H} = i\sigma_2 H^* = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix} (= \varepsilon H^*) \end{cases}$$

真空期待値は単位行列に比例

$$H^\dagger H = |\phi^0|^2 + \phi^+ \phi^- = \varphi_0^2 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = \frac{1}{2} \text{Tr}(\Sigma^\dagger \Sigma)$$

大域的な $\text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R$ 対称性が明らか $\Sigma \rightarrow U_L \Sigma U_R^\dagger$

$$\begin{aligned} & (D_\mu H)^\dagger (D^\mu H) + \mu_H^2 (H^\dagger H) - \lambda_H (H^\dagger H)^2 \\ &= \text{Tr}[(D_\mu \Sigma)^\dagger (D^\mu \Sigma)] + \frac{\mu_H^2}{2} \text{Tr}[\Sigma^\dagger \Sigma] + \frac{\lambda_H}{4} (\text{Tr}[\Sigma^\dagger \Sigma])^2 \end{aligned}$$

$$D_\mu \Sigma = \partial_\mu \Sigma - i g W_\mu^a \frac{\tau^a}{2} \Sigma + i g' \Sigma B_\mu \frac{\tau^3}{2}$$

対称性の自発的破れ

● $O(4) \rightarrow O(3)$

$$H^\dagger H = |\phi^0|^2 + \phi^+ \phi^- = \underbrace{\varphi_0^2 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2}_{\text{4成分を自由に回す } O(4) \text{ 対称性}} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\Sigma^\dagger \Sigma)$$

4成分を自由に回す $O(4)$ 対称性 $O(4) \simeq SU(2) \times SU(2)$

ローレンツ群を思い出すと良い

電弱対称性の破れ

$$\Rightarrow (\langle \varphi_0 \rangle + \varphi_0)^2 + \underbrace{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2}_{\text{3成分を自由に回す } O(3) \text{ 対称性}} \quad \text{3 } SU(2)_V$$

1 $SU(2)_V$ **3成分を自由に回す $O(3)$ 対称性** $O(3) \simeq SU(2)$

ヒッグスは一重項, NGBは三重項 (W/Zも三重項→質量は縮退)

真空期待値の言葉で $SU(2)_V$ が残っていることも見て取れる

$$\langle \Sigma \rangle \rightarrow U \langle \Sigma \rangle U^\dagger = \langle \Sigma \rangle, \quad \langle \Sigma \rangle \rightarrow V \langle \Sigma \rangle V \neq \langle \Sigma \rangle,$$

対称性の陽な破れと自発的破れ

● ゲージ相互作用

$$\begin{aligned} & \bar{Q}_L i \not{D} Q_L + \bar{u}_R i \not{D} u_R + \bar{d}_R i \not{D} d_R \\ &= \bar{Q}_L i \not{D} Q_L + \bar{u}_R i \gamma^\mu \left\{ \partial_\mu - i g' B_\mu \left(+ \frac{2}{3} \right) \right\} u_R + \bar{d}_R i \gamma^\mu \left\{ \partial_\mu - i g' B_\mu \left(- \frac{1}{3} \right) \right\} d_R \\ &= \bar{Q}_L i \not{D} Q_L + \bar{Q}_R i \gamma^\mu \left\{ \partial_\mu - i g B_\mu \left(\frac{1}{6} \mathbf{1}_{2 \times 2} + \frac{\tau^3}{2} \right) \right\} Q_R \end{aligned}$$

$\text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R$ の陽な破れ $\rightarrow \text{U}(1)_V$

Q. 標準模型の残存対称性は？ $\text{U}(1)_V$ は何か？

答え合わせ

	$U(1)_V$
$W_\mu^\pm$	± 1
$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$ u_R d_R $L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L^- \end{pmatrix}$ e_R	$\begin{pmatrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $\begin{pmatrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $-\frac{1}{2}$
$H = \begin{pmatrix} w^+ \\ \frac{v_H + h + iz}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix}$

既知の対称性の組み合わせ

$$Q_V = Q_{\text{EM}} + \frac{B + L}{2}$$

暗黒SU(2)にもとづくpNGB暗黒物質模型

暗黒SU(2)模型

- 厳密な暗黒カストディアル対称性が得られる

→ 暗黒物質の安定性に使えないか？

- $U(1)_{B-L}$ 模型を模倣して $SU(2)_D$ 模型を構築する

S_1 S_2

	Q_L	L	u_R^c	d_R^c	e_R^c	ν_R^c	H	Σ_2	Σ_3
$SU(3)_c$	3	1	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	1	1	1	1	1
$SU(2)_W$	2	2	1	1	1	1	2	1	1
$U(1)_Y$	+1/6	-1/2	-2/3	+1/3	+1	0	+1/2	0	0
$SU(2)_D$	1	1	1	1	1	1	1	2	3

$SU(2)_D$ ゲージ変換性

$$\begin{cases} H \rightarrow H & \text{自明な表現 (SMヒッグスは変換しない)} \\ \Sigma_2 \rightarrow U_D \Sigma_2 & \text{基本表現} \\ \Sigma_3 \rightarrow U_D \Sigma_3 U_D^\dagger & \text{随伴表現} \end{cases}$$

暗黒ヒッグスポテンシャル

- “ κ 項”(Σ_2 と Σ_3 が結合する項)がない部分

$$V(\Sigma_2, \Sigma_3) = -\frac{\mu_2^2}{2} \text{Tr}(\Sigma_2^\dagger \Sigma_2) - \frac{1}{2} \mu_3^2 \text{Tr}(\Sigma_3^2) \\ + \frac{\lambda_2}{4} \left(\text{Tr}(\Sigma_2^\dagger \Sigma_2) \right)^2 + \frac{1}{4} \lambda_3 \text{Tr}(\Sigma_3^2)^2 + \frac{1}{2} \lambda_{23} \text{Tr}(\Sigma_2^\dagger \Sigma_2) \text{Tr}(\Sigma_3^2)$$

SU(2)_{2L} x SU(2)_{2R} x SU(2)₃ グローバル対称性を持つ

$$\begin{cases} \Sigma_2 \rightarrow U_{L2} \Sigma_2 U_{R2}^\dagger \\ \Sigma_3 \rightarrow U_3 \Sigma_3 U_3^\dagger \end{cases}$$

- “ κ 項”のグローバル変換性

$$\text{Tr} \left((\kappa_1 \sigma_1 + \kappa_2 \sigma_2 + \kappa_3 \sigma_3) \Sigma_2^\dagger \Sigma_3 \Sigma_2 \right)$$

κ を通じて, SU(2)_{2L} と SU(2)₃ が, SU(2)_D の
グローバルな部分群SU(2)_Lとして同一視される

$$\rightarrow \text{Tr} \left(U_{R2}^\dagger (\kappa_1 \sigma_1 + \kappa_2 \sigma_2 + \kappa_3 \sigma_3) U_{R2} \Sigma_2^\dagger U_{L2}^\dagger U_3 \Sigma_3 U_3^\dagger U_{L2} \Sigma_2 \right)$$

SU(2)_{2R} の部分群 U(1)_R ($\kappa_a \sigma_a$ 方向)が残る 一般性を失わずにSU(2)_R変換で, κ 項を1つまで落とせる (対角化)

この理論の真のグローバル対称性は SU(2)_L x U(1)_R

暗黒カストディアル対称性

- $SU(2)_L \times U(1)_R$ の自由度を使うと一般性を失わずに

- 2重項の真空期待値

$$\langle \Sigma_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_2 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} = \frac{v_2}{\sqrt{2}} \times \mathbf{1} \rightarrow U_{2L} \langle \Sigma_2 \rangle U_{2R}^\dagger = e^{i(\theta_{2L}^a - \theta_{2R}^a) \sigma_a} \langle \Sigma_2 \rangle$$

LとRを同じように回す対称性が残る

$$\theta_{2V} = \theta_{2L}^a = \theta_{2R}^a \quad \text{暗黒カストディアル対称性}$$

- 3重項の真空期待値

$$\langle \Sigma_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_3 & v_1 \\ v_1 & -v_3 \end{pmatrix} = \frac{v_1 \sigma_1 + v_3 \sigma_3}{\sqrt{2}} \rightarrow U_3 \langle \Sigma_3 \rangle U_3^\dagger$$

Σ_3 の真空期待値に比例した $U(1)_3$ が残る

$$U_3 = e^{i\theta_3 \frac{v_1 \sigma_1 + v_3 \sigma_3}{v}} \quad \kappa \text{ 項を前もって対角化しておけば } v_1=0$$

$SU(2)_D$ により, κ 項を通じて $SU(2)_{2L}$ と $SU(2)_3$ は同一視される

→ $SU(2)_{2V}$ のうち $U(1)_3$ に対応する厳密な対称性が残る

暗黒カストディアル $U(1)_V$ 対称性 → DMが安定化

安定なpNGB暗黒物質の実現

● 真空構造のまとめ（自発的対称性の破れのパターン）

Name	V_I	V_{II}	V_{III}	V_{IV}
(v_2, v_3)	$(0, 0)$	$\left(0, \pm\sqrt{\frac{\mu_3^2}{\lambda_3}}\right)$	$\left(\pm\sqrt{\frac{\mu_2^2}{\lambda_2}}, O(\kappa)\right)$	$\left(\pm\sqrt{\frac{\lambda_3\mu_2^2 - \lambda_{23}\mu_3^2}{\lambda_3\lambda_2 - \lambda_{23}^2}}, \pm(2 \leftrightarrow 3)\right)$
$V(v_2, v_3)$	0	$-\frac{\mu_3^4}{4\lambda_3}$	$-\frac{\mu_2^4}{4\lambda_2}$	$-\frac{\lambda_2\mu_3^4 - 2\lambda_{23}\mu_2^2\mu_3^2 + \lambda_3\mu_2^4}{4(\lambda_3\lambda_2 - \lambda_{23}^2)}$
Gauge symmetry	$SU(2)_D$	$U(1)_D$	None	
Global symmetry	$SU(2)_L \times U(1)_R$	$U(1)_L \times U(1)_R$	$U(1)_V$	
(μ_2^2, μ_3^2)	$(-, -)$	$(-, +)$	$(+, -)$	$(+, +)$
# of NG	0	2	3	5

$$SU(2)_{2L} \times SU(2)_{2R} \times SU(2)_3 \rightarrow SU(2)_{2V} \times U(1)_3$$

κ なし $\rightarrow$ 5 NGB (3個は W_D が吸収, 残り2個は質量を持たないNGB)

$\Downarrow \kappa$

κ あり $\rightarrow$ 3 NGB (3個は W_D が吸収 + 質量を持つNGB = pNGB) $m_{DM}^2 \propto \kappa$

$$SU(2)_L \times U(1)_R \rightarrow U(1)_V$$

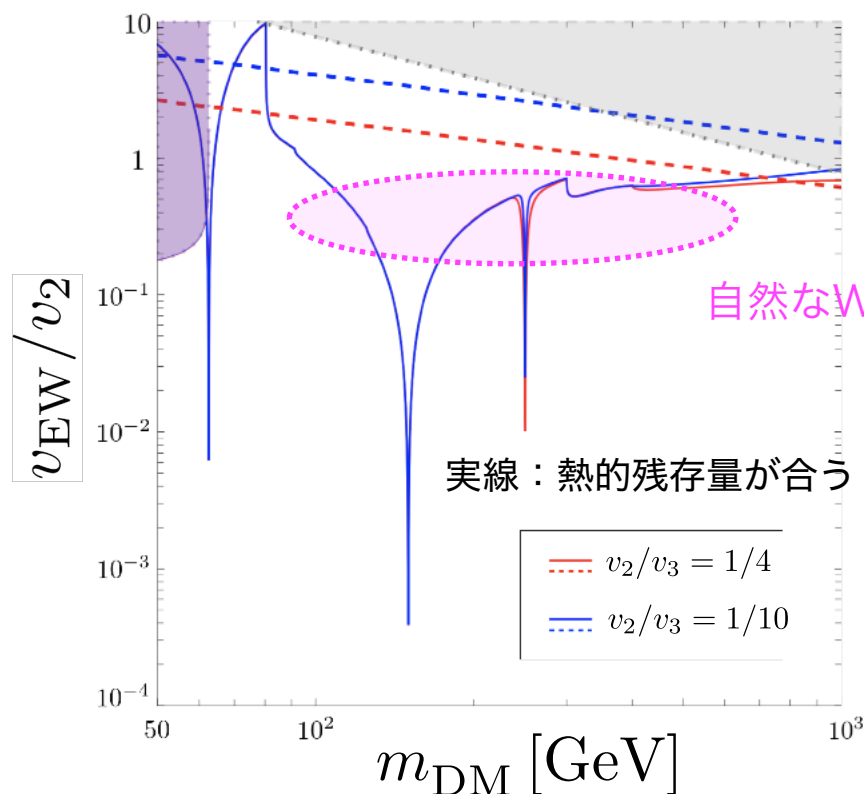
1個の 複素スカラー場

$U(1)_V$ 荷のおかげでpNGBは安定化

直接検出の可能性

- $v_2 \ll v_3$ であれば, 安定な pNGB DM 模型 + 階層性問題
- v_2/v_3 を有限に保つと pNGB の性質を壊す相互作用

(→抑制されないDM直接検出)



まとめ

まとめ

- 暗黒物質と**擬南部ゴールドストーンボソン(pNGB)**

微分相互作用で暗黒物質の直接探索は避けられる

- **$U(1)_{B-L}$** にもとづくpNGB暗黒物質模型

ある極限で対称性が増えるように仕込んでおく
(長寿命暗黒物質, 超高エネルギーUV模型)

- カイラル対称性と**残存対称性**

標準模型には偶発的な残存対称性がある

- **暗黒SU(2)**にもとづくpNGB暗黒物質模型

暗黒カストディアル対称性で暗黒物質を安定化できる

pNGBの性質の破れから暗黒物質が見えてくるかもしれない

補足

ヒッグス機構

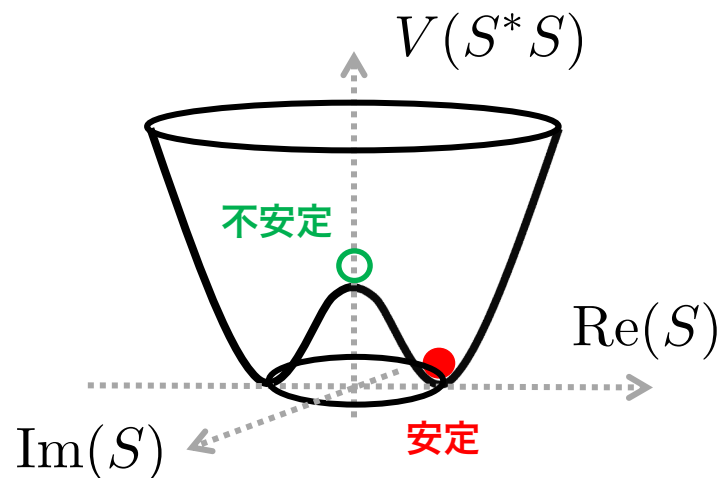
- 複素スカラー場を考える

$$V(S^*S) = \lambda \left(S^*S - \frac{v^2}{2} \right)^2$$

理論が $S \rightarrow e^{i\alpha(x)}S$ の局所対称性を持つ

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - i e A_\mu$$

微分を共変微分にする (ゲージ場の導入)



このポテンシャルは **$\Phi=0$ の周りで不安定** $\langle S \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}$
 → 対称性が自発的に破れる

この時, ゲージ場は理論と無矛盾な質量を獲得 (ヒッグス機構)

$$\mathcal{L}_S = |D_\mu S|^2$$

$$= \frac{1}{2} |(\partial_\mu - i e A_\mu) \{ (v + \sigma) e^{i\pi/v} \}|^2 \rightarrow \frac{e^2 v^2}{2} A_\mu A^\mu$$

質量の獲得によってゲージ場の自由度は $2 \rightarrow 3$
 (増えた自由度は南部ゴールドストンボソンによる)

Physics 2013



Photo: Pnicolet via Wikimedia Commons
François Englert



Photo: G-M Greuel via Wikimedia Commons
Peter W. Higgs