# 電弱バリオン数生成の輸送理論：
# 場の理論からボルツマン方程式へ

村 勇志 (KEK)

Collaborators: 遠藤 基 (KEK), 辻 天太 (KEK)

Based on arXiv:2607.28321 (to be appeared from JHEP)

東京理科大 2026/11/06

# 素粒子理論とは?

- 物質(もの)と空間(入れ物)の物理
  - 「もの」の最小単位: 素粒子
  - 「もの」の入れ物: 時間と空間

- 素粒子の標準模型

  物質粒子 + 力を伝える粒子 in (平坦な)時空間

  これまでの加速器実験、宇宙観測実験などで
  18種類全ての粒子が発見 & 理論の独立パラメータは決定

  理論予言はこれまでの実験と「ほぼ」無矛盾

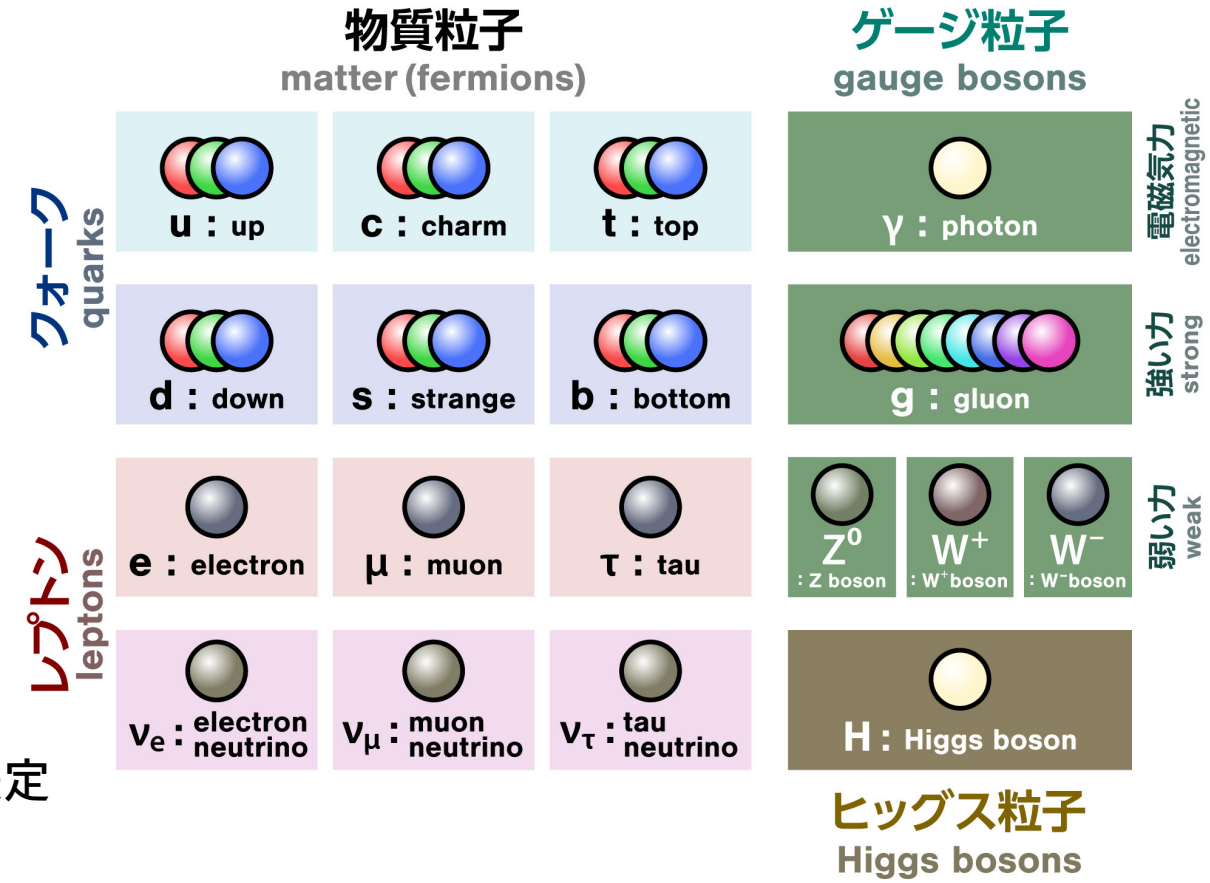



Fig. from “higgstan.com”

# 謎に満ちた宇宙

- ビッグバン宇宙

  初期宇宙は非常に高温で、「もの」は全てバラバラ

  → 素粒子の世界

- 標準模型 + 標準宇宙論

  宇宙がどのように生まれ、発展し、終わるか?

- 現在の宇宙の組成

  ダークエネルギーとダークマターが95%ほどに対し、
  物質(バリオン)は5%ほど

  ダークエネルギーとダークマターの正体は不明
  標準模型を超える何かが必要?

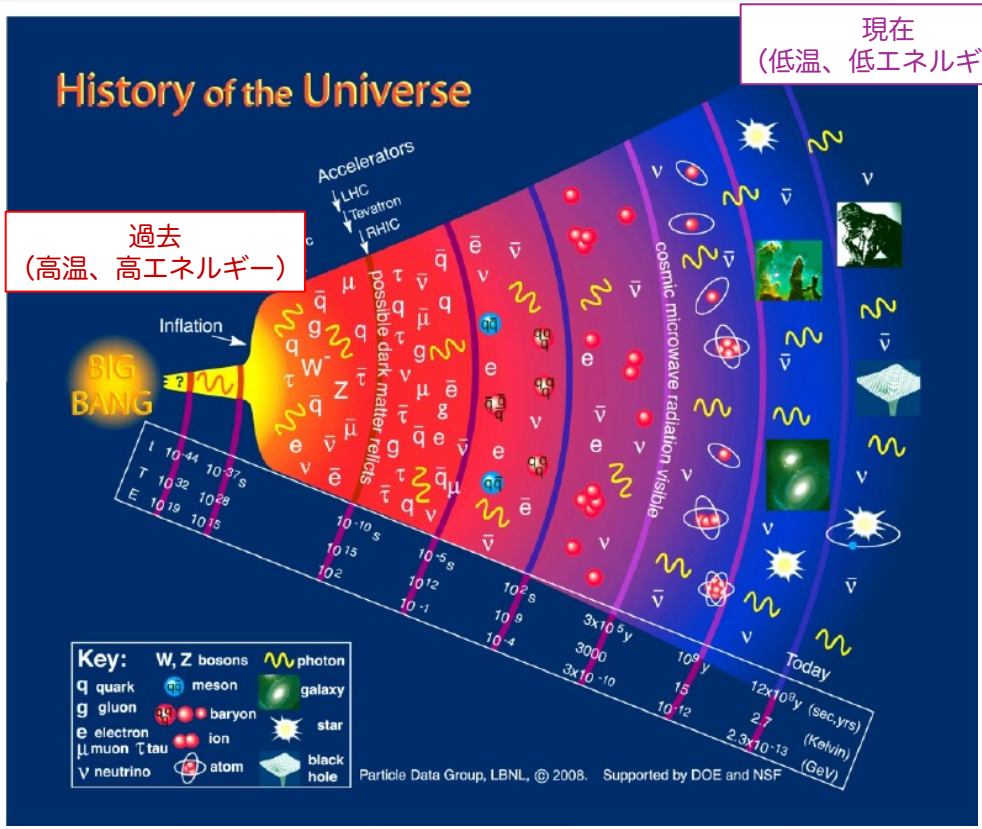



Fig. from Particle Data Group

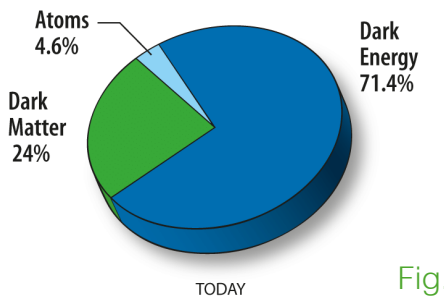



Fig. from WMAP

# 物質（バリオン）優勢な宇宙

・物質（バリオン数）とは?

陽子、中性子: $B$ (バリオン数) $= 1$ -> クォーク: $B = 1/3$
反クォーク: $B = -1/3$

電子、ニュートリノ等は $L$ (レプトン数) $= 1$

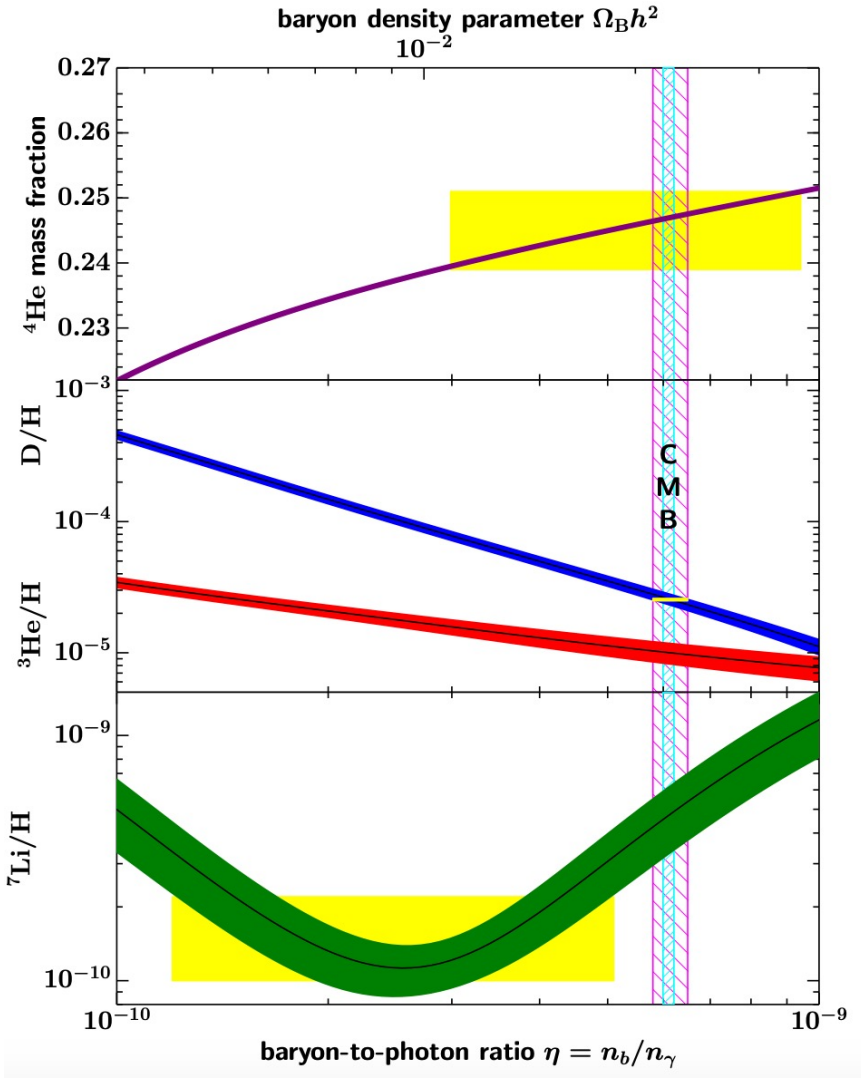
・宇宙におけるバリオン数の非対称性

$$\eta_B = \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{n_\gamma}$$

(バリオン密度)-(反バリオン密度) / (光子密度)

観測値　$\eta_B = (6.12 \pm 0.04) \times 10^{-10}$　Planck (2018)

-> $n_\gamma \sim (n_B - n_{\bar{B}}) \times 10^{10}$　(光子密度比で) とても小さい




PDG(2024)

# バリオン数生成

・バリオン数の非対称性はどこから来たか?

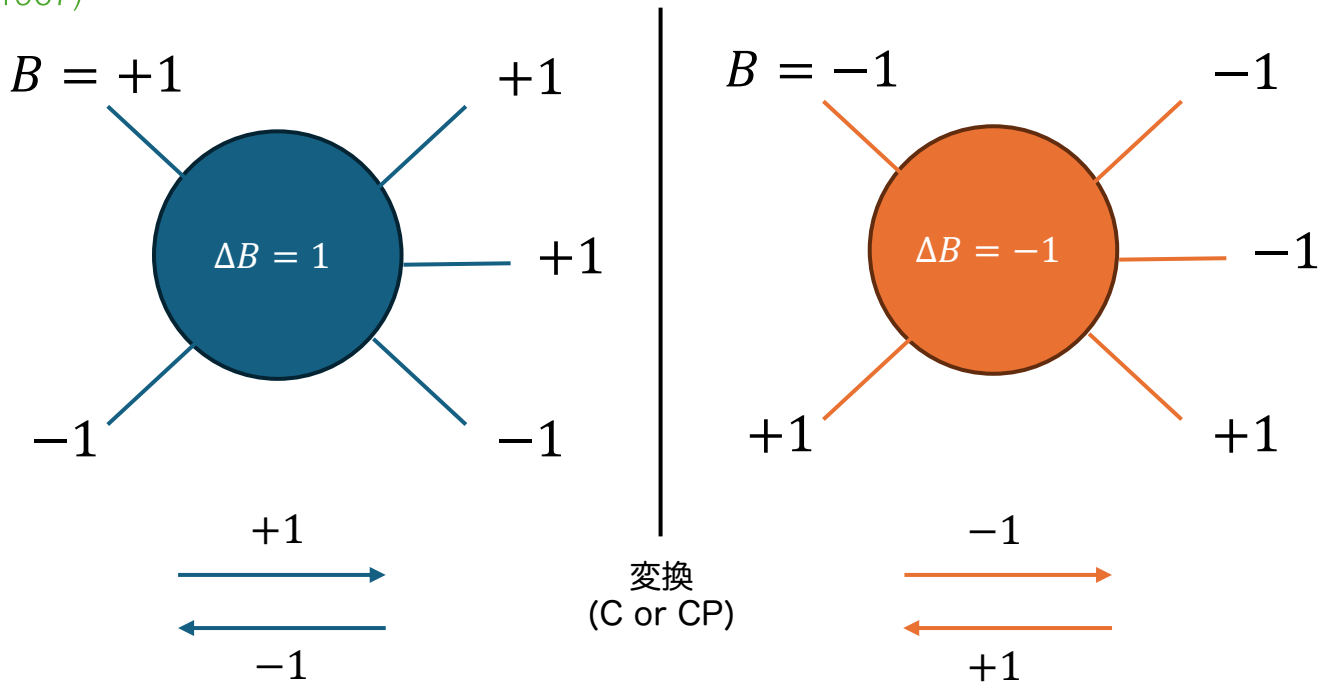
単純に宇宙の初期条件?

あるいは、何らかのバリオン数を作る何らかのメカニズム?

-> バリオン数+創世: Baryon-genesis

・Sakharovの条件とバリオン数生成 Sakharov (1967)

1. バリオン数を破る過程の存在
2. C and CP対称性の破れ
3. 熱的に非平衡な過程の存在




矢印の大きさが同じだと、正味のバリオン数は0

# 標準模型を見てみる

・標準模型の相互作用

| | クォーク (left) | クォーク (right) | レプトン (left) | レプトン (right) |
|---|---|---|---|---|
| W, Z ボソン | ○ | | ○ | |
| ヒッグス | ○ | ○ | ○ | ○ |

ざっくり、

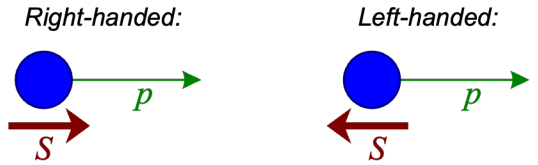
$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} \sim g\,\overline{\psi_L}\gamma^{\mu}\psi_L W_{\mu}$$

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} \sim y\,\overline{\psi_L}\psi_R\Phi + \text{h. c.}$$

という形

$\psi$: クォーク or レプトン
$\Phi$: ヒッグス，$W_{\mu}$: EWのゲージ場
$g, y$: 結合定数

cf.) 左手と右手 in 相対論的極限 (m=0)




en:User;HEL, User:Stannered,
Public domain, via Wikimedia Commons

・電弱ゲージ相互作用はC対称性(だいたい $\psi_L \leftrightarrow \psi_R^*$)を破る

・$y$はフレーバーの足を持つ3×3行列 -> 1つの複素位相(小林益川位相)でCP対称性(だいたい $\psi_{L,R} \leftrightarrow \psi_{L,R}^*$)を破る

・素朴には、バリオン数、レプトン数は保存しているように見える

# 標準模型を見てみる

・カイラルアノマリーとスファレロン過程

カイラルな位相変換　$\psi_L \to e^{+iQ\theta}\psi_L, \quad \psi_R \to e^{-iQ\theta}\psi_R$　は量子効果で破れている(カイラルアノマリー)

$$\partial_\mu j_B^\mu = \partial_\mu j_L^\mu = \frac{3g^2}{16\pi^2}\mathrm{Tr}[F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}]$$

$j^\mu$は4元カレント
対称性があるならカレントの発散は保存(ネーターの定理)

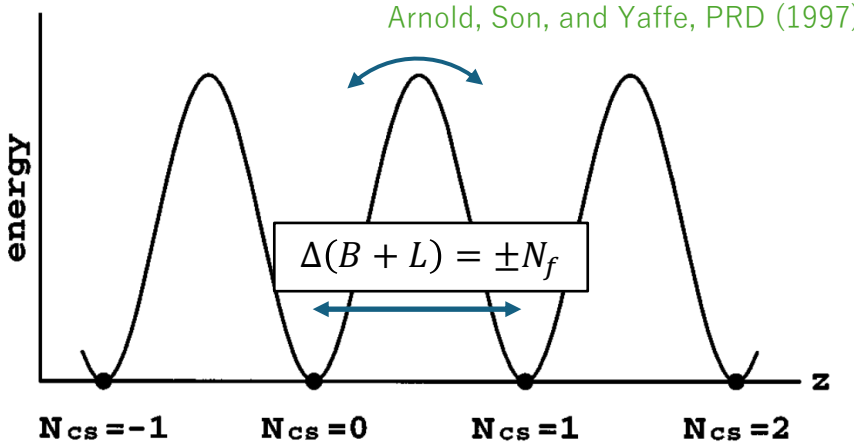
バリオンとレプトンで同じように破れる
-> $B-L$という量子数は保存するが、left-handedの$B+L$は保存量にならない

遷移率は0温度ではものすごく小さい　$\Gamma \propto \exp(-8\pi^2/g^2) \sim 10^{-O(10^2)}$

が、有限温度では温度に依存して$B+L \neq 0$の過程が
高頻度で起こる(スファレロン過程)

Dimopoulos and Susskind, PRD (1978),
Manton, PRD (1983), Klinkhamer and Manton, PRD (1984)

Arnold, Son, and Yaffe, PRD (1997)



# 標準模型を見てみる

(Sakharovの条件)

1. バリオン数を破る過程の存在
2. C and CP対称性の破れ
3. 熱的に非平衡な過程の存在

標準模型の枠組みで、

スファレロン過程がバリオン数を破る

電弱ゲージ相互作用と湯川(小林益川位相)でC and CP対称性を破る



熱的に非平衡な過程があれば、Sakharovの条件を満たせる

# 電弱バリオン数生成

・電弱バリオン数生成：電弱対称性の破れを用いた非平衡状態の実現　Kuzmin, Rubakov, and Shaposhnikov (1985)

・初期宇宙における電弱相転移

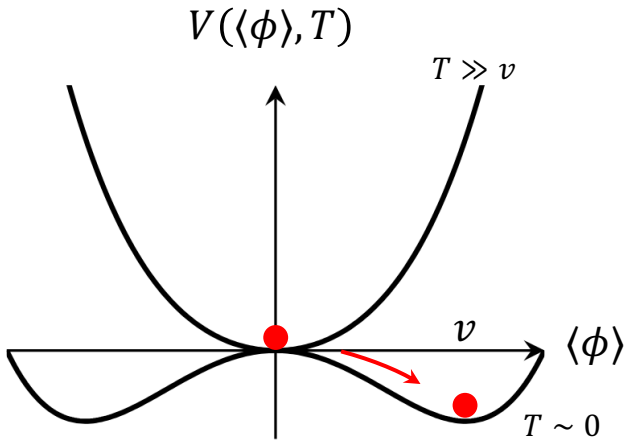
標準模型には、ゲージ対称性 (ゲージ化されたSU(2) × U(1)対称性)が存在

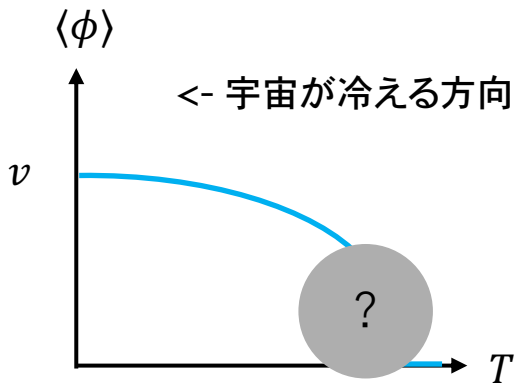
秩序変数：スカラー場の真空期待値 $\langle\phi\rangle$

真空の自由エネルギー(有効ポテンシャル) によって、
ゲージ対称性が自発的に破れる(ヒッグス機構)

電弱対称性の破れのスケール $\langle\phi\rangle = v \simeq 246$ GeV

どのような相転移かは、有効ポテンシャルで決まる



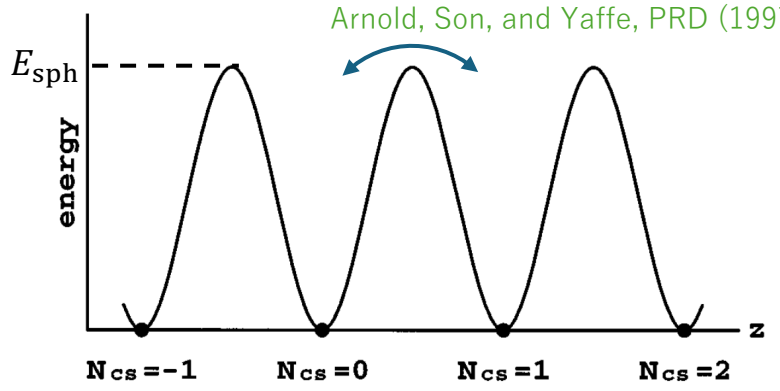



# 電弱バリオン数生成

・なぜ電弱相転移で非平衡？

スファレロン遷移確率

$$\Gamma_{\rm sym} \propto T^4 \quad \text{(電弱相転移の前)}$$
$$\Gamma_{\rm brk} \propto T^4 \exp(-v/T) \quad \text{(電弱相転移の後)}$$




$E_{\rm sph} \sim m_W/\alpha_{em} \sim 10$ TeV

電弱相転移のあり方によっては、
相転移の最中でスファレロン過程そのものが非平衡になる状況が起こる！

ある時刻 $t$ $B+L=0$ → $\Delta t \sim \Gamma_{\rm sym}^{-1}$ → 時刻 $t+\Delta t$ $B+L=+1$ → $\Delta T \sim \Gamma_{\rm brk}^{-1}$ → 時刻 $t+\Delta t+\Delta T$ $B+L=0$

相転移

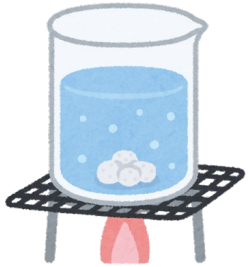
注意: CP対称なので$B+L=-1$の過程も同様に起こる

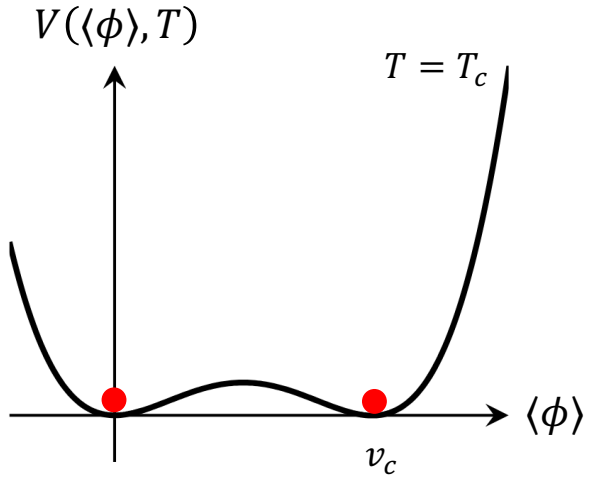
# 電弱バリオン数生成

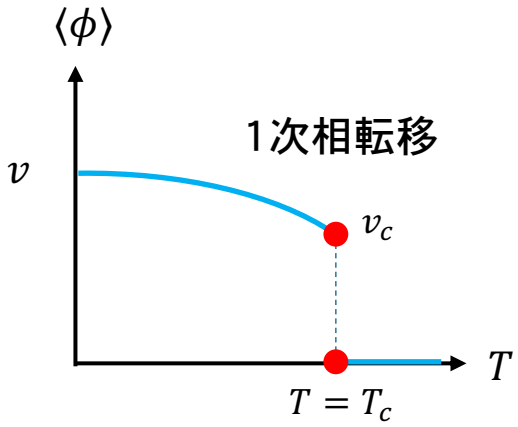
- CPの破れ (in 湯川相互作用) をどう組み込むか?

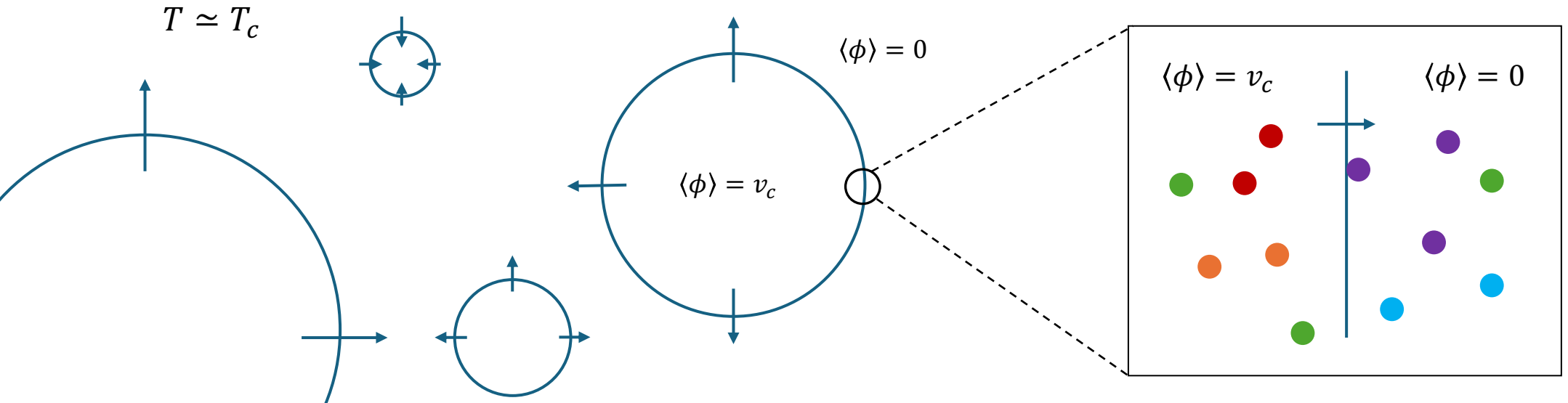
縮退した真空を伴う1次相転移であれば、
$T \simeq T_c$で2つの真空が共存する

-> 真空(ヒッグス)の泡ができる





# 電弱バリオン数生成のメカニズム

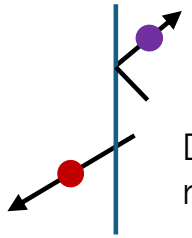
・壁の周りを拡大

**Chirality:** Left ● Anti-Left ●
**Charge:** +1 -1

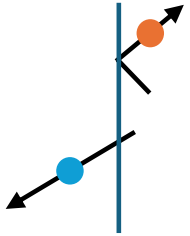
**Chirality:** Right ● Anti-Right ●
**Charge:** +1 -1

### 1. CP violation

$\langle\phi\rangle = v_c$ $\langle\phi\rangle = 0$

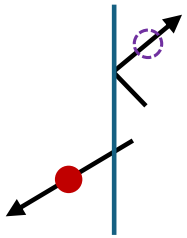


Difference in reflection rates

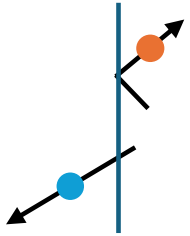


Total charge = 0 (CPT theorem)

### 2. C violation & B violation



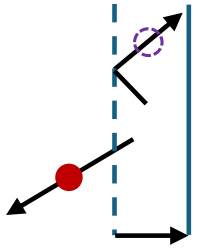
Sphaleron changing left number in the symmetric phase



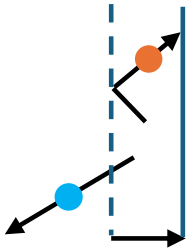
Left↔Right interactions wash out the asymmetry

Total charge = +1

### 3. Freeze out



Sphaleron decoupled in the broken phase



Total charge = +1

# 標準模型ではできない

- 電弱相転移が1次にならない　Kajantie et al., PRL (1996); D'Onofrio and Rummukainen, PRD (2016);

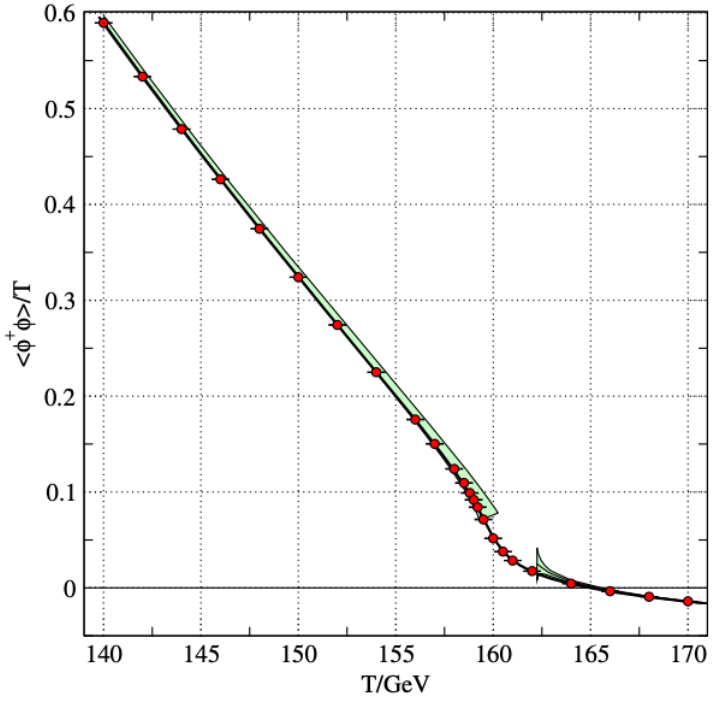
- CPの破れが全く足りない　Gavela et al. (1994); Huet and Sather (1995);

Jarlskog invariant　$J_{CP} = \mathrm{Im}[V_{ud}V_{us}^{*}V_{cs}V_{cd}^{*}] = 3.12\times10^{-5}$　PDG (2024)

SMにおけるCPを破る物理量はこれに比例：

$$\Delta_{CP} = J_{CP} \times (m_t^2 - m_u^2)(m_t^2 - m_c^2)(m_c^2 - m_u^2)(m_b^2 - m_d^2)(m_b^2 - m_s^2)(m_s^2 - m_d^2).$$

$\Delta_{CP}$ から無次元量を得る　$\eta_B \sim \frac{\Delta_{CP}}{T_c^{12}} \sim 10^{-20}$　→ 観測値 $\eta_B \sim 10^{-10}$ に全く足りない




- 新物理：標準模型のその先へ

電弱スケール付近の新物理は将来の様々な実験（コライダー、フレーバー、EDM、重力波など）で検証可能

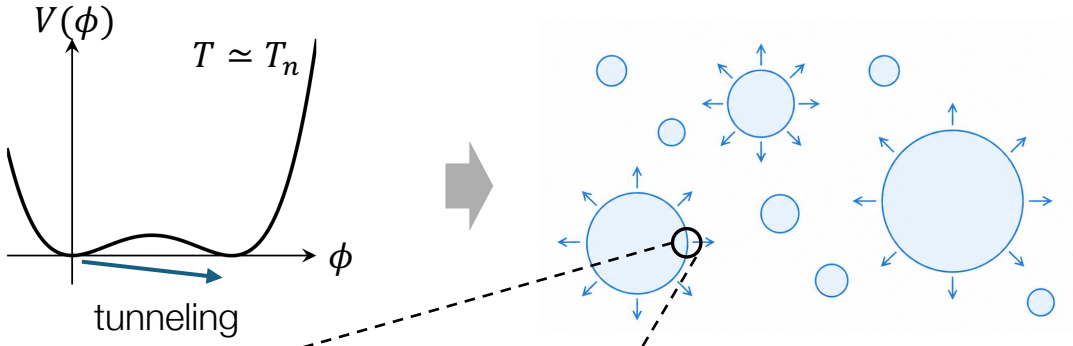
# どうやって(真面目に)計算するか?

問題を分割しよう

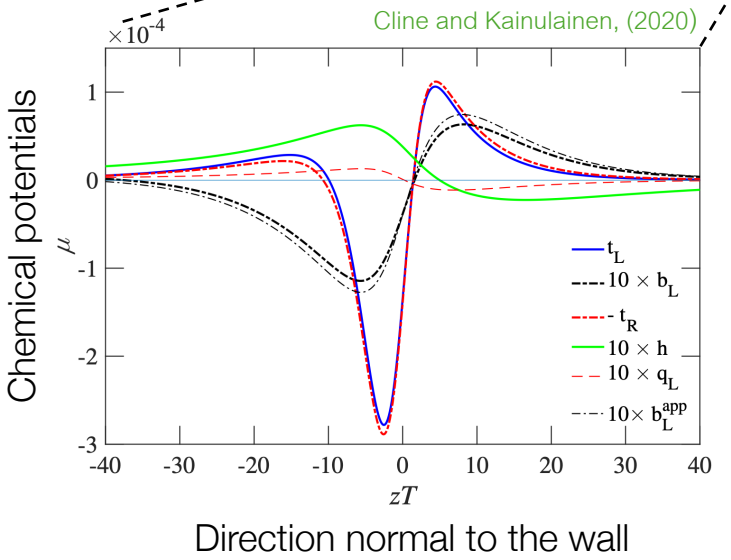
1. 電弱相転移を計算して真空泡のダイナミクスを決める

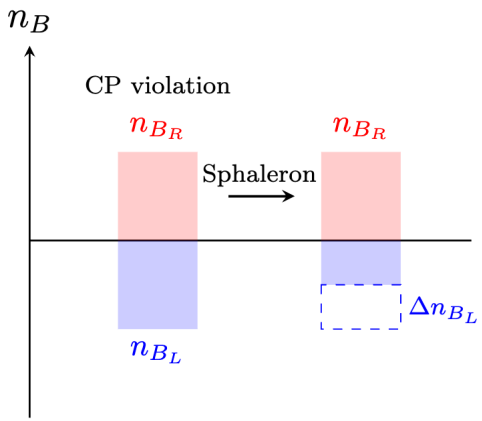
2. 壁の周りで生成される(カイラルな)電荷を計算

3. スファレロンで生まれるバリオン数を計算





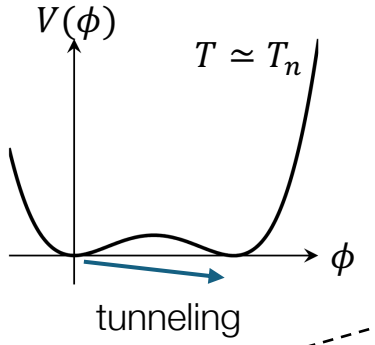



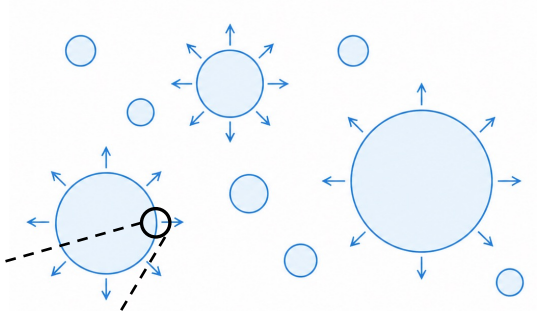



# どうやって(真面目に)計算するか?

問題を分割しよう

1. 電弱相転移を計算して真空泡のダイナミクスを決める

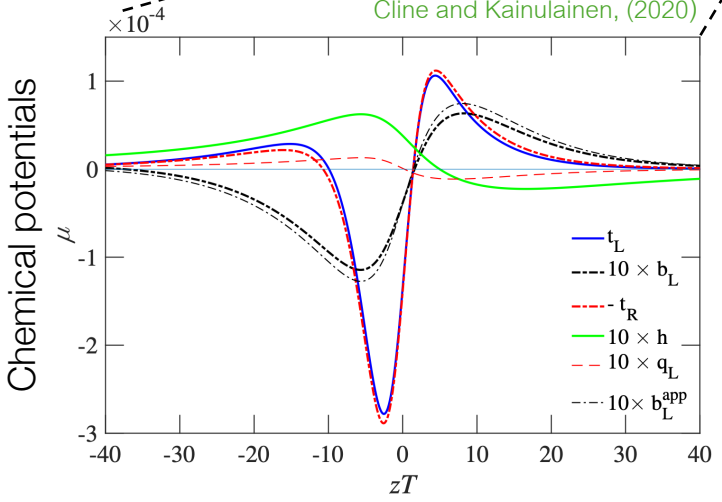


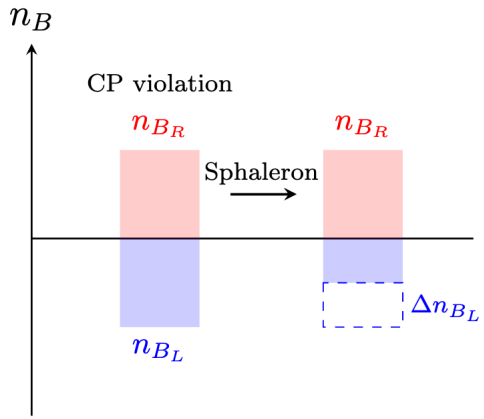
Today's topic: 非平衡プラズマ中の粒子輸送

2. 壁の周りで生成される(カイラルな)電荷を計算

Cline and Kainulainen, (2020)




3. スファレロンで生まれるバリオン数を計算



# 何をしたかを1枚で

・非平衡な系における粒子輸送はBoltzmann方程式で記述される

・ Boltzmann方程式は場の理論（Kadanoff-Baym equation）から導かれる

・しかし、これまでの導出には少なからずギャップがある & 見落とされている効果がある

・場の理論からBoltzmann方程式を導くより系統的な手法を提案した

・結果：

1. 一般的なKadanoff-Baym equationからBoltzmann方程式を得る手続き（必要な近似等）をクリアにした
2. 得られたBoltzmann方程式はプラズマとの相互作用から来る補正を含む

# Table of contents

- Introduction ✓
- Boltzmann equation for a non-equilibrium system
- Conventional derivation from field theory
- Our approach: systematic derivation of the Boltzmann equation

# Boltzmann equation

・Boltzmann方程式(in 平坦な時空)

$$\boldsymbol{L}[f_i] = \boldsymbol{C}[f_i, f_a, \dots]$$

Liouville term　　Collision term

$f_i(k,x)$ : distribution function of particle $i$

**Liouville term:** $\boldsymbol{L}[f_i] = \dfrac{df_i}{dt} = (v\,\partial_x + F\,\partial_k)\,f_i$ → (時間に陽に依存しない)分布の運動学的発展を記述

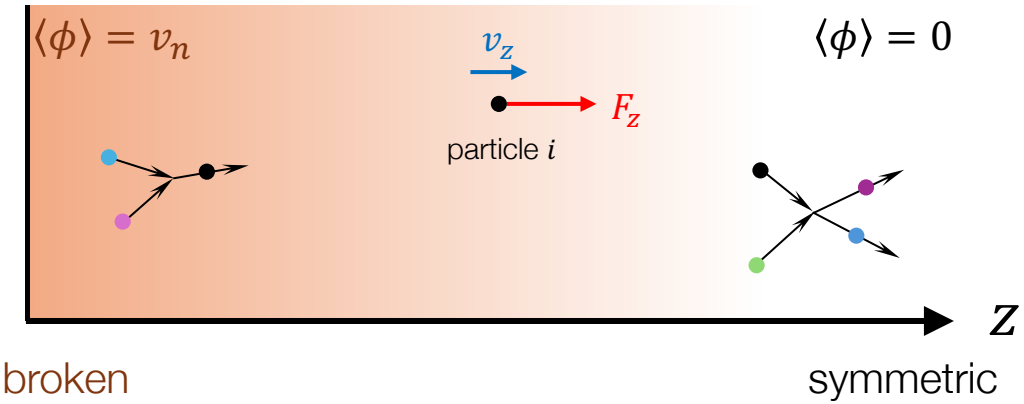
velocity　force

真空の壁(空間依存した真空期待値)との間のCPを破る相互作用が $v$ と $F$ に違いを生む(次のスライド)

**Collision term:** $\boldsymbol{C}[f_i, f_a, \dots] = \int d\Pi_i \dots |M|^2 (f_b f_c - f_i f_a) + \cdots$

→ 粒子の衝突等で分布が変わる効果を記述

Processes: top Yukawa, weak current, Higgs interactions, etc.

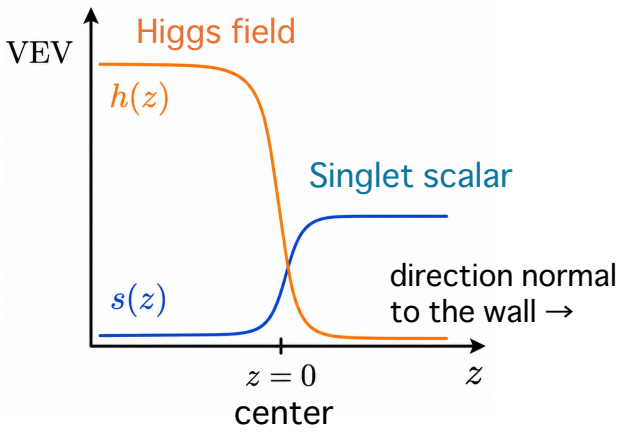


# CPの破れ in 質量項

- 壁の周りで生成されるcomplexな質量項

(e.g.) Singlet extension of the SM Cline, Kainulainen, and Smith, (2017);

Effective top quark mass $m_t(z) = y_t\, h(z) \left(1 + i \dfrac{s(z)}{\Lambda}\right)$ CP violation




- 壁が変化する効果が分散関係をずらす（壁は十分厚いとする） $(\partial_x \sim L_w^{-1} \ll T)$.

(typically, $L_w T \sim O(10)$, but model-dependent.)

$\omega = \omega_0 \pm \delta\omega \qquad \omega_0 = \sqrt{|\boldsymbol{k}|^2 + |m|^2}, \quad \delta\omega \propto |m(z)| \times \partial_z \theta(z)$

分散関係は粒子のハミルトニアン ～ 運動学を指定
→ Liouville項が決まる

$\boldsymbol{L}[f_i] = [(v \pm \delta v)\, \partial_x + (F \pm \delta F)\, \partial_k]\, f_i$

QM derivation (w/ WKB approximation): Cline, Joyce, and Kainulainen, (1998); Cline, Joyce, and Kainulainen, (2000); Fromme and Huber, (2007);

Field theoretical derivation: Kainulainen, Prokopec, Schmidt, and Weinstock, (2001); Kainulainen, Prokopec, Schmidt, and Weinstock, (2002); Prokopec, Schmidt, and Weinstock, (2004); Kainulainen, (2021); Endo, YM, and Tsuji, arXiv:2607.28321

# Table of contents

- Introduction ✓
- Boltzmann equation for a non-equilibrium system ✓
- Conventional derivation from field theory
- Our approach: systematic derivation of the Boltzmann equation

# Kadanoff-Baym equation

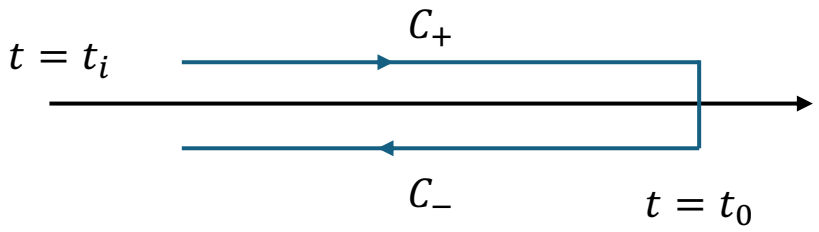
Schwinger (1961); Keldysh (1965);
Kadanoff and Baym (1962); and more

・欲しい方程式：任意の状態 $\psi$ における期待値の発展方程式

$$\langle O(t)\rangle = \langle\psi|U^{\dagger}(t,t_i)\,O(t)\,U(t,t_i)|\psi\rangle$$

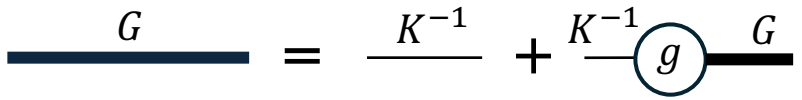
$O(t)$：時刻$t$での任意の演算子$(t_i < t < t_0)$

$U(t,t_i)$：相互作用描像における発展演算子




閉じたtime-contour上での場の理論

・Schwinger-Dyson方程式




full propagator　free propagator　self-energy

・Kadanoff-Baym equation：プラズマの運動量 $k$ と重心 $x$ の方程式　$\diamond(A,B) = \frac{1}{2}(\partial_x A\cdot\partial_k B - \partial_k A\cdot\partial_x B)$

$$\mathcal{D}(k,x)\,G^{\lambda} - e^{-i\diamond}\left(\mathcal{M}+g_{\mathcal{H}},G^{\lambda}\right) - e^{-i\diamond}\left(g^{\lambda},G_{\mathcal{H}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-i\diamond}(g^{>},G^{<}) - e^{-i\diamond}(g^{<},G^{>})\right)$$

kinetic term　mass (VEV)　self-energies (plasma)

# Conventional derivation

Kainulainen, Prokopec, Schmidt, and Weinstock, (2001), (2022);
Prokopec, Schmidt, and Weinstock, (2004);

・(KB equation) = (Hermitian part) + (anti-Hermitian part)

Kinetic equation　　Constraint equation

・Exercise: 自由なフェルミオンのconstraint equation　$\left(k_\mu \gamma^\mu - m_R - i\, m_I\, \gamma^5\right) G = 0$

→ $G \sim n \times \delta(\Omega^2)$　where　$\Omega^2 = k^2 - |m|^2$,　and $n$ is a non-singular function.

→ 質量殻上で $n$ は分布 $f$ に対応する:　$G \sim \langle a^\dagger a \rangle \sim f\, \delta(k^0 - \omega_0)$,　　$\omega_0 = \sqrt{|\boldsymbol{k}|^2 - |m|^2}$

・Kinetic equationは分布関数$n \sim f$の発展を記述:　$\boxed{i \not{\partial}_x G} = \boxed{g^> G^< - g^< G^>}$

変化　　衝突

Substituting $G \sim n \times \delta(\Omega^2)$ and integrating over $k^0 > 0$,

$$\int_0^\infty dk^0\, i \not{\partial}_x\, G = \int_0^\infty dk^0\, (g^> G^< - g^< G^>) \quad \rightarrow \quad (v_0 \partial_x + F_0 \partial_k)\, f = \boldsymbol{C}[f, f_a, \dots]$$

Liouville term: $\boldsymbol{L}[f]$

# Conventional derivation

Kainulainen, Prokopec, Schmidt, and Weinstock, (2001), (2022);
Prokopec, Schmidt, and Weinstock, (2004);

・CPの破れの効果を取り入れる

Constraint equation at 1st order in derivative: $\left(k_\mu \gamma^\mu - m_R - i\, m_I\, \gamma^5 + \mathcal{O}(\partial_x m)\right) G = 0.$

$\partial_x$ correction w/ CPV

$\rightarrow\ G \sim\ n \times \delta(\Omega^2 + \delta\Omega^2)$ where $\Omega^2 = k^2 - |m|^2,\ \delta\Omega^2 = \mathcal{O}(\partial_x m).$

→ 分散関係がずれる $k^0 = \omega_0 \pm \delta\omega$

+: particle
- : anti-particle

・Kinetic equationを使って分布$n \sim f$ を決める

On-shell条件が補正を受けることでLiouville項に違いが生まれる

$$\int_0^\infty dk^0\, i\not{\partial}_x\, G\ = \int_0^\infty dk^0\, (g^> G^< - g^< G^>)\ \ \rightarrow\ \ (v\partial_x + F\partial_k)\, f = \boldsymbol{C}[f, f_a, \ldots]$$

Liouville term: $\boldsymbol{L}[f]$

where $v = v_0 \pm \delta v\ ,\ F = F_0 \pm \delta F.$

# Missing effects and gaps

$$\mathcal{D}(k,x)\,G^{\lambda} - e^{-i\diamond}\left(\mathcal{M} + g_{\mathcal{H}}, G^{\lambda}\right) - e^{-i\diamond}\left(g^{\lambda}, G_{\mathcal{H}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-i\diamond}(g^{>}, G^{<}) - e^{-i\diamond}(g^{<}, G^{>})\right) \qquad (\lambda = <, >)$$

① ②

① Self energyを無視してconstraint eq. を解いている → プラズマ中の分散関係になっていない

Thermal correction or damping?　　cf.) Thermal corrections (single fermion): Kainulainen, (2021)

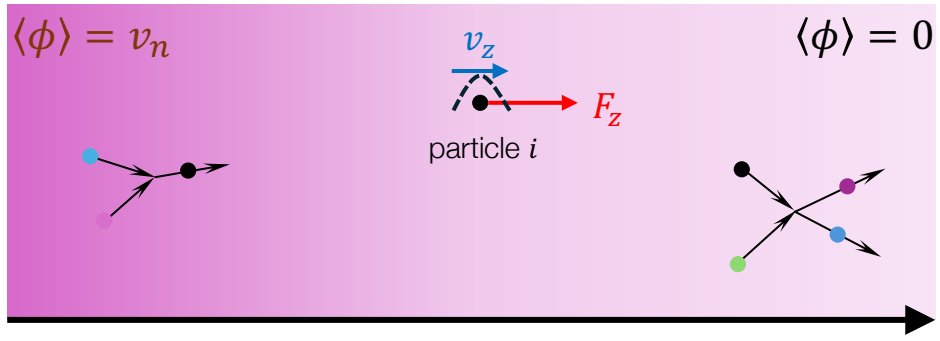
② プラズマとの相互作用はcollision termとして含まれる

一方、どういう近似のもとで粒子描像が取れるのか?

・我々の方法：上の方程式を直接、代数的に解く

Multi-flavor bosonic and fermionic systems

Propagation in thermal plasma & vacuum



# Table of contents

- Introduction ✓
- Boltzmann equation for a non-equilibrium system ✓
- Conventional derivation from field theory ✓
- Our approach: systematic derivation of the Boltzmann equation

# Systematic derivation

① 一般のKadanoff-Baym eq.を代数的に解いて形式解を得る

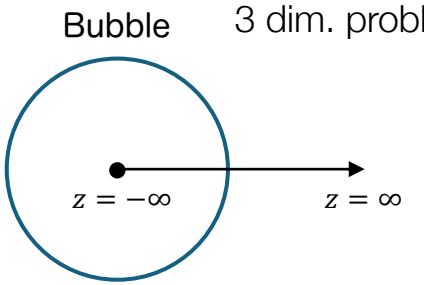
② これまで使われてきた or 暗に使われてきた近似を解に適用する

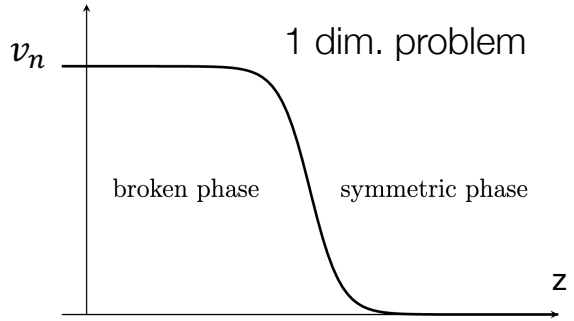
③ 特に、準粒子近似(quasi-particle approximation)がon-shell解に帰着するために必要

④ 得たon-shell解を、kinetic equationに代入してBoltzmann eq.を得る

# 必要な近似

- 一定速度で膨張する泡、平面な壁




電弱プラズマはz方向のスピンを保存

→ 壁の静止+平行方向の運動量0の系で (spinors) = (spin) × (chiral)

e.g.) self-energies $g = \sum_{s=\pm} P_s \otimes \left( g^0 + \sum_{i=1,2,3} g^i \sigma^i \right)$

- 壁の厚さが典型的なスケールに比べて大きい $(\partial_z \ll k \sim T)$

Derivative expansion: $e^{-i\,\partial_z \partial_{k_z}} = 1 + \left(-i\,\partial_z \partial_{k_z}\right) + \frac{1}{2}\left(-i\,\partial_z \partial_{k_z}\right)^2 + \cdots$

代数操作によって微分のorder-by-orderで解が得られる: $G = \sum_0^\infty G^{[n]}$

# Quasiparticle approximation

- 系のスペクトル $\mathcal{A}$ と準粒子近似（quasiparticle approximation）: $\Gamma \ll \Omega^2$ $\quad \Omega^2 = k^2 - m^2$ (free field)

0th order in derivative

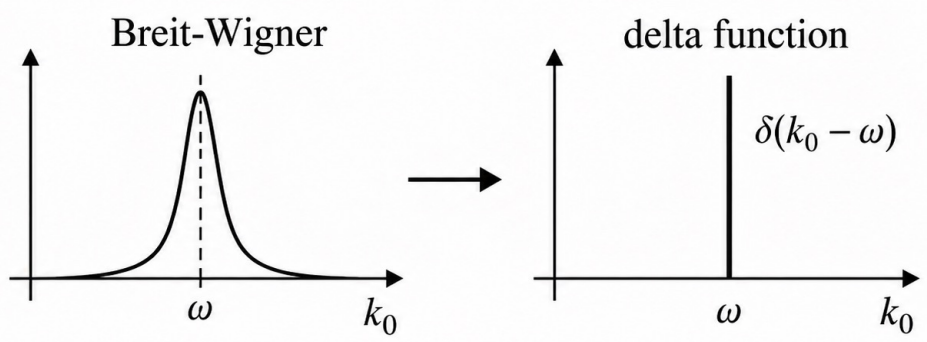
$$\mathcal{A}^{[0]} \sim \frac{\Gamma}{\Omega_0^4 + \Gamma^2} \to \delta(\Omega_0^2)$$

Breit-Wigner distribution

1st order in derivative (fermionic case)

$$\mathcal{A}^{[1]} \sim \Omega_1^2 \times \frac{2\Gamma\,\Omega_0^2}{(\Omega_0^4 + \Gamma^2)^2}$$

$$\to\ \Omega_1^2 \times \delta'(\Omega_0^2)$$




デルタ関数の補正は各orderの足し上げで理解できる: $\delta(x) + \delta x\,\delta'(x) = \delta(x + \delta x) + \mathcal{O}(\partial_z^2)$.

- Self-energyからくる補正はon-shellを決める関数 $\Omega_0^2$ と $\Omega_1^2$ に含まれる

特に $\Omega_1^2$ はCP-odd: $\Omega_{1,\mathrm{CP}}^2 = -\Omega_1^2$

- 得られる解はスペクトル $\mathcal{A}$ に比例する形で書ける(on-shell解)

# Boltzmann equationを得る

- Kinetic equationにon-shell解を代入するとPoisson括弧が現れる

$$\mathrm{Tr}[\,(i\not{\partial}_x G)] \propto \left\{\Omega^2_{\mathrm{eff}}\,, n\right\}_{z,k_z} \delta(\Omega^2_{\mathrm{eff}})$$

→ ハミルトニアン $\Omega^2_{\mathrm{eff}} = \Omega^2_0 + \delta\Omega^2$ で指定される位相空間上の運動

→ 粒子描像とconsistent

- On-shell上にある粒子のエネルギーは $\Omega^2_{\mathrm{eff}}\,(k^0) = 0$ の解で指定される: 正エネルギー解 $k^0 = +\omega$

Liouville term (w/ thermal correction):

$$\boldsymbol{L}\,[f] = \underbrace{\partial_{k_z}\omega\;\partial_z f}_{\text{velocity}} \;\; \underbrace{-\,\partial_z\omega\;\partial_{k_z} f}_{\text{force}},$$

cf.) 正準方程式

Collision term (conventional form):

$$\boldsymbol{C}\,[f, \ldots] = \int_0^\infty \frac{dk^0}{2\pi}\,\mathrm{Tr}[\,(g^> G^< - g^< G^>)]$$

cf.) spin-s, flavor-iのフェルミオンでの具体形

$$\delta\Omega^2 = -\frac{1}{K^0}\Big(m_I'\big(K_z\partial_{k_z}M_R - M_R\partial_{k_z}K_z\big) - m_R'\big(K_z\partial_{k_z}M_I - M_I\partial_{k_z}K_z\big)\Big),\ \text{and}\ \begin{aligned} K^0 &= k^0 - g^0_{\mathcal{H}}, \quad M_R = m_R + g^1_{\mathcal{H}}, \\ K_z &= sk_z + g^3_{\mathcal{H}}, \quad M_I = m_I + g^2_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

# Summary

- 電弱バリオン数生成におけるBoltzmann方程式を場の理論から系統的に導出した
- Kadanoff-Baym equationを代数的に解き、(暗に)用いられてきた近似を適用した
- プラズマによる補正が含まれたBoltzmann equationを得た

**Outlook**

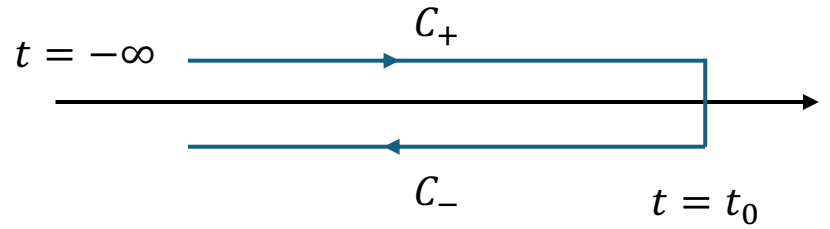
- 現象論、模型への応用
- フレーバー混合や量子干渉の議論
- …

# Supplement

# Closed-time-path formalism

Schwinger (1961); Keldysh (1965);
Kadanoff and Baym (1962); and more

- **Time ordered 2×2 propagators on the closed-time-path**




(e.g.) bosonic propagators (u, v are the spacetime variables)

$$iG^{++}(u,v) \equiv iG^{t}(u,v) = \langle \mathrm{T}[\phi(u)\phi^{\dagger}(v)] \rangle, \quad : \text{time ordered propagator on } C_+$$

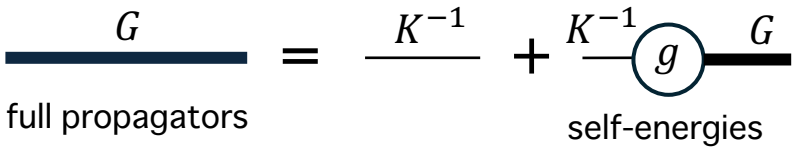
$$iG^{+-}(u,v) \equiv iG^{<}(u,v) = \langle \phi^{\dagger}(v)\phi(u) \rangle,$$

$$iG^{-+}(u,v) \equiv iG^{>}(u,v) = \langle \phi(u)\phi^{\dagger}(v) \rangle, \quad : \text{Wightman functions } G^{\lambda} \ (\lambda = <, >)$$

$$iG^{--}(u,v) \equiv iG^{\bar{t}}(u,v) = \langle \overline{\mathrm{T}}[\phi(u)\phi^{\dagger}(v)] \rangle. \quad : \text{time ordered propagator on } C_-$$

- **Schwinger-Dyson equation on the path**

$$K(u)\, iG^{ab}(u,v) = ia\, \delta^{ab}\delta^{4}(u-v) + \sum_{c} c \int d^{4}w \ g^{ac}(u,w) iG^{cb}(w,v), \qquad (a,b,c = \pm)$$




full propagators

self-energies

# The Kadanoff-Baym equations

- **The Kadanoff-Baym equations** $(u, v) \to (u - v, (u + v)/2)$ (the relative coordinate is Fourier transformed)

  relative: r  average: x

  → momentum: k

$$\mathcal{D}(k,x)\, G^{\lambda} - e^{-i\diamond}\left(\mathcal{M} + g_{\mathcal{H}}, G^{\lambda}\right) - e^{-i\diamond}\left(g^{\lambda}, G_{\mathcal{H}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-i\diamond}(g^{>}, G^{<}) - e^{-i\diamond}(g^{<}, G^{>})\right) \qquad (\lambda = <, >)$$

kinetic term  mass (VEV)  self-energies (plasma)

- **Effects from the wall (varying VEV) are encoded in the mass term:** $\mathcal{M} = \mathcal{M}(x)$

- **The other interactions (plasma) are encoded in the self-energy** $g$.

  $g_{\mathcal{H}}$ : Hermitian part  ~ thermal mass
  $g_{\mathcal{A}}$ : Anti-Hermitian part  ~ thermal width

- **Dependence on** $x$ **is expressed by the diamond operator :** $\diamond\,(A, B) = \frac{1}{2}(\partial_x A \cdot \partial_k B - \partial_k A \cdot \partial_x B)$

# Quasiparticle approximation

- **Spectrum of the system $\mathcal{A}$ under the quasiparticle approximation: $\Gamma \ll \Omega^2$** $\quad \Omega^2 = k^2 - m^2$ (free field)

0th order in derivative

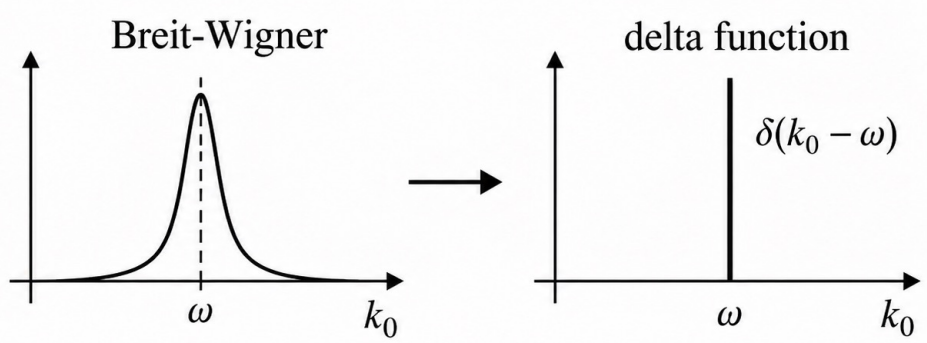
$$\mathcal{A}^{[0]} \sim \frac{\Gamma}{\Omega_0^4 + \Gamma^2} \to \delta(\Omega_0^2)$$

Breit-Wigner distribution

1st order in derivative (fermionic case)

$$\mathcal{A}^{[1]} \sim \Omega_1^2 \times \frac{2\Gamma\,\Omega_0^2}{(\Omega_0^4 + \Gamma^2)^2}$$

$$\to\ \Omega_1^2 \times \delta'(\Omega_0^2)$$




Modification of the on-shell condition from $\partial_z$ can be understood by $\delta(x) + \delta x\, \delta'(x) = \delta(x + \delta x) + \mathcal{O}(\partial_z^2)$.

- **The corrections from the Hermitian self-energy $g_{\mathcal{H}}$ are included in $\Omega_0^2$ and $\Omega_1^2$**

For example, $\Omega_0^2 = \left(k^0 - g_{\mathcal{H}}^0\right)^2 - \left(sk_z + g_{\mathcal{H}}^3\right)^2 - \left(m_R + g_{\mathcal{H}}^1\right)^2 - \left(m_I + g_{\mathcal{H}}^2\right)^2$ (fermionic case)

Derivative corrections included in $\Omega_1^2$ are CP-odd, $\Omega_{1,\mathrm{CP}}^2 = -\Omega_1^2$.

- **With a decomposition of $g$, the Wightman functions also have an on-shell part: $G \sim n\,\mathcal{A}$.**

# Restoring on-shell structure

- **Quasiparticle approximation in the narrow width limit**

  e.g., for the bosonic case, at zeroth order in the derivative expansion, the spectral function takes a Breit-Wigner form as given by

  (cf.) spectral function

  $$G_{\mathcal{A}} \equiv \frac{1}{2i}(G^a - G^r) = \frac{i}{2}(G^> - G^<) \equiv \mathscr{A},$$

  $$\hat{\mathscr{A}}_\phi^{[0]} = \sum_i \frac{\overline{\Pi}_{\mathcal{A}}}{\Omega_i^4 + \overline{\Pi}_{\mathcal{A}}^2} P_i \qquad P_i \hat{\mathscr{A}}_\phi^{[0]} \to \pi\,\mathrm{sign}(k^0)\,\delta(\Omega_i^2) \qquad P_i : \text{projection to i-th flavor}$$

- **Prescription such that the Wightman functions have the on-shell structure**

  In the absence of wall-gradients, the system should be in local thermal equilibrium ($\eta = \pm 1$)

  $$g^\lambda = \frac{2\eta}{i} n^\lambda_{\mathrm{leq}} g_{\mathcal{A}} \qquad n^<_{\mathrm{leq}} = \frac{1}{e^{\beta k\cdot u} - \eta} \qquad n^>_{\mathrm{leq}} = n^<_{\mathrm{leq}} + \eta$$

  Distribution will be modified by the wall-gradient $\quad n^\lambda_{\mathrm{leq}} \to n^\lambda(k,x)$

  e.g., for bosonic case, the zeroth order Wightman functions are $\quad P_i i\hat{\Delta}^\lambda_{\mathrm{shell}} = 2\pi n_i^\lambda \mathrm{sign}(k^0)\delta(\Omega_i^2)$ .

# How to solve the Boltzmann equation?

- **Moment expansion**

  Taking momentum averages (two lowest moments)

  0th $\int d^3p \times$ (Boltzmann)

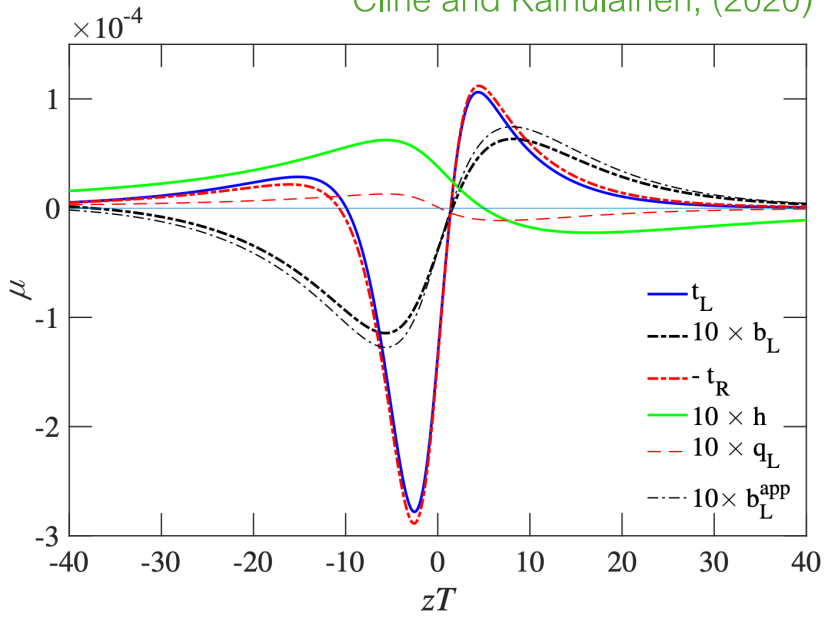
  1st $\int d^3p\ (p_z/\omega) \times$ (Boltzmann)

- **Transport equation for chemical potentials**

  $C_1\,\mu''(z) + C_2\,\mu'(z) + C_3\,\mu(z) = S_{\mathrm{CPV}}$ + collisions

  where, $\mu(z) = \mu_\psi - \mu_{\bar{\psi}}$ and $C_i$ are functions of $z, T, m,$ and wall velocity

Cline and Kainulainen, (2020)




- **Computing the baryon number generated by weak sphalerons from $\mu_{B_L}$**

- **Recent developments in higher-order moment expansions** Kainulainen and Venkatesan (2024)

# Discussions on VEV-insertion approximation

# VEV insertion approximation (VIA)

- **Transport equation proposed by Riotto in 1996-1998**

Left-handed current: $j_L^\mu(u) \equiv \langle \bar{\psi}(u)\gamma^\mu P_L \psi(u)\rangle = -\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu P_L\, iS^<(u,u)\right]$

$S^{<,>}$: Wightman function for a fermion

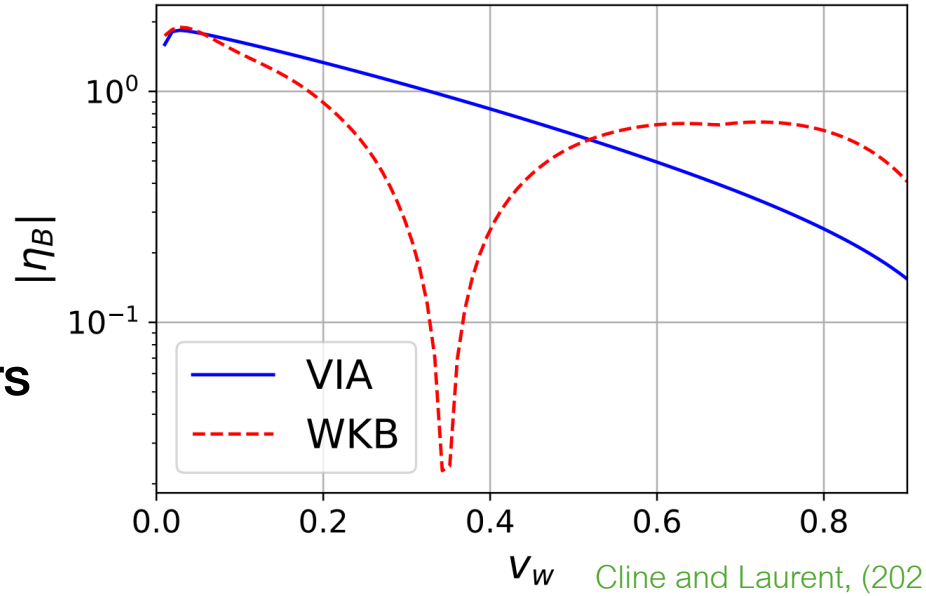
$\Sigma^{<,>}$: corresponding self-energy

Integrating the kinetic equation w.r.t. the momentum, the current divergence equation is written as

$$\partial_\mu j_L^\mu = \partial_t j_L^0 + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}_L = S^{\not{CP}}_{L,\mathrm{VIA}} + \mathcal{C}_L .$$

Using Fick's law $\boldsymbol{j}_L = -D_L \boldsymbol{\nabla} j_L^0$, we obtain the transport equation for number density $j_L^0$.

- **The baryon asymmetry predicted by the VIA method differs from that predicted by the SC (WKB) approach.**




Cline and Laurent, (2021)

Cline and Kainulainen, (2020); Cline and Laurent, (2021);

Basler, Biermann, Mühlleitner, and Müller, (2023);

# Problems with the VIA method

## ① Discussion by Kainulainen (2021)

- **The conventional VIA source:** $S^{\not{CP}}_{L,\mathrm{VIA}}(u) = 2|m(u)|^2\partial_\mu\theta(u)\int d^4w\,\Theta(u^0-w^0)\,(u-w)^\mu \times I_{\mathrm{VIA}}(u,w) + \mathcal{O}(\partial_u^2)$

  Non-zero chiral current source: $S^{\not{CP}}_{R,\mathrm{VIA}} = -S^{\not{CP}}_{L,\mathrm{VIA}}$

- **Pinch singularity from $I_{\mathrm{VIA}}$**

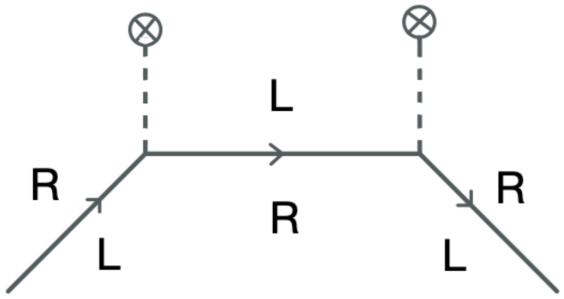
  The integrand is $I_{\mathrm{VIA}}(u,w) = \mathrm{Im}\Big[\mathrm{Tr}\left[iS^{>}_{0,L}(u,w)iS^{<}_{0,R}(w,u) - iS^{<}_{0,L}(u,w)iS^{>}_{0,R}(w,u)\right]\Big]$ .

  $$I_{\mathrm{VIA}} \sim \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}k^2(\mathrm{sign}(k^0))^2\delta(k^2)^2$$ → an ill-defined distribution with a singularity

- **It is regularized by replacing $S_0$ with a thermal propagator, but it is still scheme dependent.**

# What was the problem?

## ① Discussion by Kainulainen (2021)




- **One-particle-reducible diagrams**

The divergence equation is $\partial_\mu j^\mu_L(u) = -\lim_{v\to u} \mathrm{Tr}\left[(m(u)P_R - m^*(v)P_L)\, S^<(u,v)\right]$

$$- 2\int d^3\boldsymbol{w} \int_{-\infty}^{u^0} dw^0\, \mathrm{Re}\Big[\mathrm{Tr}\left[P_L\left(\Sigma^>(u,w)S^<(w,u) - \Sigma^<(u,w)S^>(w,u)\right)\right]\Big]$$

Riotto omitted the explicit local mass contribution
and instead incorporated the VEV effects through non-1PI mass-insertion diagrams in the collision kernel.

$$\mathrm{Tr}\left[P_L\left(\Sigma^>(u,w)S^<(w,u) - \Sigma^<(u,w)S^>(w,u)\right)\right] \simeq \mathrm{Tr}\left[\Sigma^>_{L,\mathrm{VIA}}(u,w)S^<_{0,L}(w,u) - \Sigma^<_{L,\mathrm{VIA}}(u,w)S^>_{0,L}(w,u)\right]$$

where $i\Sigma^\lambda_{L,\mathrm{VIA}}(u,w) = [-im(u)]\, iS^\lambda_{0,R}(u,w)\, [-im^*(w)]$ at leading order.

- **In the SC (and our) approach, the local mass effect is resummed into the propagators, and derivative corrections are consistently taken into account by the derivative expansion.**

# VIA cancellation

## ② Discussion by Postma, van de Vis, and White (2022)

- **Current divergence equation:** $\partial_{x,\mu} j_L^{\mu,\lambda}(x) = S^{\lambda}_{\mathrm{F},LL}$ Lesser current: $j_L^{\mu,<}(x) = \langle \overline{\psi_L}(v)\gamma^\mu \psi_L(u)\rangle\Big|_{u=v=x}$

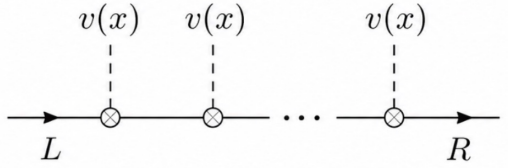
  Here, a Wigner transformation is performed, but an equivalent formula can be obtained from Riotto's formula.

  Current divergence: $$\partial_{x,\mu} j_L^{\mu,\lambda}(x) = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left[\left\{\frac{i}{2}\not{\partial}_x, P_L S^{\lambda}\right\}\right]$$

  Source: $$S^{\lambda}_{\mathrm{F},LL} = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left[\left(\mathcal{I}^{\lambda}\Big|_{\diamond^0}\right)_{LL}\right]$$

  Integrand: $$\mathcal{I}^{\lambda}\Big|_{\diamond^0} = \left[\mathcal{M} + \Sigma_H,\, S^{\lambda}\right] + \left[\Sigma^{\lambda},\, S_H\right] + \frac{1}{2}\left(\{\Sigma^{>}, S^{<}\} - \{\Sigma^{<}, S^{>}\}\right)$$

- **Substituting the VEV resummed solution at 0th order:** $S^{[0]} =$




  VIA cancellation: $$\underbrace{\left[M + \Sigma_H, S^{\lambda,[0]}\right]}_{\text{mass commutator}} + \underbrace{\left[\Sigma^{\lambda}, S_H^{[0]}\right] + \frac{1}{2}\left(\{\Sigma^{>}, S^{<,[0]}\} - \{\Sigma^{<}, S^{>,[0]}\}\right)}_{\text{collision}} = 0$$

# Behind the VIA cancellation

- **(Our 0th order solution) = (the VEV resummed solution of Postma et al.)**

We obtain the following formal solution of the KB equation:

Definition: $\alpha_\pm \equiv \not{k} - M_0 + i\gamma^5 M_5 + \Sigma_H \pm i\Sigma_A$

$$S^{\lambda,[0]} = \alpha_-^{-1}\,\Sigma^\lambda\,\alpha_+^{-1},$$ ← coincides with the VEV resummed solution!

$$S^{\lambda,[1]} = S^{\lambda,[0]}\, i\diamond(\alpha_+,\alpha_+^{-1}) + \alpha_-^{-1}\, i\diamond(\alpha_-, S^{\lambda,[0]}) - \alpha_-^{-1}\, i\diamond(\Sigma^\lambda,\alpha_+^{-1}).$$ ← NLO solution (important for CP violating source)

In particular, the 0th order solution is obtained from $\boxed{\alpha_- S^{\lambda,[0]} - \Sigma^\lambda S^{a,[0]} = 0,}$

Retarded: $S^{r,[0]} = \alpha_-^{-1}$

Advanced: $S^{a,[0]} = \alpha_+^{-1}$ .

- **Important rearrangement of the source kernel**

$$\mathcal{I}^\lambda\big|_{\diamond^0} = [\mathcal{M}+\Sigma_H,\, S^\lambda] + [\Sigma^\lambda,\, S_H] + \frac{1}{2}\left(\{\Sigma^>, S^<\} - \{\Sigma^<, S^>\}\right)$$
$$= -\alpha_- S^\lambda + \Sigma^\lambda S^a + S^\lambda \alpha_+ - S^r \Sigma^\lambda$$

- **VIA cancellation from our perspective**

$$\mathcal{I}^\lambda\big|_{\diamond^0} = -\underbrace{\left(\alpha_- S^{\lambda,[0]} - \Sigma^\lambda S^{a,[0]}\right)}_{=0} + \underbrace{\left(S^{\lambda,[0]}\alpha_+ - S^{r,[0]}\Sigma^\lambda\right)}_{=0} = 0$$

(h.c. of the 1st term)

# Summary around the VIA method

- **In 1996-1998, Riotto formulated transport equations with a CPV source by treating the spacetime-dependent VEV perturbatively through insertions in the self-energy.**
- **Kainulainen pointed out in 2021 that the treatment of the mass term in the VIA is inconsistent.**
  - The local mass term was treated perturbatively through VEV insertions in the self energy, rather than being consistently resummed into the propagators → pinch singularities.
  - The local mass effects should instead be resummed into the propagators, while derivative effects should be consistently incorporated through the derivative expansion, as in the SC approach and in our formulation.
- **Postma et al. showed the cancellation of the VIA source at $0^{th}$ order in 2022.**
  - We found that the VIA source kernel is built from the equations that determine the $0^{th}$ order solution.
  - Hence, it vanishes identically for the $0^{th}$ order solution.