

古典的スケール不変性を持った素粒子 モデルにおけるトポロジカルソリトンと その相互作用について

Yu Hamada (KEK)

2205.04394 [hep-ph], PRD 106 (2022) 116002

w/ M. Eto (Yamagata U.), R. Jinno (U. Tokyo),
M. Nitta (Keio U.), M. Yamada (Jilin U.)



目次

- 場の理論(古典論)
- トポロジカルソリトン
- 古典的スケール不変性とvortex string
- まとめ

場の理論(古典論)

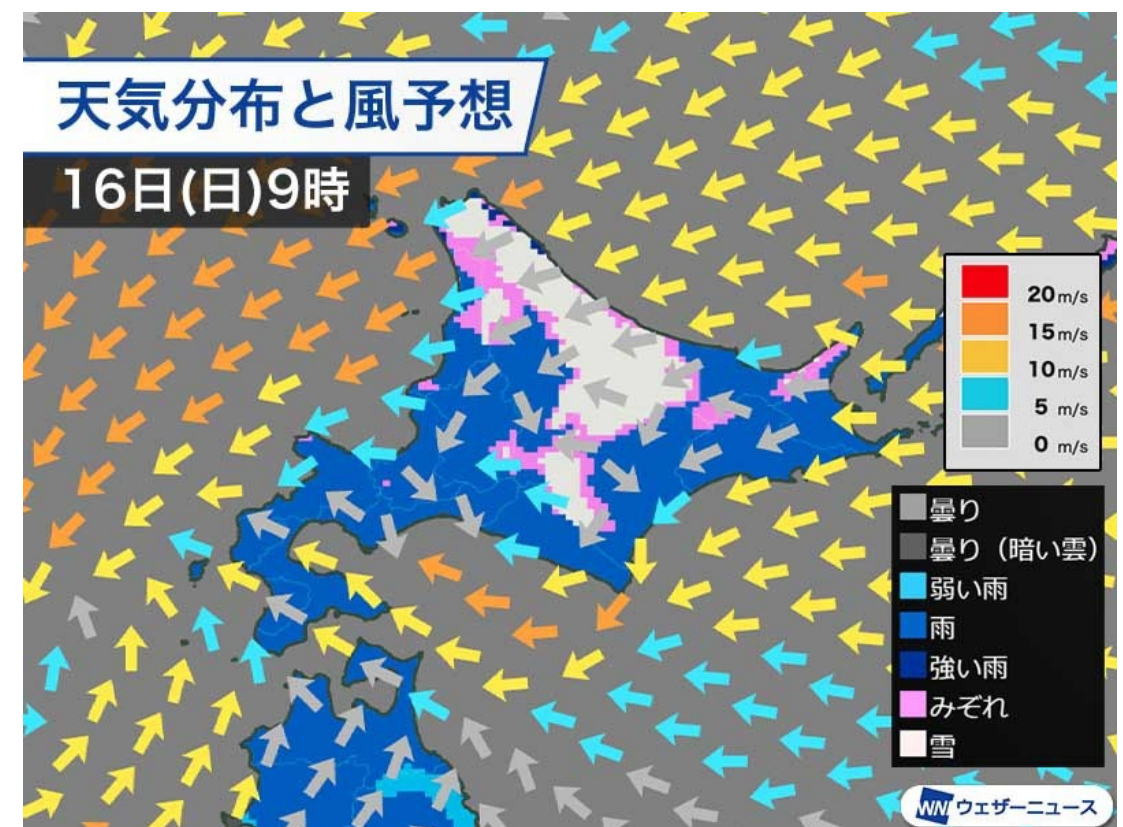
場とは

- 場 = 空間の各点上に定義された関数

スカラー関数 (スカラー場)



ベクトル関数 (ベクトル場)



- 数式で言うと

$$\phi(x, y, z) \equiv \phi(x)$$

$$\vec{A}(x, y, z) \equiv \vec{A}(x)$$

場とは

- 時刻 t に依存しててもいい： $\phi(x, y, z, t) \equiv \phi(x, t)$

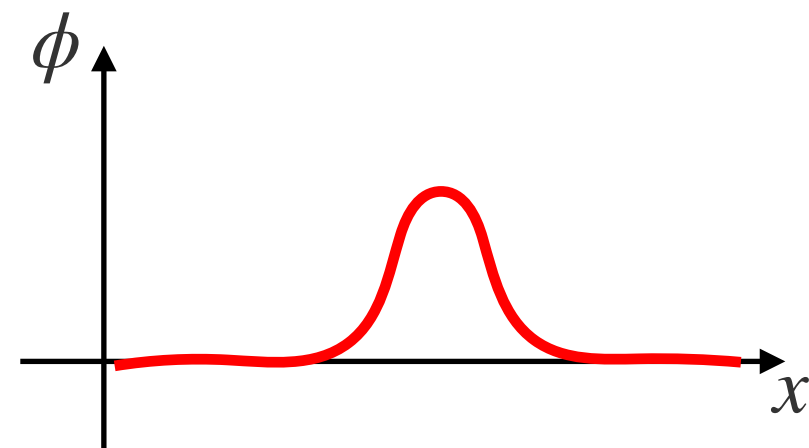
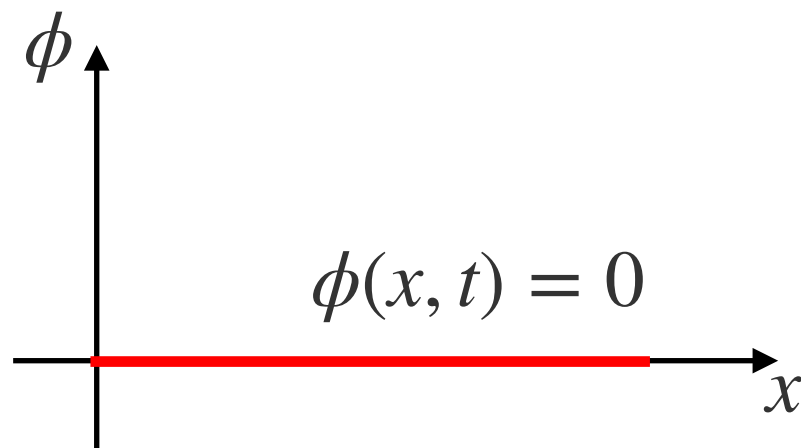


場の励起と粒子

- 場が励起してない(真空)



- 場が局所的に励起してる



場の励起と粒子

- 励起の伝搬は相対論的波動方程式(運動方程式)で記述される

- スカラー場のLagrangianは

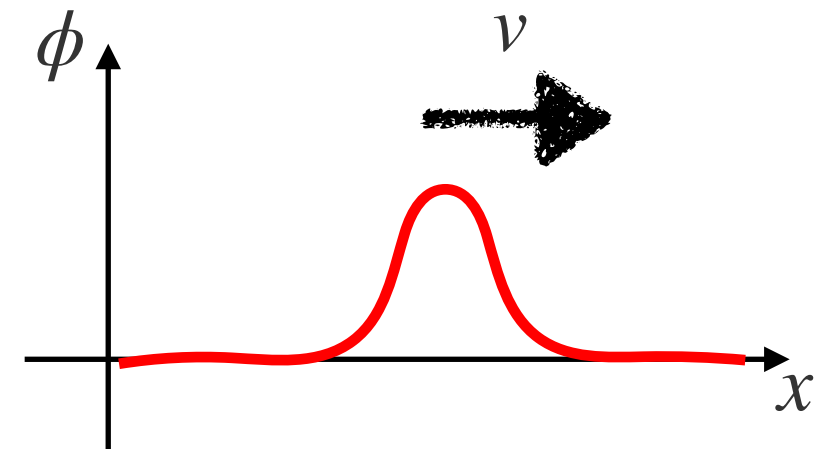
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 + \mathcal{O}(\phi^3)$$

→ Euler-Lagrange方程式 (運動方程式) :

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi(x, t) + m^2 \phi(x, t) = \mathcal{O}(\phi^2)$$

ほんとはnon-zeroの項があるけど、
 ϕ が十分小さいとして無視する

≒ 摂動的な励起 (自由場近似ともいう)



$$\partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \partial_i \partial_i$$

場の励起と粒子

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi(x, t) + m^2 \phi(x, t) = 0$$

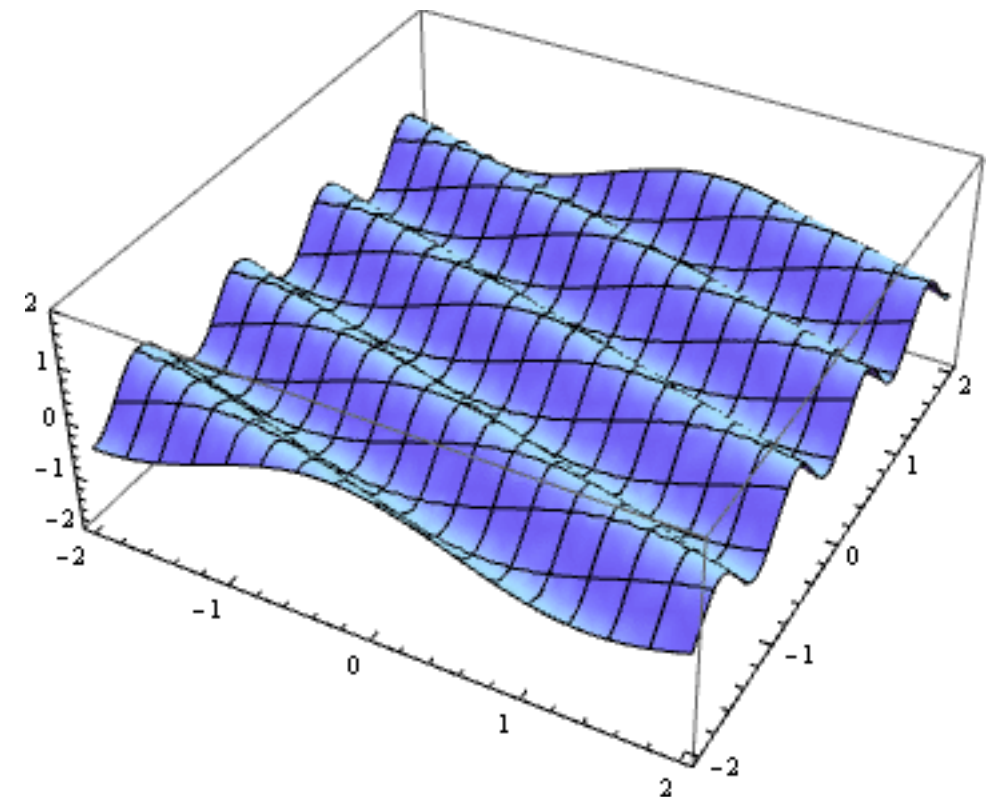
$$\partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \partial_i \partial_i$$

- 解いてみると

$$\phi(x, t) \sim e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad \omega \equiv \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

さっきの絵よりは↓みたいな感じ

$\vec{k}$ 方向に伝搬する平面波



場の励起と粒子

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi(x, t) + m^2 \phi(x, t) = 0$$

$$\partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \partial_i \partial_i$$

- 解いてみると

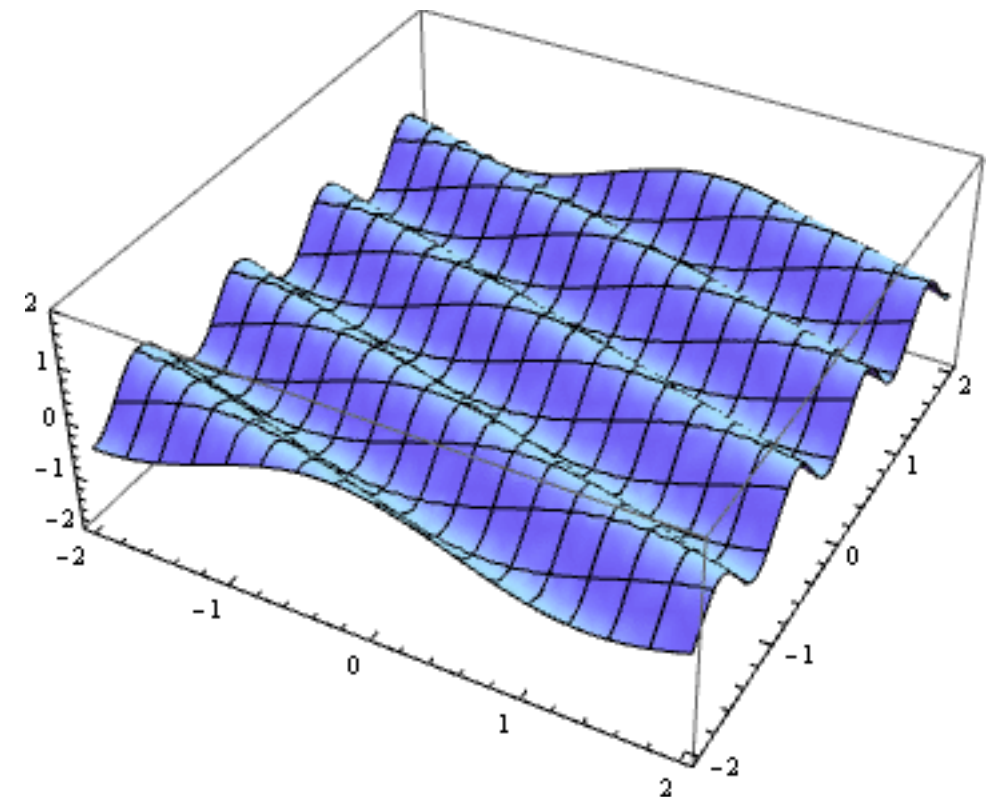
$$\phi(x, t) \sim e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad \omega \equiv \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

さっきの絵よりは↓みたいな感じ

$\vec{k}$ 方向に伝搬する平面波

- 場の理論では、このような励起の伝搬を粒子の運動とみなす！

量子力学の波動関数みたいだけどちょっと違う
(まだ量子化していない)



粒子とソリトン

- ソリトンと呼ばれる、別のタイプの励起もある

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi(x, t) + m^2 \phi(x, t) = \mathcal{O}(\phi^2)$$

さっきはこの部分(非線形項)を無視してたが、ここが重要になって安定な励起が存在することがある

粒子とソリトン

- ソリトンと呼ばれる、別のタイプの励起もある

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi(x, t) + m^2 \phi(x, t) = \mathcal{O}(\phi^2)$$

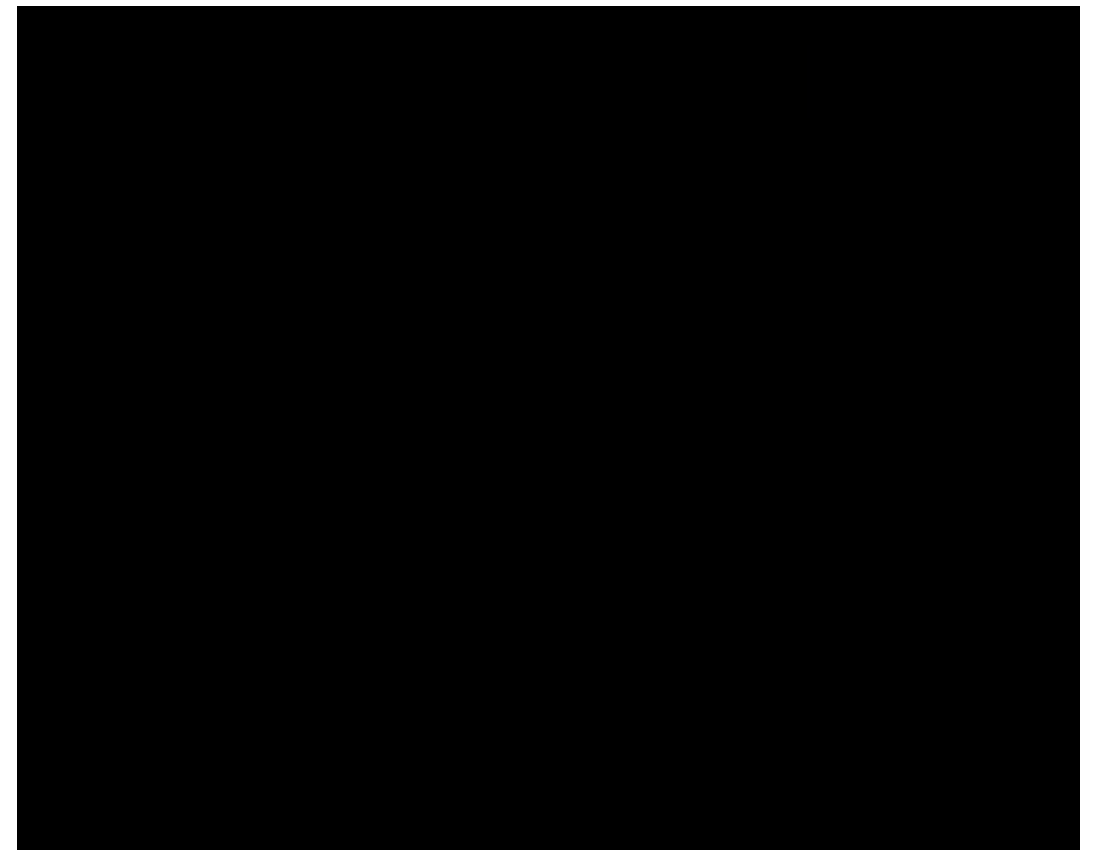
さっきはこの部分(非線形項)を無視してたが、ここが重要になって安定な励起が存在することがある

- 違う方程式での例

KdV方程式： $(\alpha, \beta$: 係数)

$$\partial_t u + \alpha u \partial_x u + \beta \partial_x^3 u = 0$$

非線形



粒子とソリトン

- ソリトンと呼ばれる、別のタイプの励起もある

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi(x, t) + m^2 \phi(x, t) = \mathcal{O}(\phi^2)$$

さっきはこの部分(非線形項)を無視してたが、ここが重要になって安定な励起が存在することがある

- 例2, 津波 (数式無し)



非線形性が重要な、非摂動的な励起
(ビッグウェーブみたいな感じ)

ここまでのまとめ

- 場の理論(古典論)における粒子：

非線形項を無視した波動方程式で記述される摂動的な励起

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi(x, t) + m^2 \phi(x, t) = 0 \quad \rightarrow \quad \phi(x, t) \sim e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$$

- ソリトン：

非線形性が重要な、非摂動的な励起
(ビッグウェーブみたいな感じ)

$$\partial_t u + \alpha u \partial_x u + \beta \partial_x^3 u = 0$$

非線形



目次

- 場の理論(古典論)
- トポロジカルソリトン
- 古典的スケール不変性とvortex string
- まとめ

トポロジカルソリトン

トポロジカルソリトン

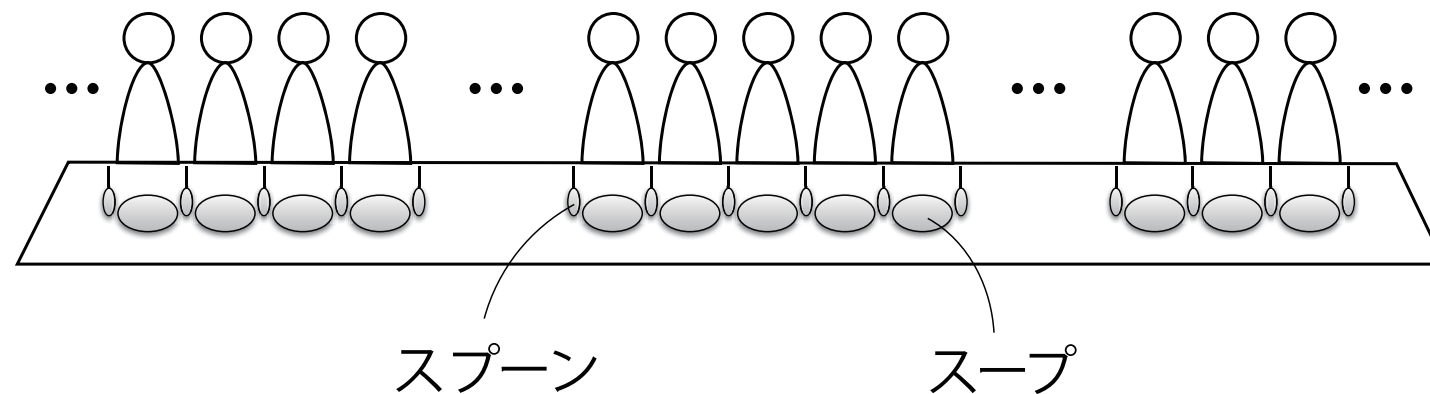
- ソリトンが安定に存在するかどうかは、考えてる模型(=ラグランジアン=EOM)によって違う
- 特に模型の持つトポロジー的な性質によって安定性が保証されるソリトンをトポロジカルソリトンと呼ぶ

トポロジー = 連続変形しても変わらない構造



トポロジカルソリトンの例1

- 非常に長いテーブルに人が座っていて、それぞれの前にスプーンとスプーンが置いてある

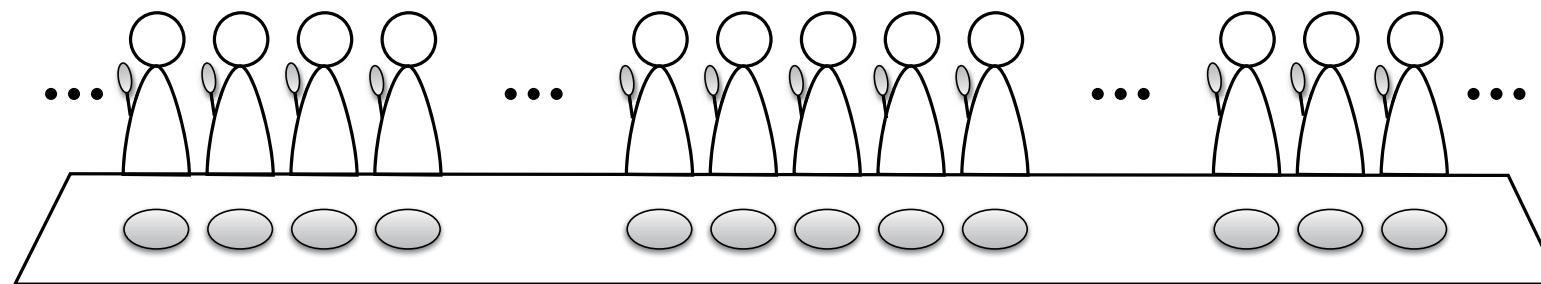


- 左右を反転させる変換のもとで不変 $\rightarrow \mathbb{Z}_2$ 対称性を持つ
- みんな早くスープを飲みたくてイライラしている。エネルギーが高い状態である。

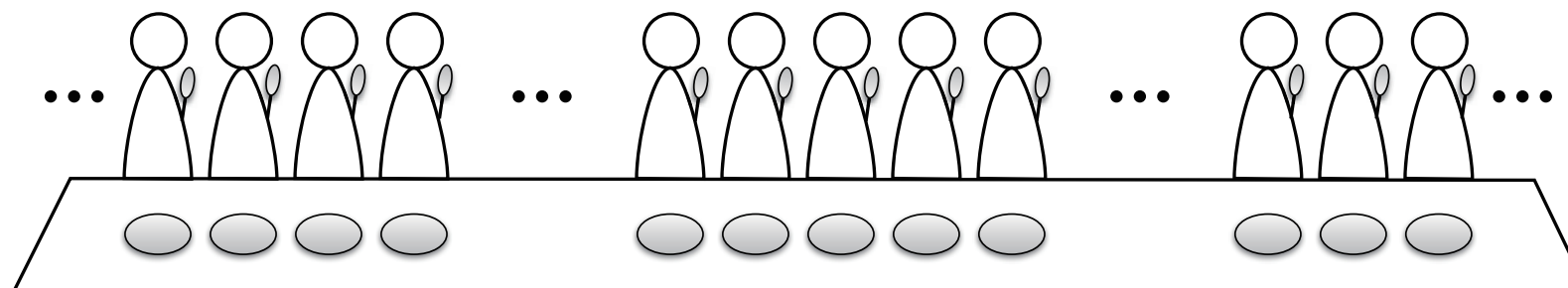
トポロジカルソリトンの例1

- 皆お腹が空いてきた。平和にスプーンを取るには次の2通りがある

全員が右手でスプーンを取った場合



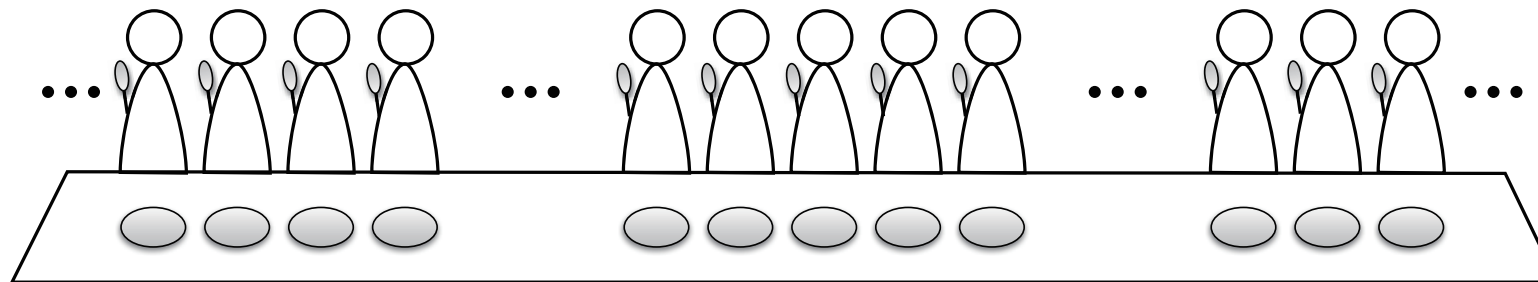
全員が左手でスプーンを取った場合



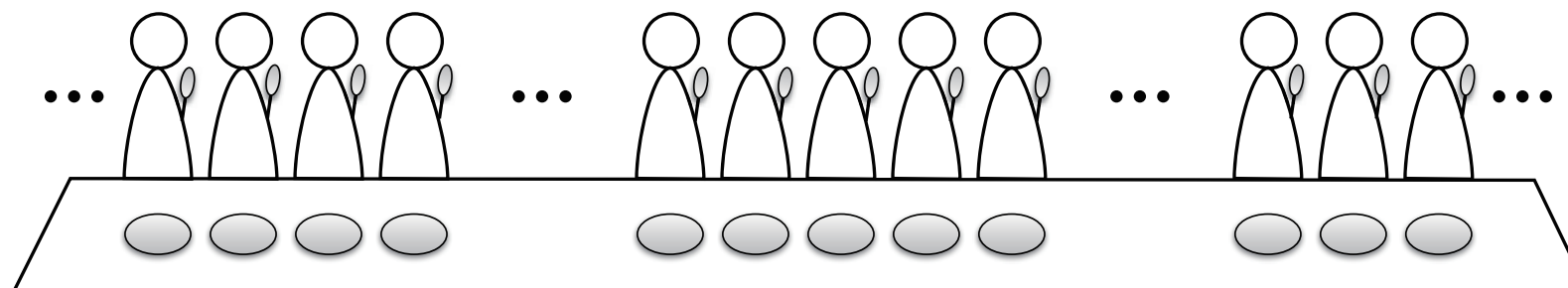
トポロジカルソリトンの例1

- 皆お腹が空いてきた。平和にスプーンを取るには次の2通りがある

全員が右手でスプーンを取った場合



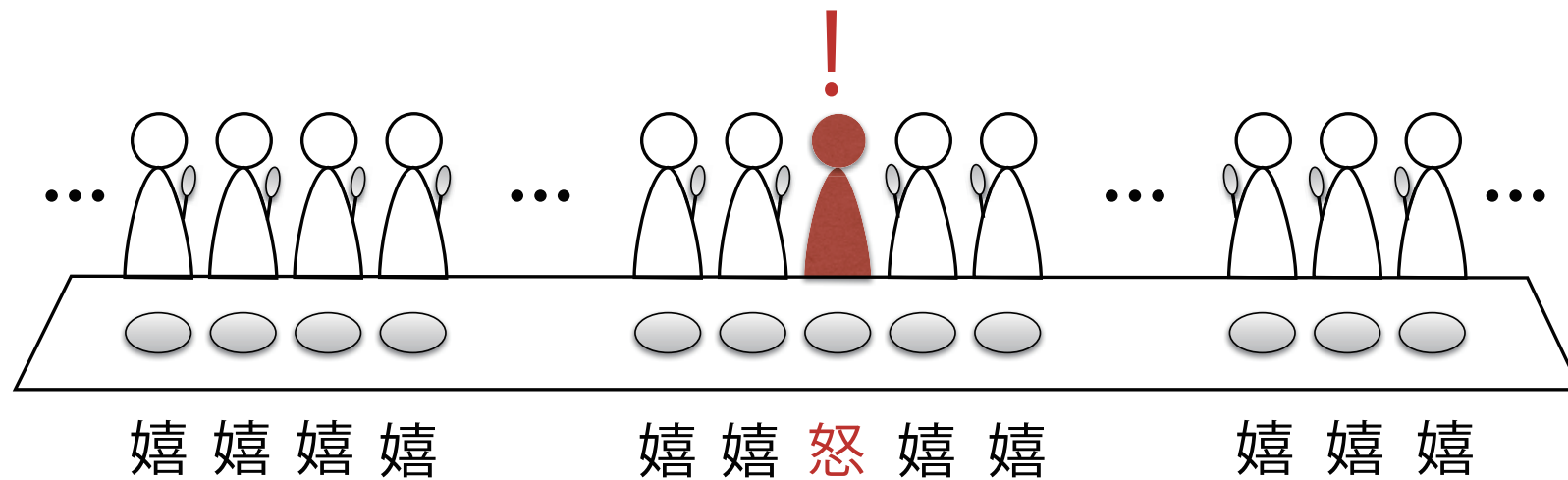
全員が左手でスプーンを取った場合



- 左右反転の対称性が破れている→対称性の自発的破れと呼ぶ

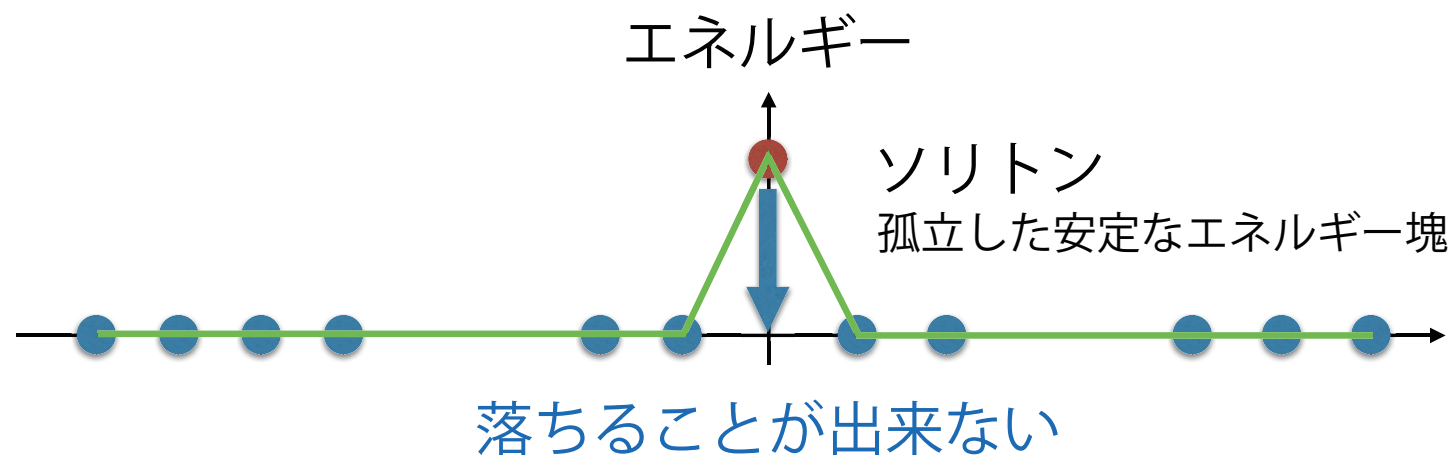
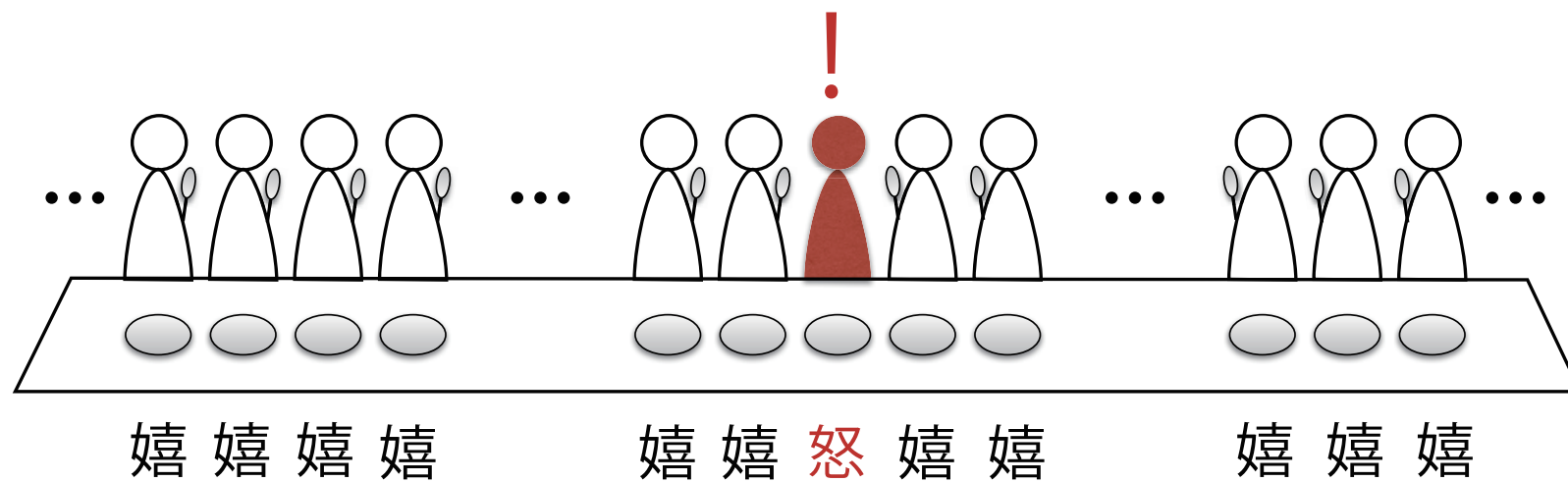
トポロジカルソリトンの例1

- 周りの人が適当に取ってしまうと、うっかりこういう状況が起きるかもしれない



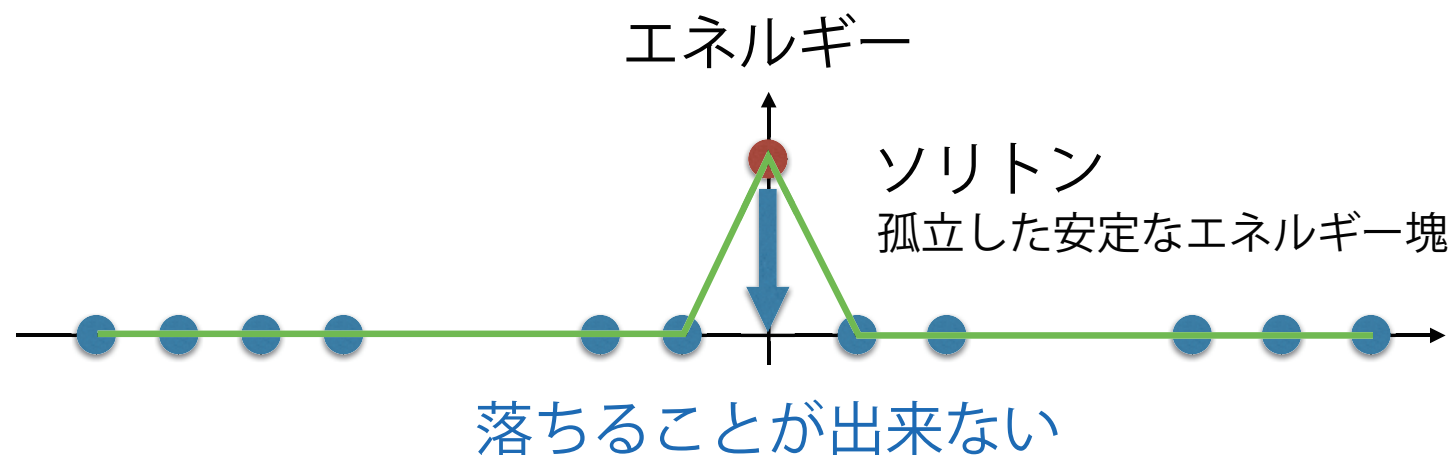
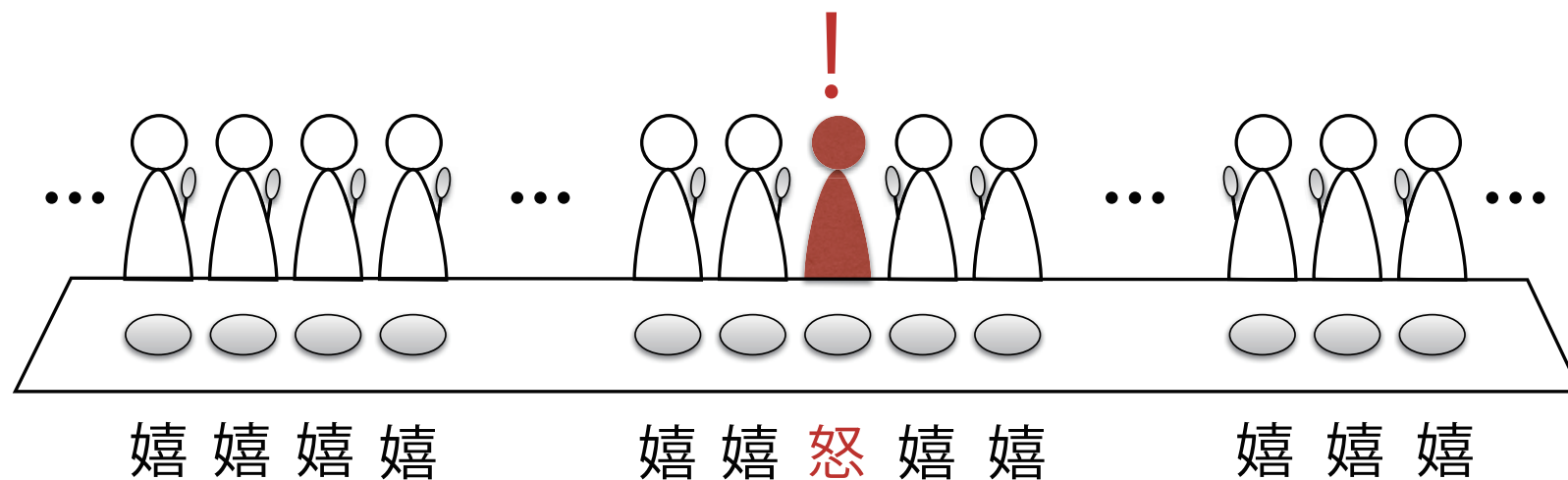
トポロジカルソリトンの例1

- 周りの人が適当に取ってしまうと、うっかりこういう状況が起きるかもしれない



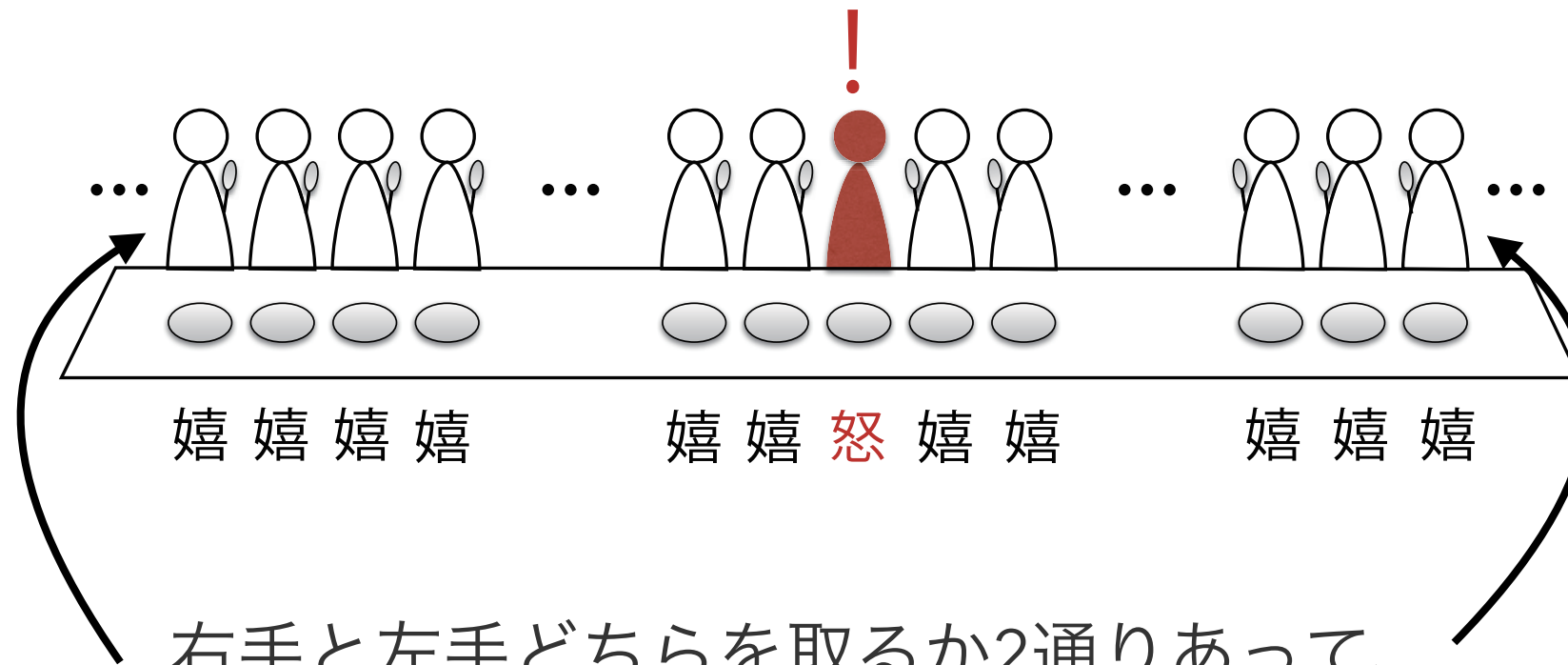
トポロジカルソリトンの例1

- 周りの人が適当に取ってしまうと、うっかりこういう状況が起きるかもしれない



- 隣の人からスプーンを奪っても、奪われた人がまた励起状態になるだけ → ソリトン自体は消えない

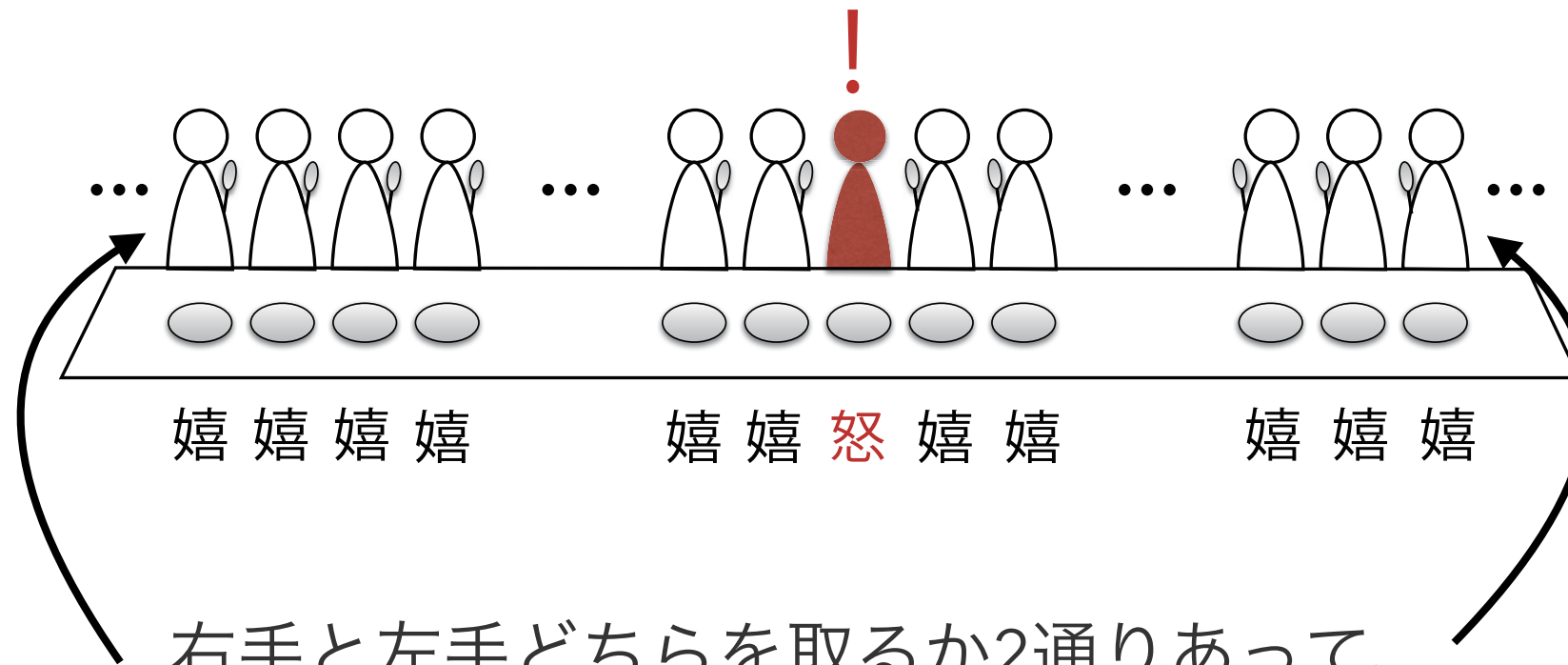
なぜこういうことが起きたのか？



右手と左手どちらを取るか2通りあって、
遠方の人々が別々の方を取ってしまった

→そのしわ寄せとしてソリトンが現れた

なぜこういうことが起きたのか？

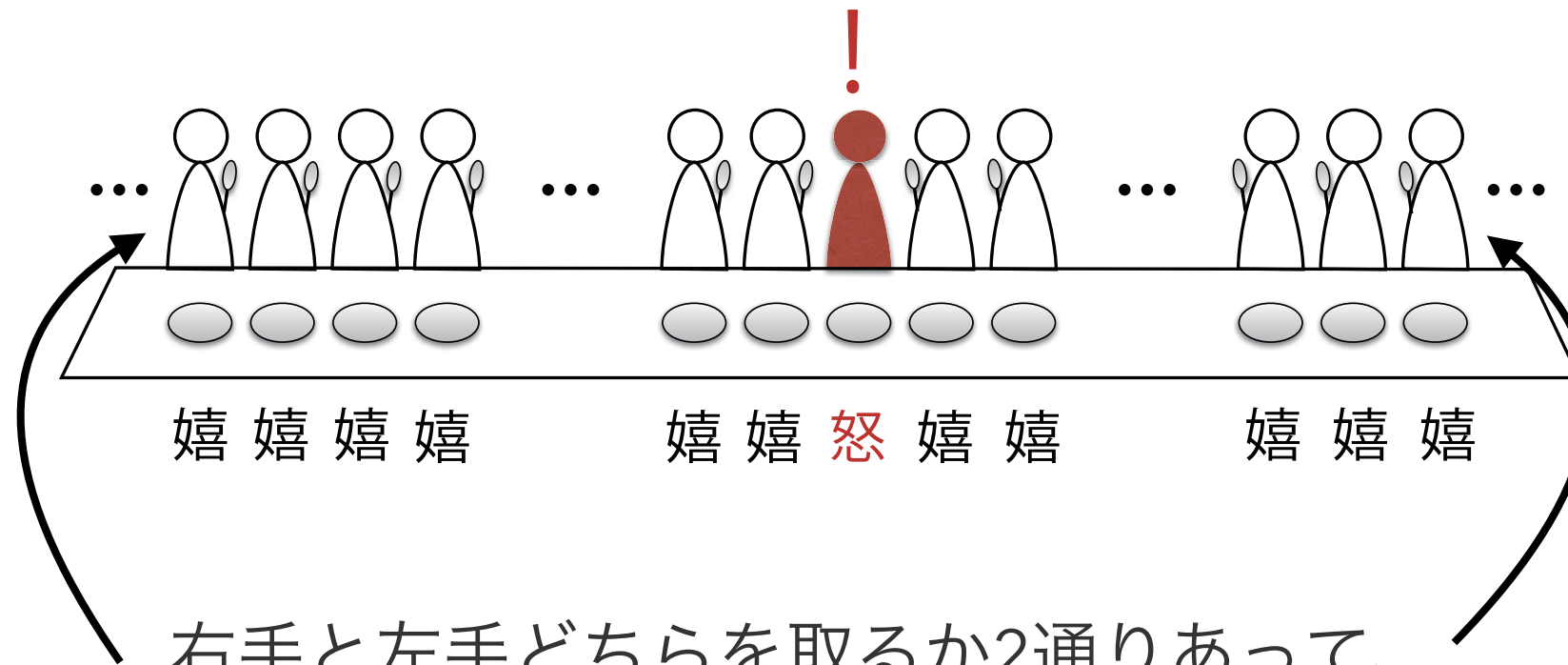


右手と左手どちらを取るか2通りあって、
遠方の人々が別々の方を取ってしまった

→そのしわ寄せとしてソリトンが現れた

一般化： エネルギー最低状態(真空)が2通りあって、端っこの方で別々の状態を取ると間にソリトンが現れる

なぜこういうことが起きたのか？



右手と左手どちらを取るか2通りあって、
遠方の人々が別々の方を取ってしまった

→そのしわ寄せとしてソリトンが現れた

一般化： エネルギー最低状態(真空)が2通りあって、端っこの方で別々の状態を取ると間にソリトンが現れる

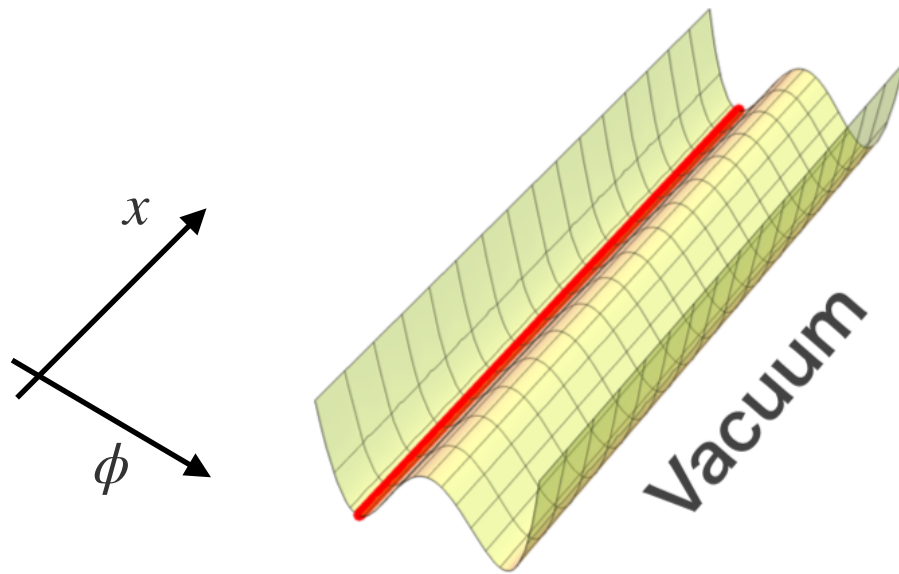
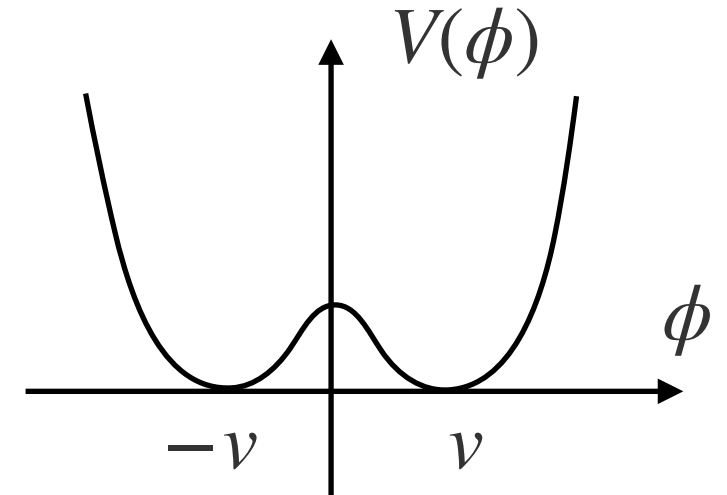
どう連続変形しても、ソリトンは消えない→トポロジカルに安定

対応する例: 1+1次元のキルクソリトン

- 同じことを数式でやりましょう

Lagrangian: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2$
(1+1 D)

ポテンシャル項 $V(\phi)$



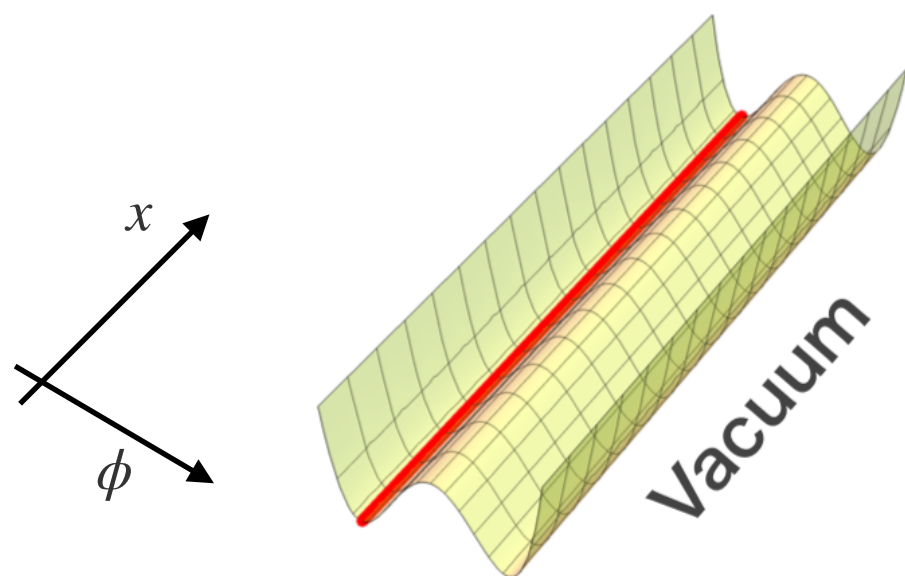
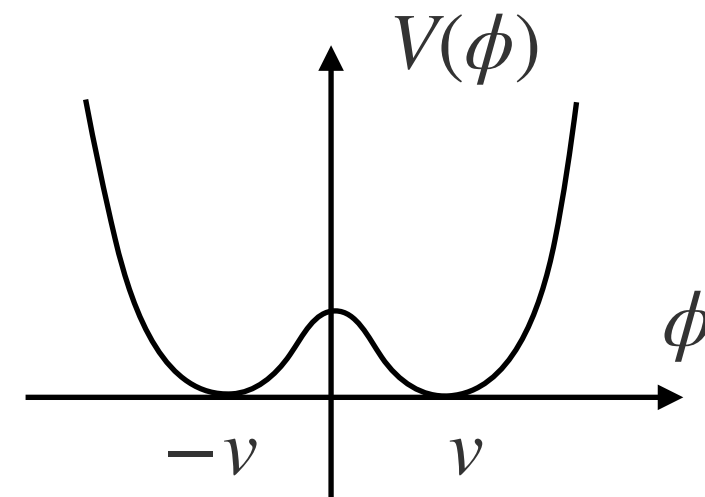
全体で左の真空を取った場合

対応する例: 1+1次元のキルクソリトン

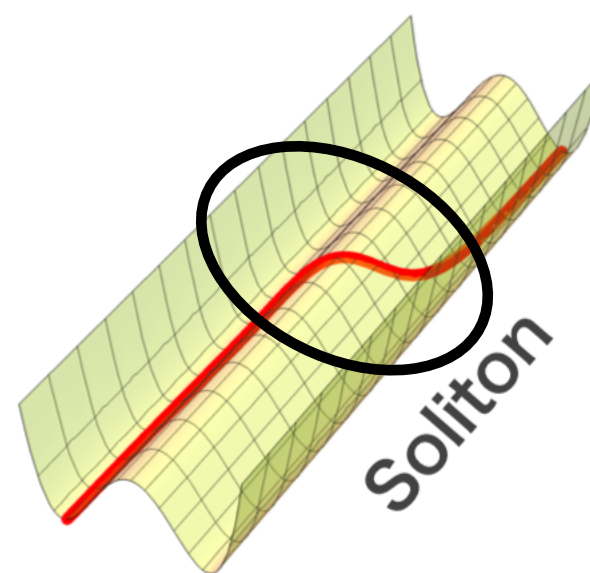
- 同じことを数式でやりましょう

Lagrangian: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2$
(1+1 D)

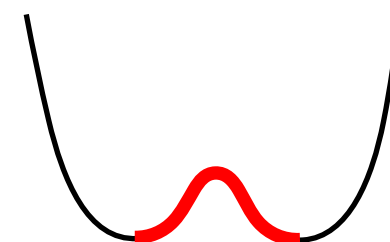
ポテンシャル項 $V(\phi)$



全体で左の真空を取った場合



端で別々の真空を選んでしまった
→ソリトン！

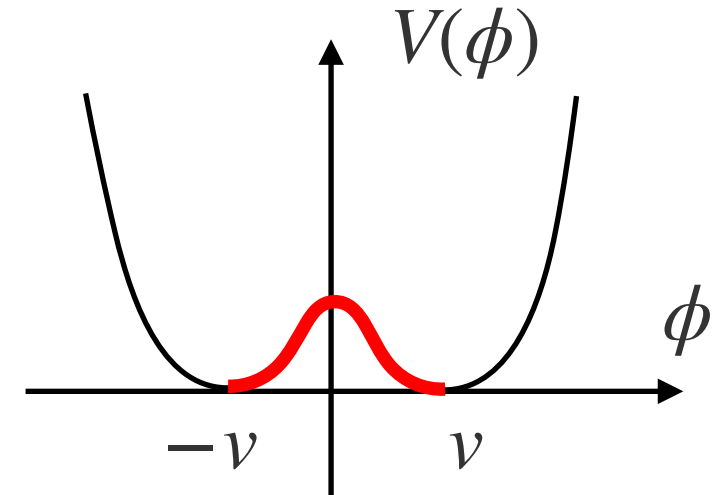


対応する例: 1+1次元のキルクソリトン

- 同じことを数式でやりましょう

Lagrangian: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2$
(1+1 D)

ポテンシャル項 $V(\phi)$



- 時間依存していない場合の運動方程式：

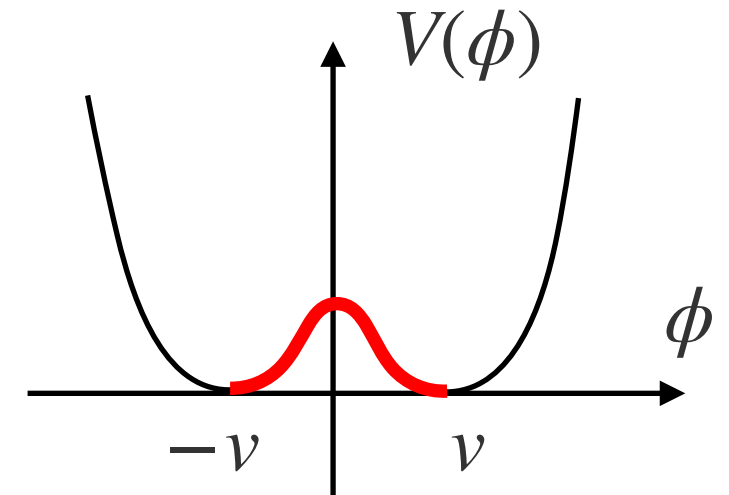
$$\partial_x^2 \phi(x) = \lambda(\phi^2 - v^2)\phi(x)$$

対応する例: 1+1次元のキルクソリトン

- 同じことを数式でやりましょう

Lagrangian: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2$
(1+1 D)

ポテンシャル項 $V(\phi)$

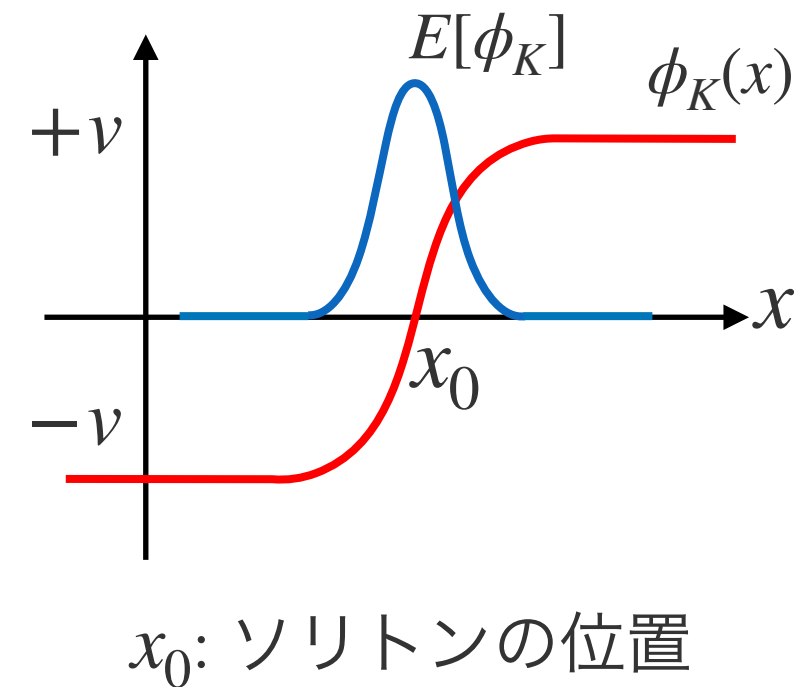


- 時間依存していない場合の運動方程式:

$$\partial_x^2 \phi(x) = \lambda(\phi^2 - v^2)\phi(x)$$

- 端で別々の真空を選んだというのを反映するため、
境界条件 $\phi|_{x=\pm\infty} = \pm v$ のもとで解くと

$$\phi_K(x) = v \tanh \left[\sqrt{\frac{\lambda}{2}} v (x - x_0) \right]$$



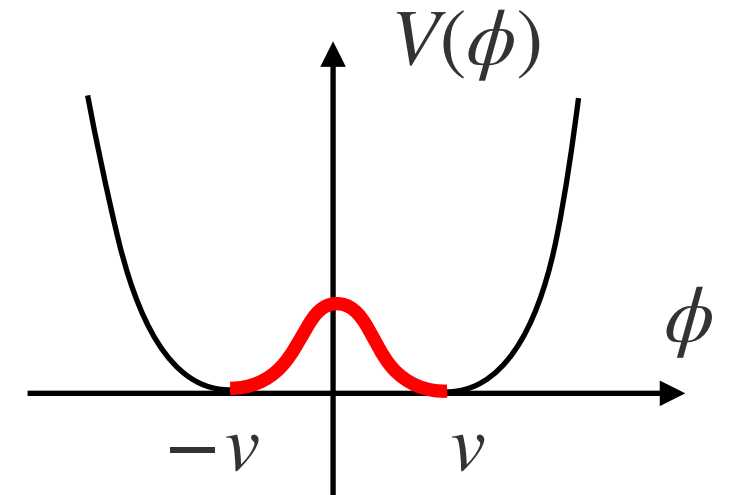
x_0 : ソリトンの位置

対応する例: 1+1次元のキルクソリトン

- 同じことを数式でやりましょう

Lagrangian: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2$
(1+1 D)

ポテンシャル項 $V(\phi)$



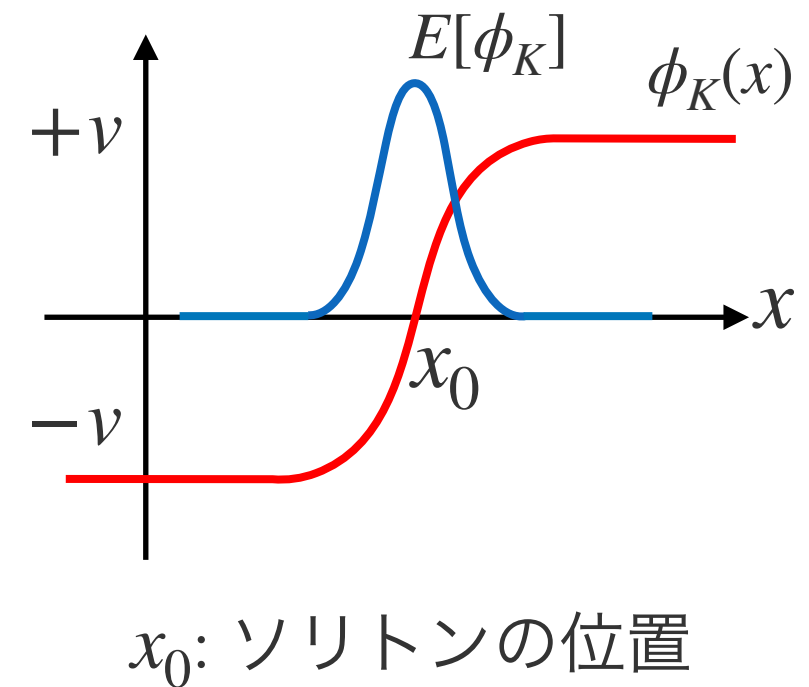
- 時間依存していない場合の運動方程式:

$$\partial_x^2 \phi(x) = \lambda(\phi^2 - v^2)\phi(x)$$

- 端で別々の真空を選んだというのを反映するため、
境界条件 $\phi|_{x=\pm\infty} = \pm v$ のもとで解くと

$$\phi_K(x) = v \tanh \left[\sqrt{\frac{\lambda}{2}} v (x - x_0) \right]$$

エネルギーの励起=ソリトンが現れた!



トポロジカルソリトンの例2

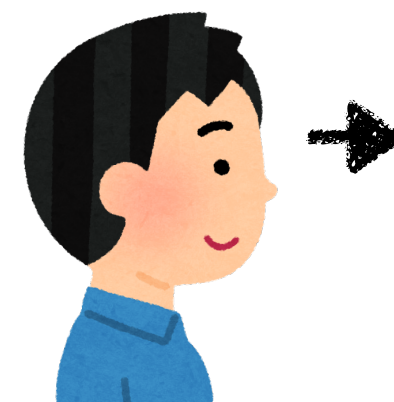
- 人がいっぱいいるエレベータの中って、なんとなく上を向いちゃいますよね
- 真上を向いてるとすると、それぞれの人
は回転対称性を持つ
- 首が疲れると、視線を下ろしたくなる
→ 回転対称性が自発的に破れる



回転対称



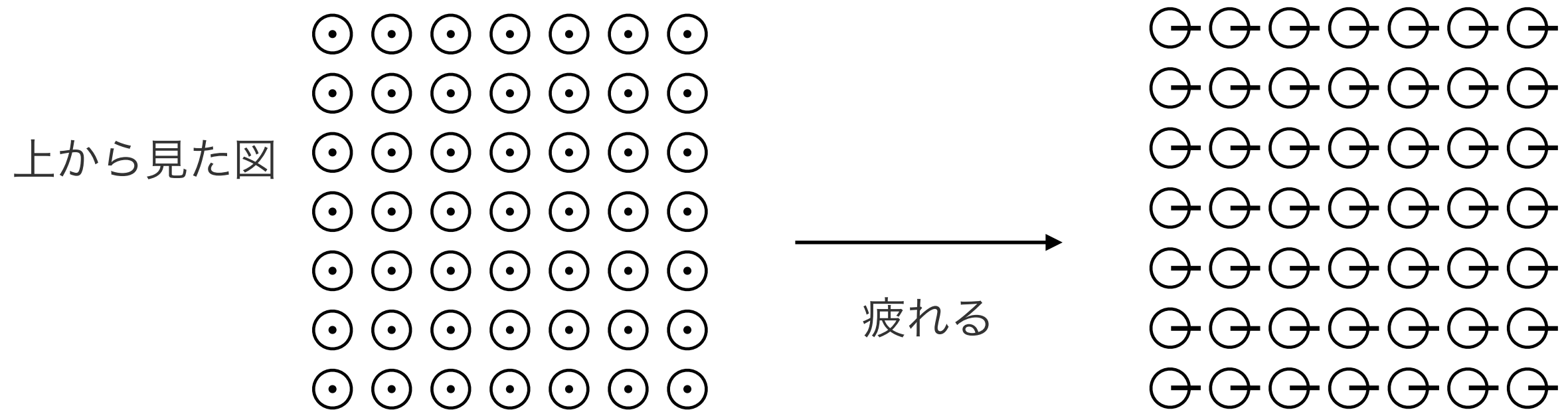
疲れる



エネルギーが低い状態

トポロジカルソリトンの例2

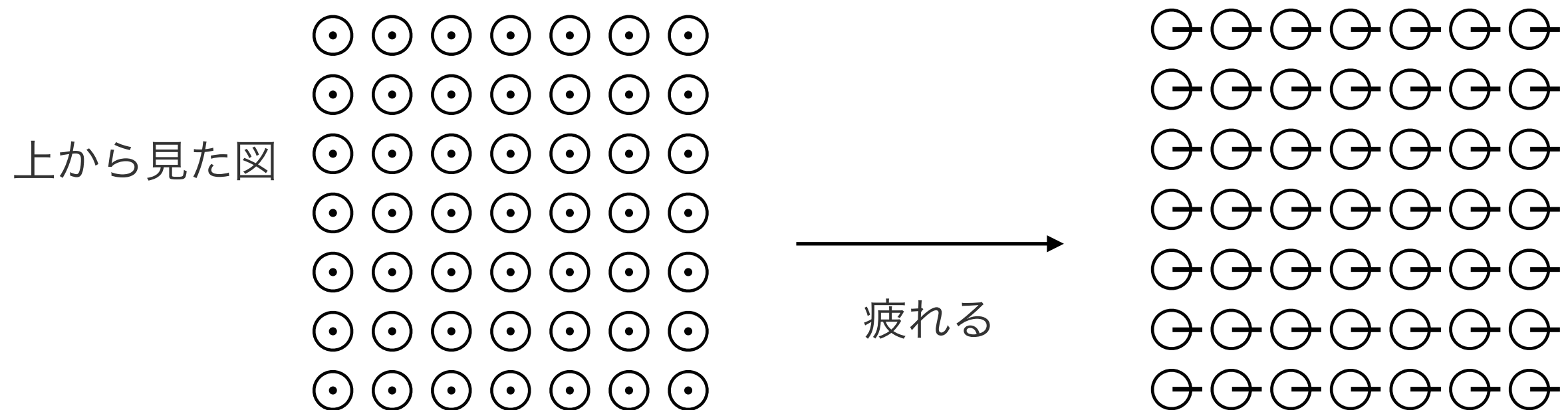
- この人たちがエレベーターにいったいいいたとしましょう



- みんな右を向いてて、誰とも見つめ合わないので平和

トポロジカルソリトンの例2

- この人たちがエレベーターにいったいいたとしましょう



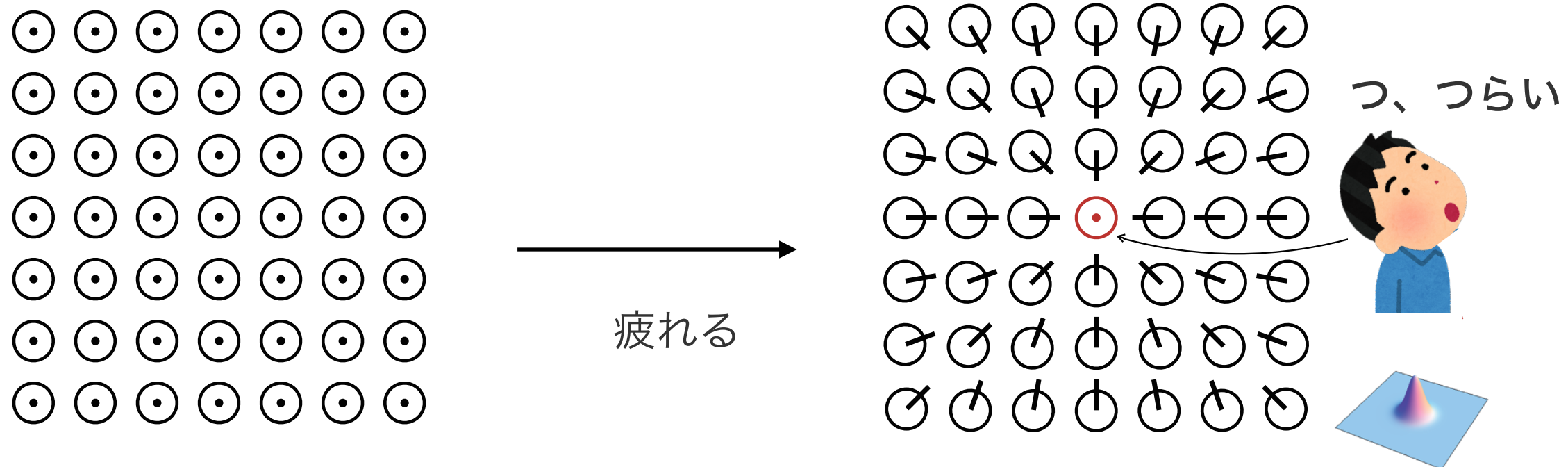
- みんな右を向いてて、誰とも見つめ合わないので平和
- 全体が0から 2π のどの方向を向いてても同じ

真空は角度 $\theta \in [0, 2\pi)$ の自由度を持つ

→ 真空は円周(S^1)をなす

トポロジカルソリトンの例2

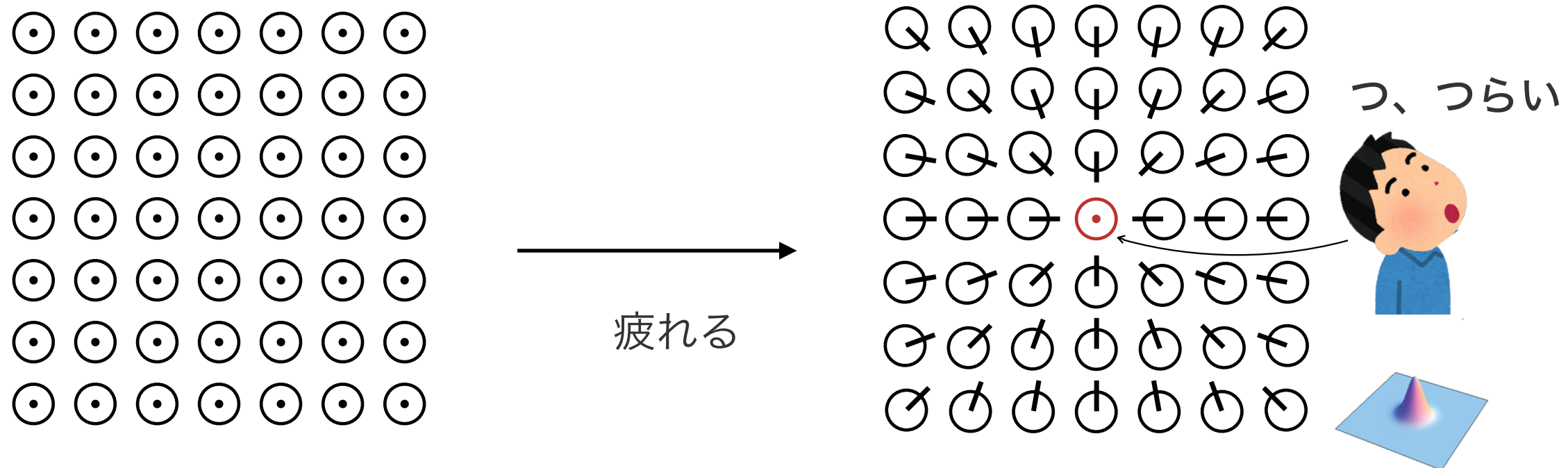
- うっかりこういうこともあるかもしれない



- 誰とも見つめ合いたくないので、真ん中の人が視線を下ろせなくなってしまった！

トポロジカルソリトンの例2

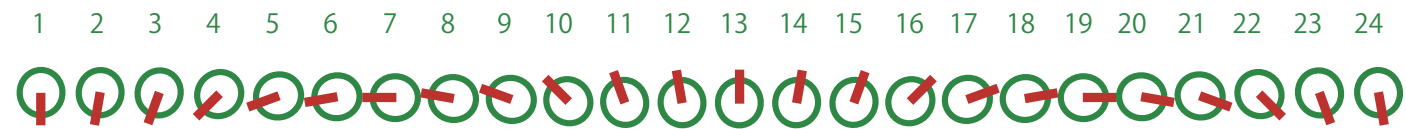
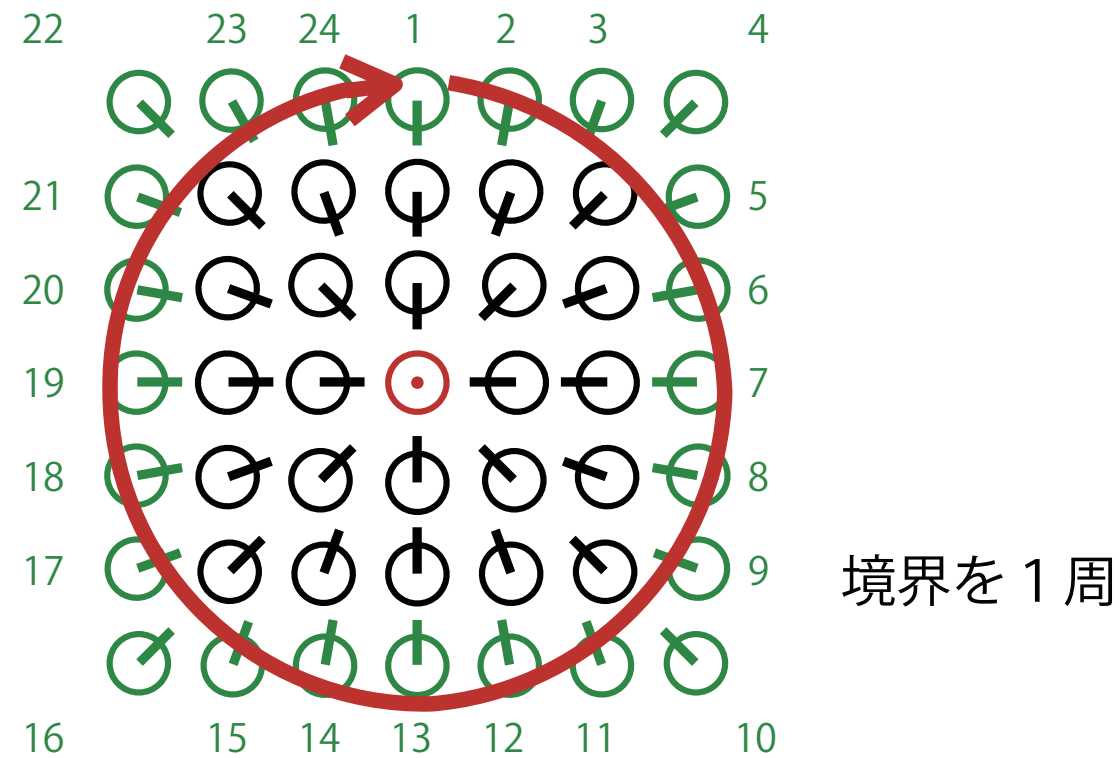
- うっかりこういうこともあるかもしれない



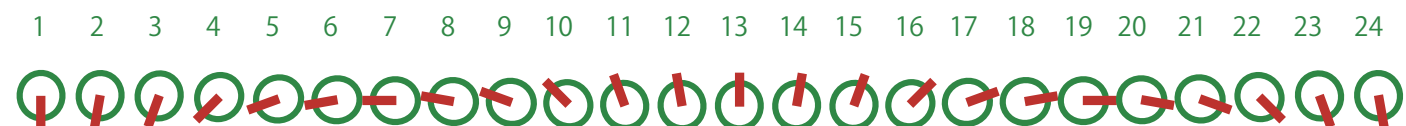
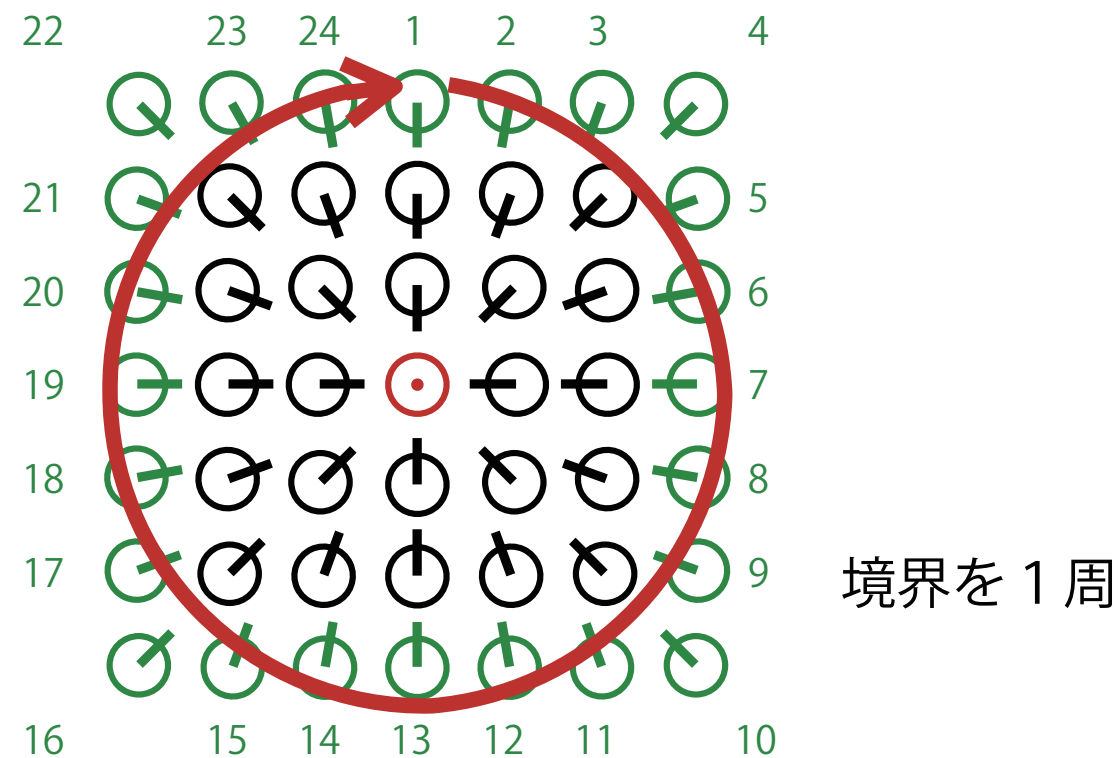
- 誰とも見つめ合いたくないので、真ん中の人が視線を下ろせなくなってしまった！

真ん中はエネルギーが高い→ソリトン！

なぜこういうことが起きたのか？



なぜこういうことが起きたのか？



真空中に円周 S^1 の自由度があって、境界で一周してると中心にソリトンが現れる

対応する例: 2+1次元のvortex

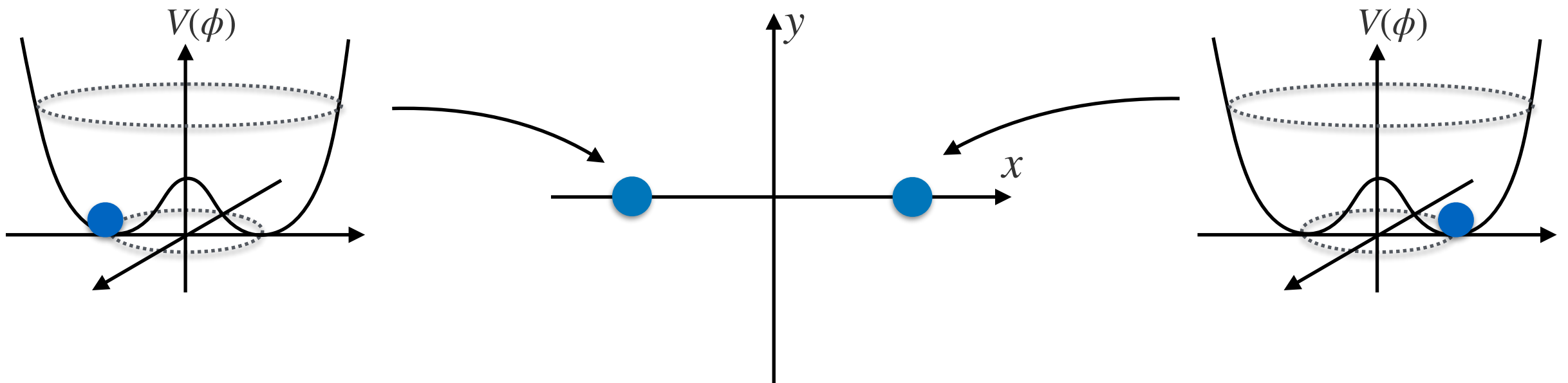
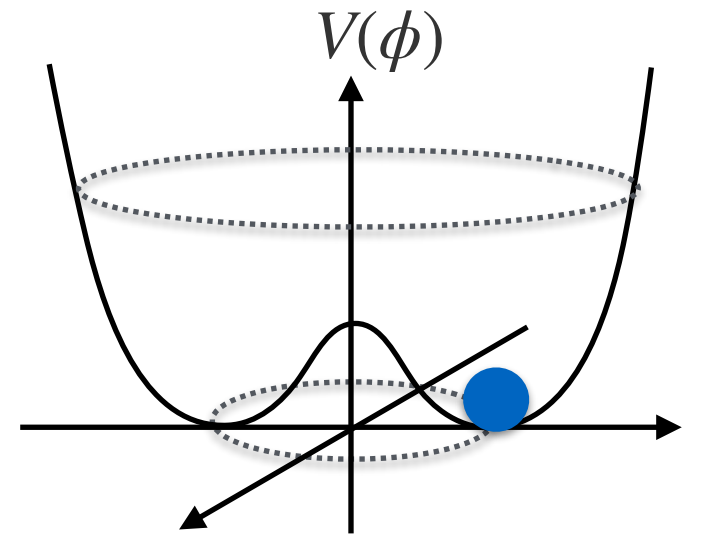
- Abelian-Higgs model in 2+1D

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_{\mu}\phi|^2 + m^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4$$

- ϕ が真空を選ぶ: $\langle\phi\rangle = ve^{i\theta_0}$

→ $U(1)$ 対称性が自発的に破れる

- それぞれの場所で違う真空を選んだとする

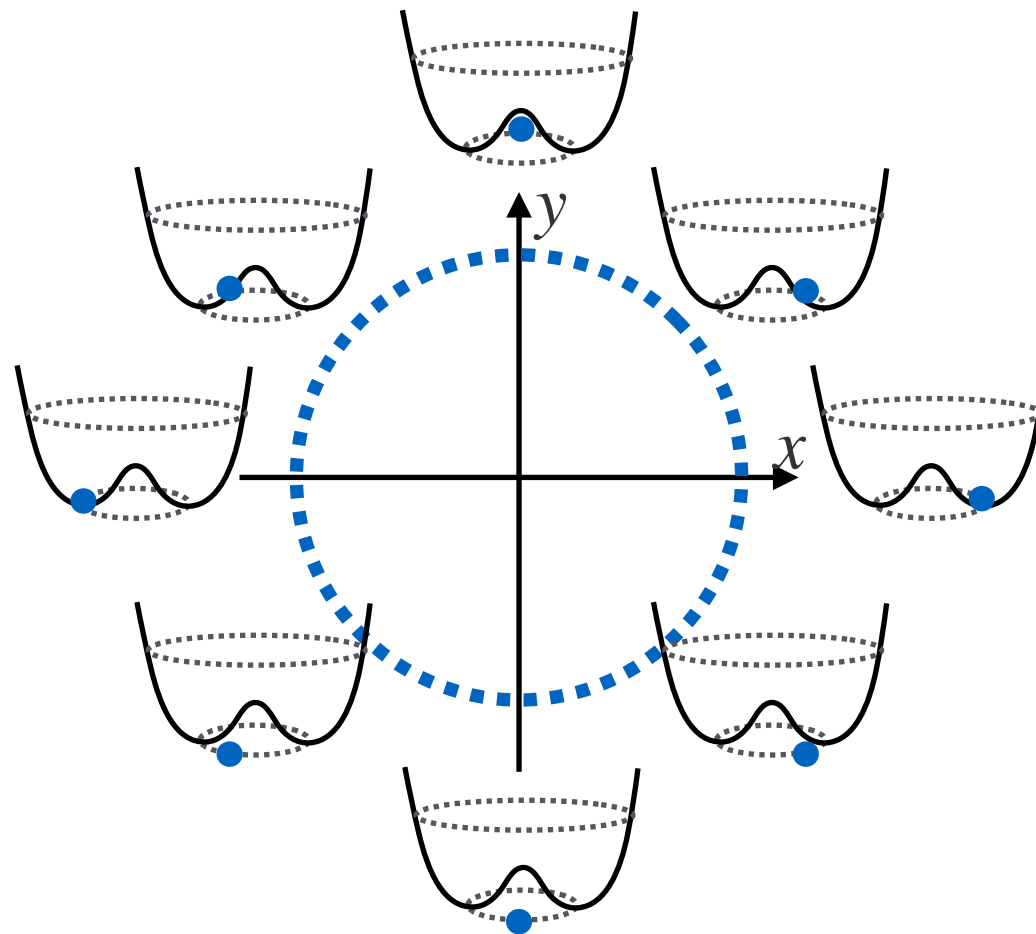


対応する例: 2+1次元のvortex

- Abelian-Higgs model in 2+1D

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_{\mu}\phi|^2 + m^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4$$

- 特に、遠方で ϕ の位相が一周してるとする

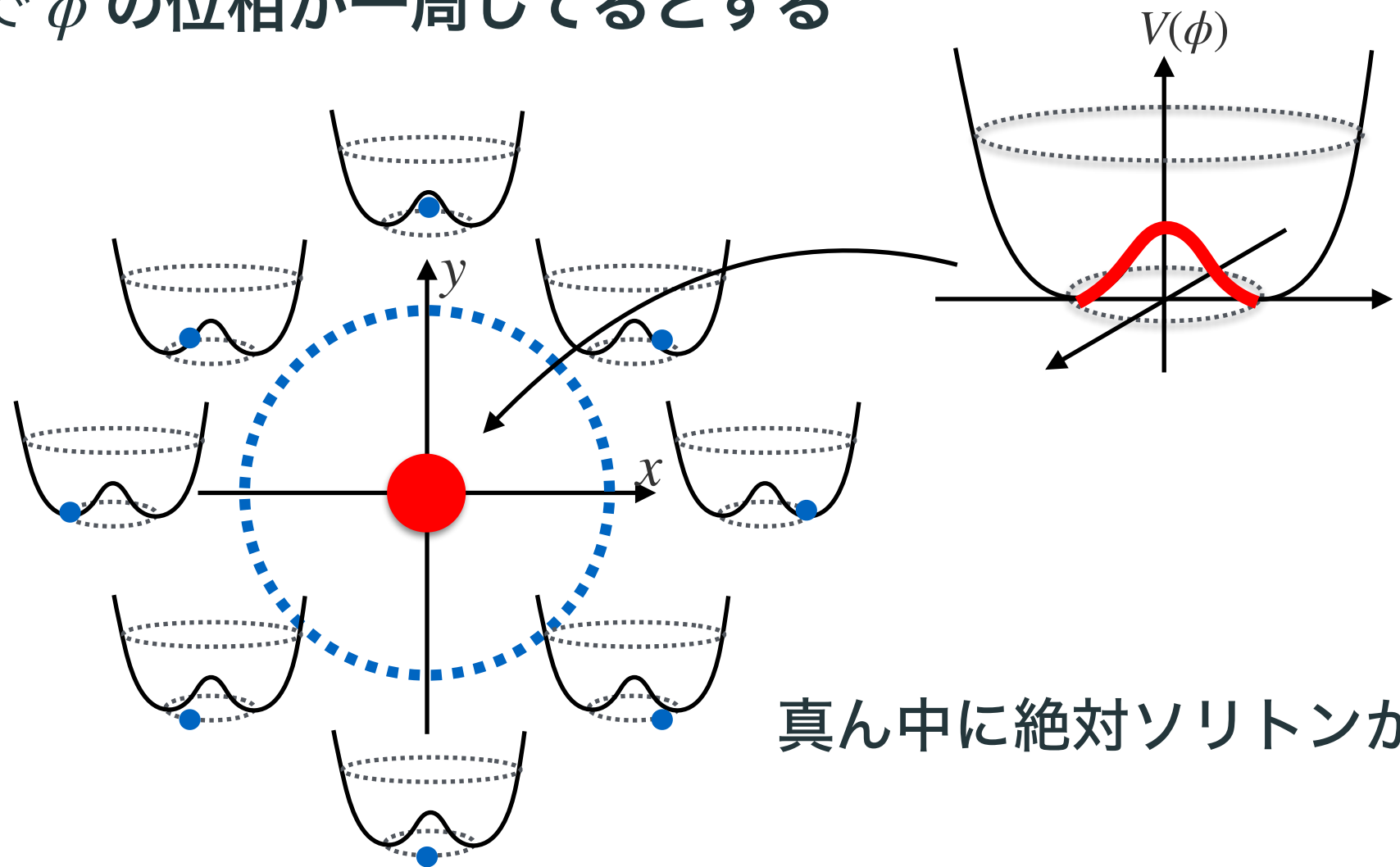


対応する例: 2+1次元のvortex

- Abelian-Higgs model in 2+1D

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_{\mu}\phi|^2 + m^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4$$

- 特に、遠方で ϕ の位相が一周してるとする



真ん中に絶対ソリトンが現れる！

対応する例: 2+1次元のvortex

[Abrikosov '58]

[Nielsen-Olesen '73]

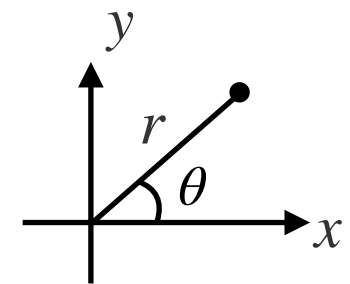
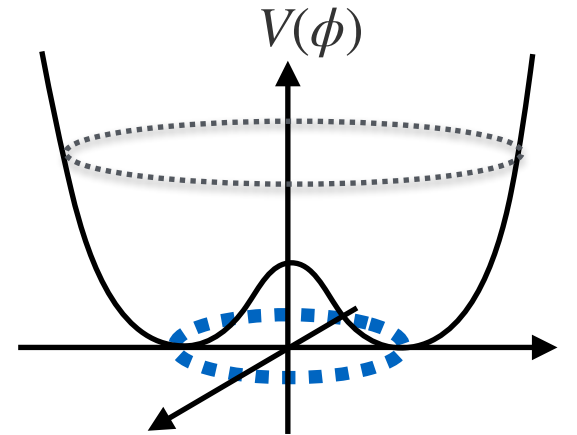
- Abelian-Higgs model in 2+1D

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_{\mu}\phi|^2 + m^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4$$

- 以下の場の配位を仮定：

$$\phi(x) = v f(r) e^{i\theta} \quad A_{\theta}(x) = a(r) \quad \text{ただし } f(\infty) = a(\infty) = 1$$

ϕ の位相が一周巻き付いてる



対応する例: 2+1次元のvortex

[Abrikosov '58]

[Nielsen-Olesen '73]

- Abelian-Higgs model in 2+1D

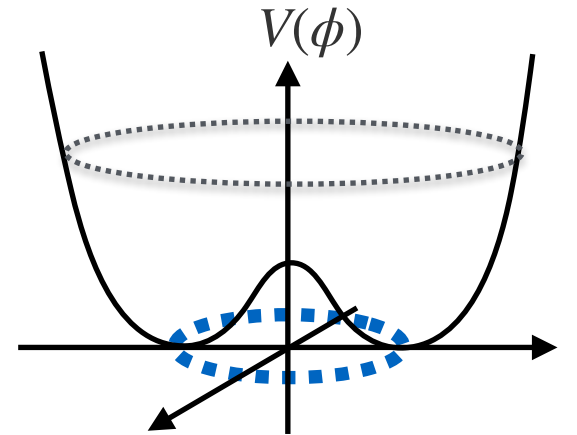
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_{\mu}\phi|^2 + m^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4$$

- 以下の場の配位を仮定：

$$\phi(x) = v f(r) e^{i\theta} \quad A_{\theta}(x) = a(r)$$

$$\text{ただし } f(\infty) = a(\infty) = 1$$

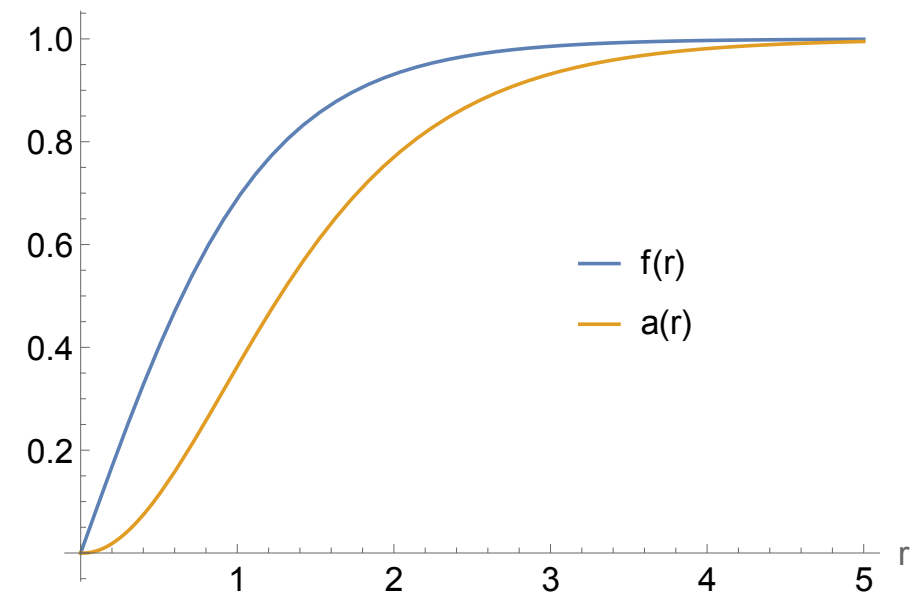
ϕ の位相が一周巻き付いてる



- 運動方程式：

$$f'' + \frac{1}{r}f' - \frac{(1-a)^2}{r^2}f - \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial f} = 0$$

$$a'' - \frac{1}{r}a' + 2(1-a)f^2 = 0$$



対応する例: 2+1次元のvortex

[Abrikosov '58]

[Nielsen-Olesen '73]

- Abelian-Higgs model in 2+1D

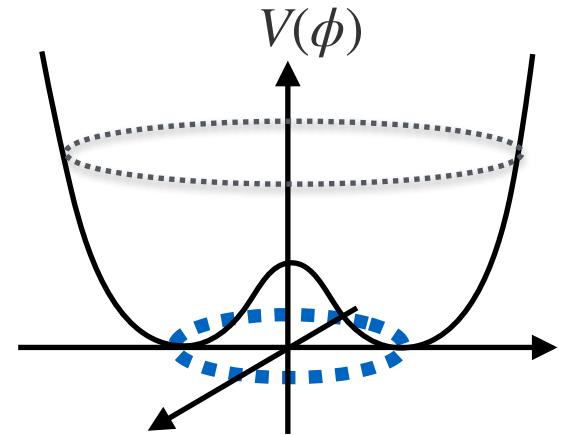
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_{\mu}\phi|^2 + m^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4$$

- 以下の場の配位を仮定：

$$\phi(x) = v f(r) e^{i\theta} \quad A_{\theta}(x) = a(r)$$

$$\text{ただし } f(\infty) = a(\infty) = 1$$

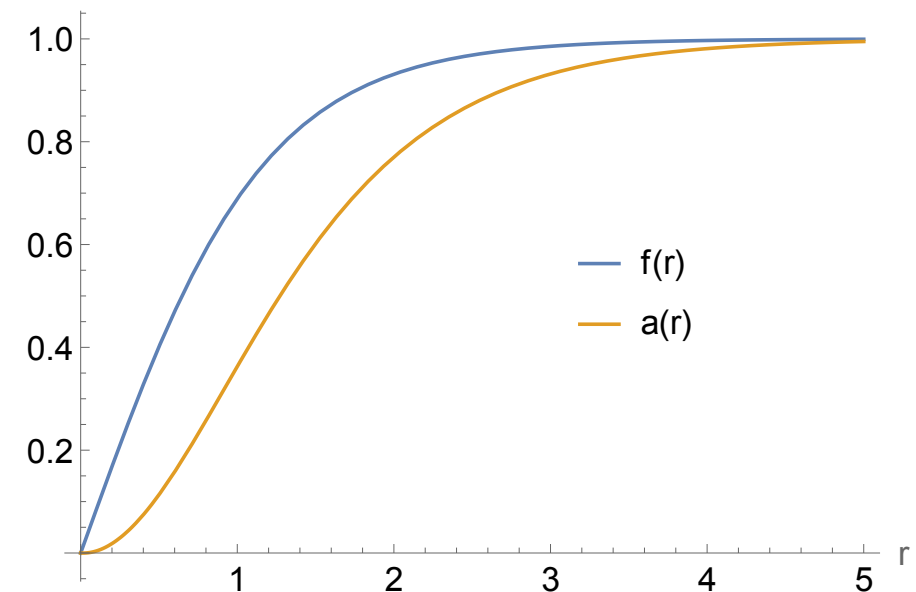
ϕ の位相が一周巻き付いてる



- 運動方程式：

$$f'' + \frac{1}{r}f' - \frac{(1-a)^2}{r^2}f - \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial f} = 0$$

$$a'' - \frac{1}{r}a' + 2(1-a)f^2 = 0$$



- 確かに中心で励起してる解が存在！ → **ANO vortex**と呼ぶ

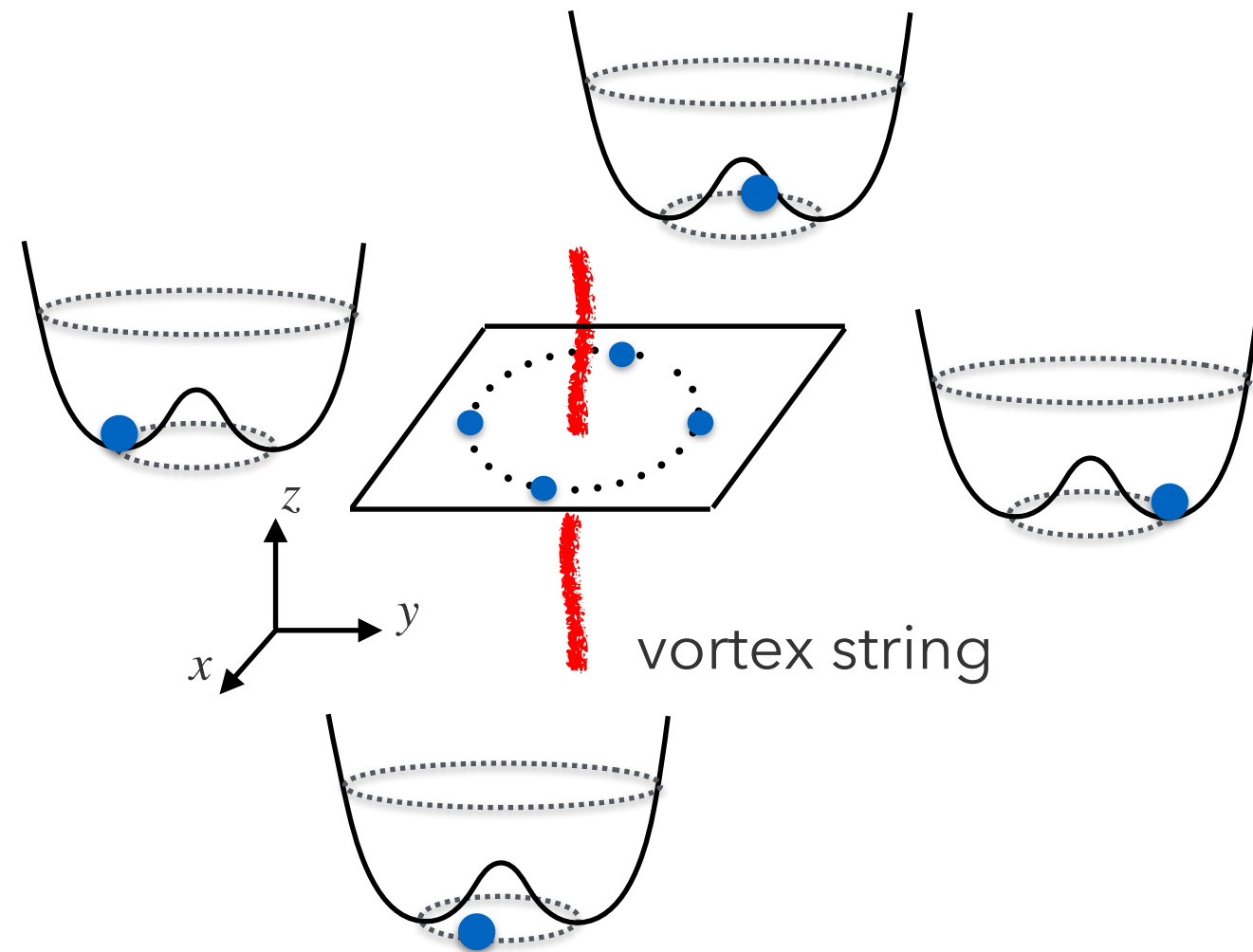
3+1次元にしましょう(vortex string)

[Abrikosov '58]

[Nielsen-Olesen '73]

- Abelian-Higgs model in 3+1D

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_{\mu}\phi|^2 + m^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4$$



3+1次元にしましょう(vortex string)

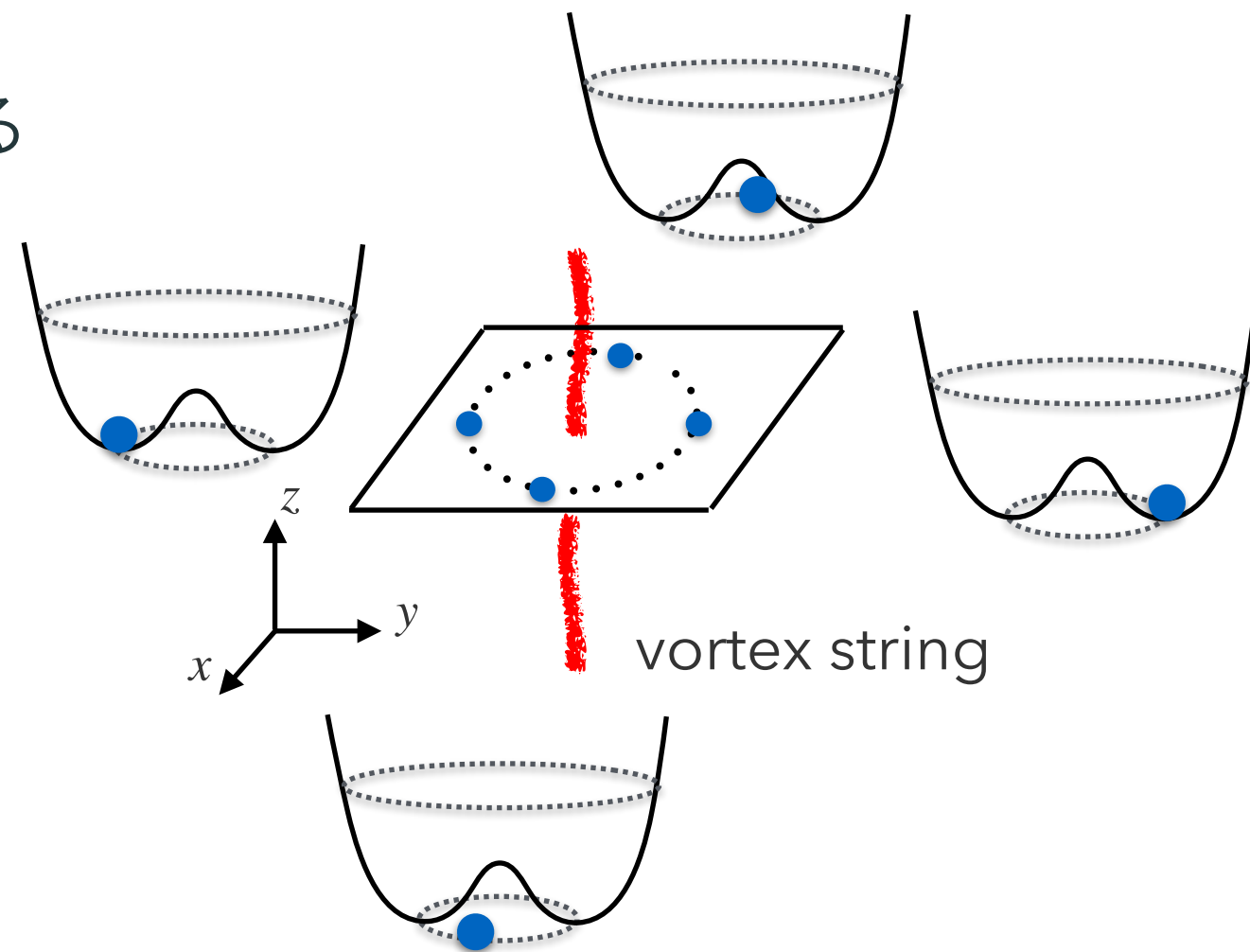
[Abrikosov '58]

[Nielsen-Olesen '73]

- Abelian-Higgs model in 3+1D

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_{\mu}\phi|^2 + m^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4$$

- さっきの配位を z 軸方向に拡張する



3+1次元にしましょう(vortex string)

[Abrikosov '58]

[Nielsen-Olesen '73]

- Abelian-Higgs model in 3+1D

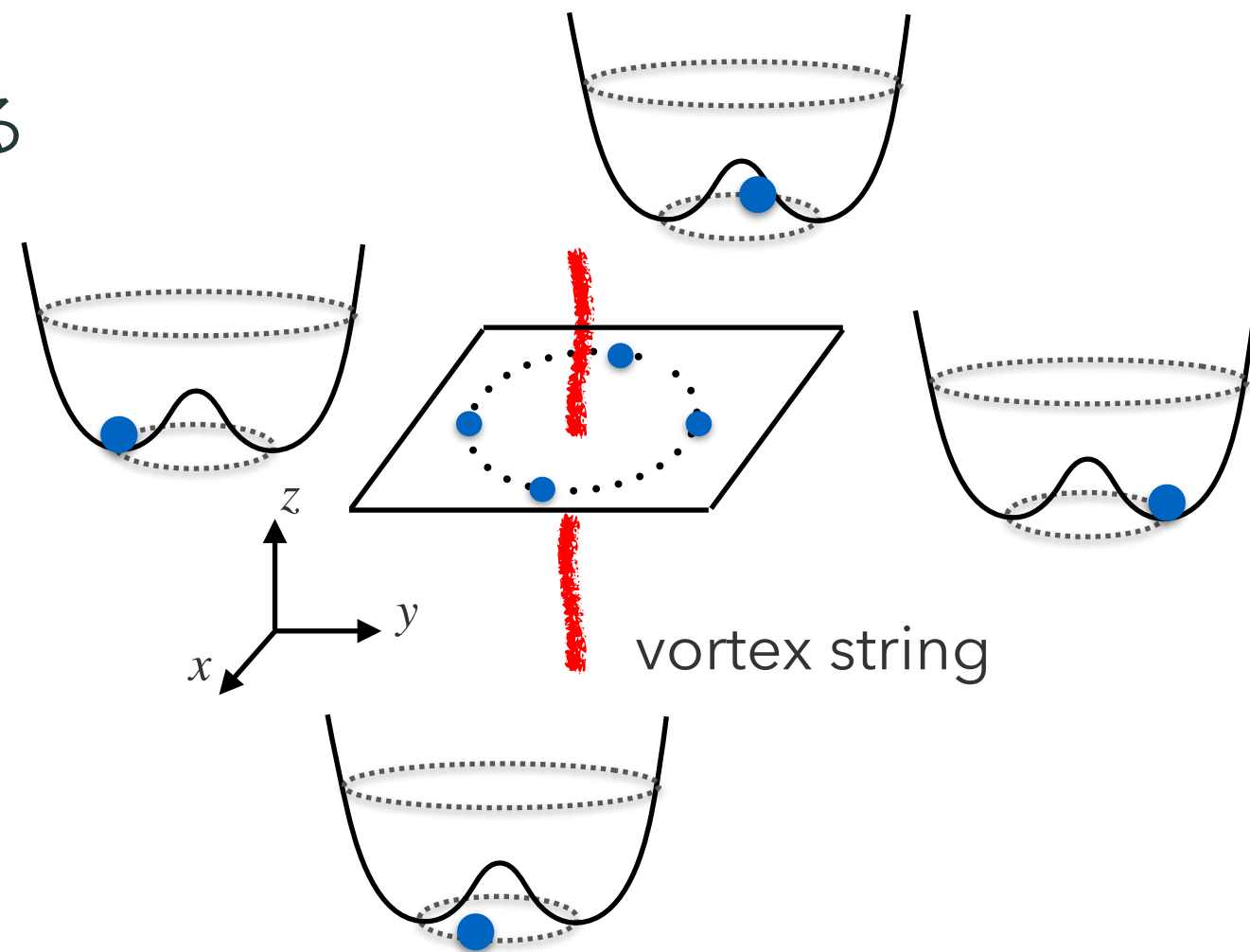
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_{\mu}\phi|^2 + m^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4$$

- さっきの配位を z 軸方向に拡張する

z 方向に伸びた励起！

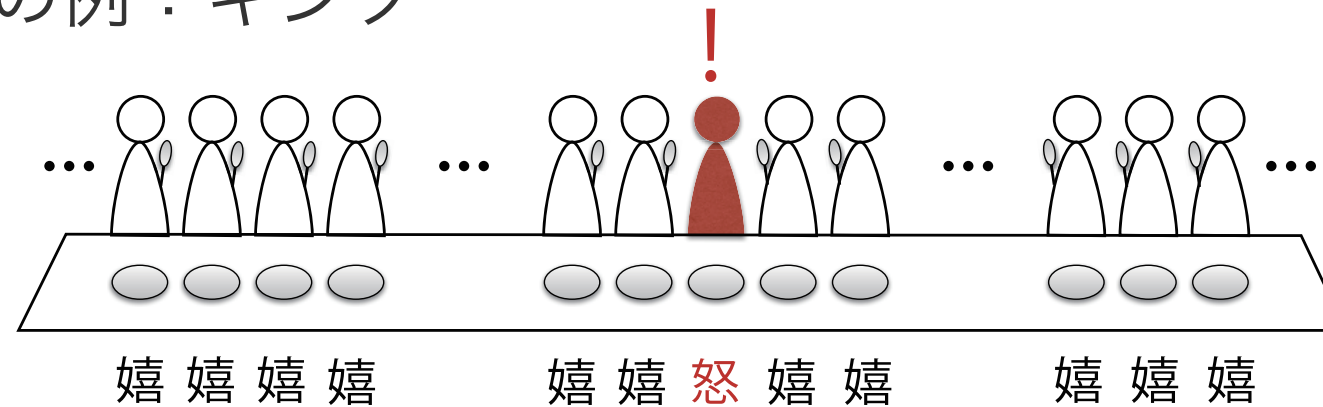
→ ANO vortex stringと呼ぶ

(ひも理論のひもとは違うものです)

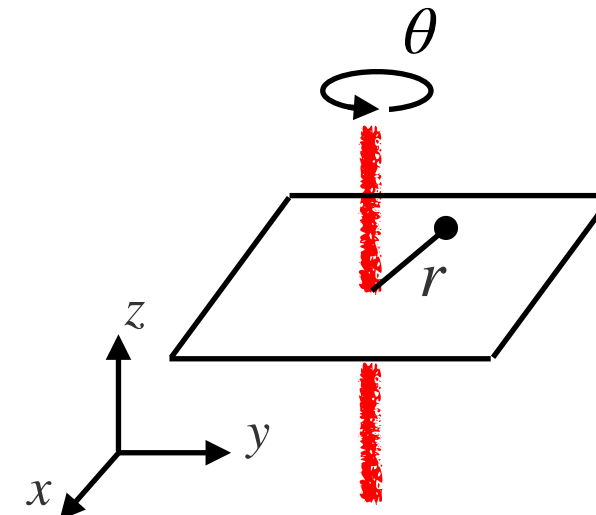
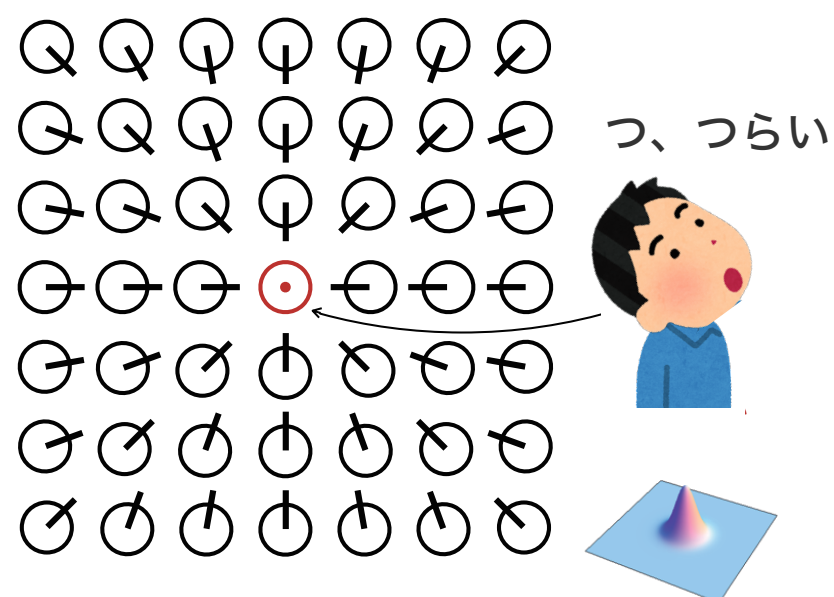


ここまでのまとめ

- トポロジカルソリトン：トポロジ的な性質によって安定性が保証されるソリトン
- 1+1次元での例：キンク



- 2+1次元、3+1での例：vortex (string)



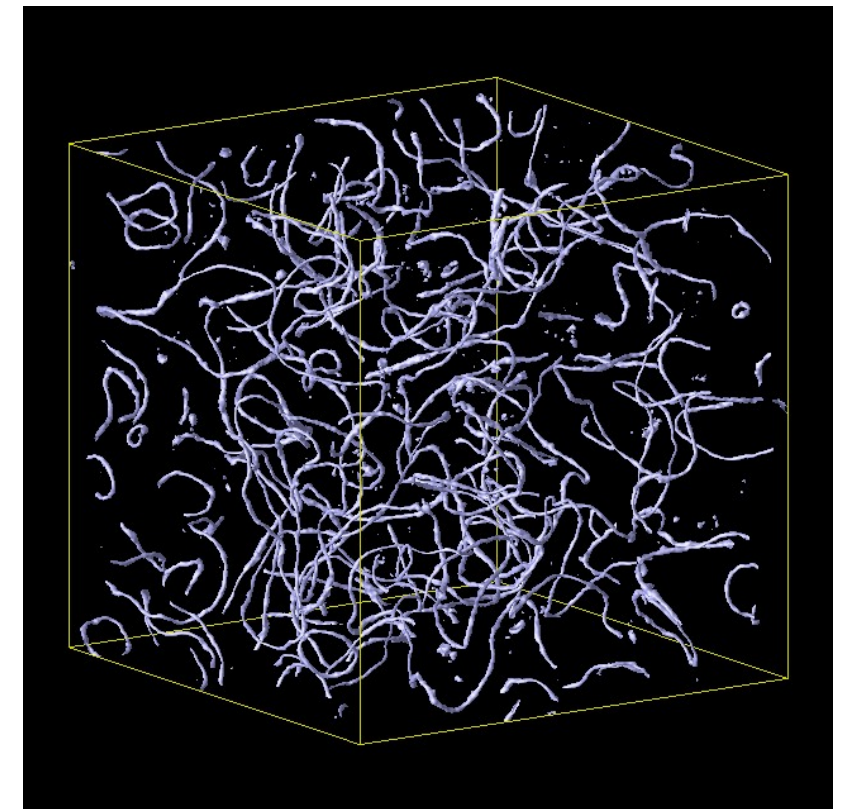
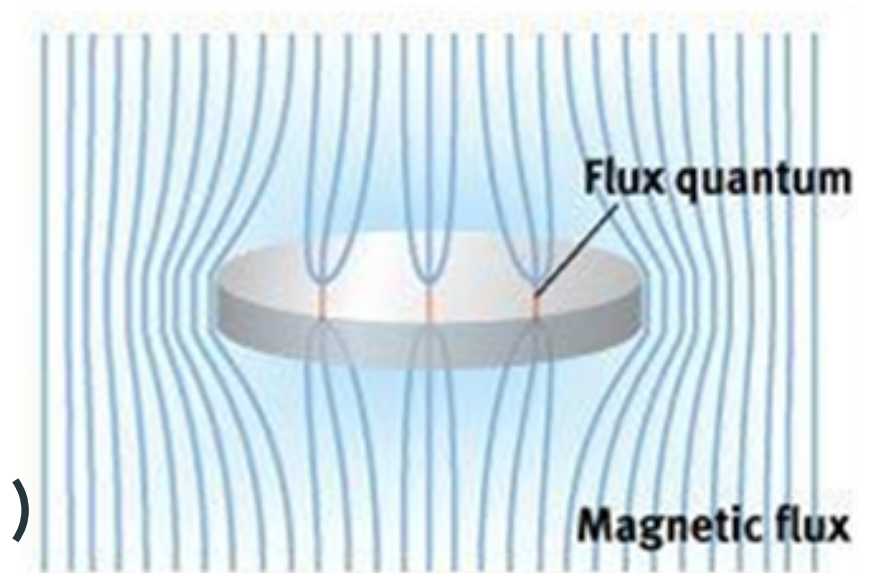
目次

- 場の理論(古典論)
- トポロジカルソリトン
- 古典的スケール不変性とvortex string
- まとめ

古典的スケール不変性とvortex string

実はvortex stringはアツい

- 超伝導物質中のMagnetic flux tube
 - 超伝導体の相図と関係
- 宇宙でのVortex string: **Cosmic string** (宇宙ひも)
 - CMB (宇宙マイクロ波背景放射)
 - 重力波
 - 重力レンズ
 - 発見されれば新物理の強い証拠、しかし未だ見つからず



(最も)重要な問い：

vortex string同士の相互作用

(最も)重要な問い：

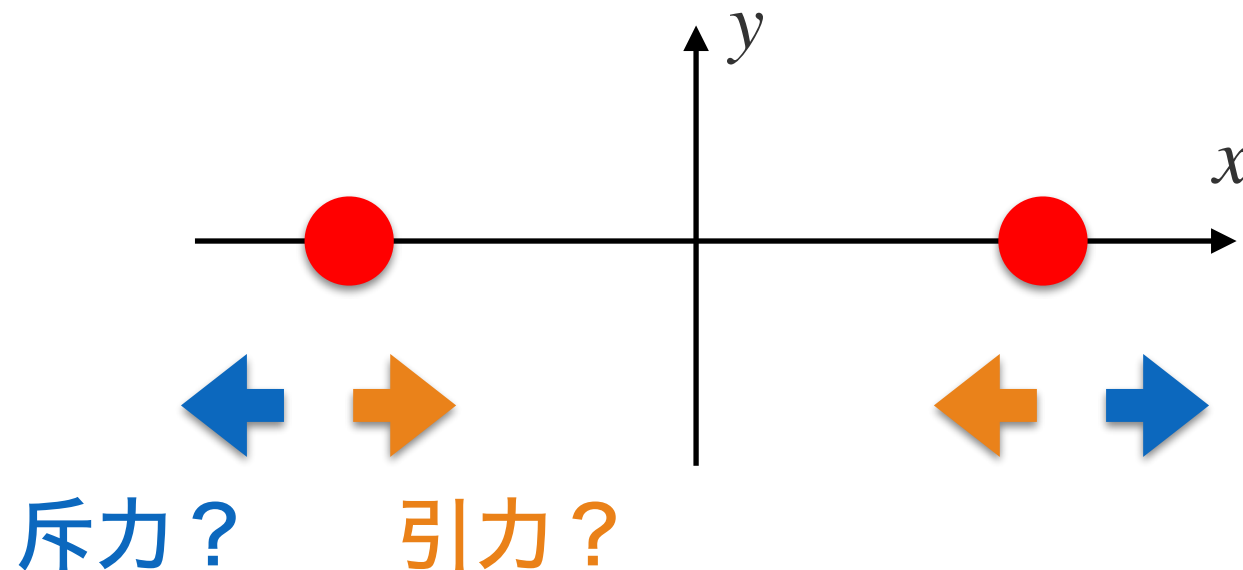
vortex string同士の相互作用

引力 / 斥力？

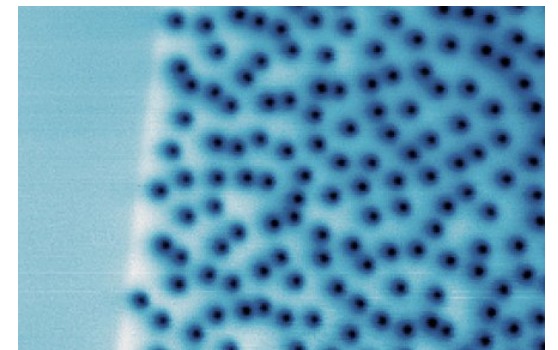
長距離力 / 短距離力？

Interaction of Vortex Strings

- 2本の z 軸に並行な vortex strings を考える



(wikipedia)



- 超伝導体では、

{ 斥力 (type II) 引 力 (type I)	→	{ Abrikosov 格子という構造を作る 超伝導性がすぐ壊れる
--------------------------------	---	--------------------------------------
- cosmic string の場合、相互作用が宇宙の中での時間発展を決める
→ 宇宙の歴史にもるに影響する

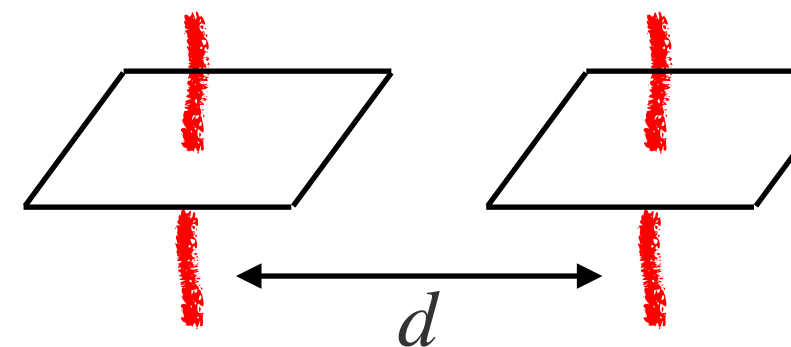
Eg.) ANO stringの相互作用

[Abrikosov '58]

[Nielsen-Olesen '73]

- さっきの模型：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_{\mu}\phi|^2 + m^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4$$

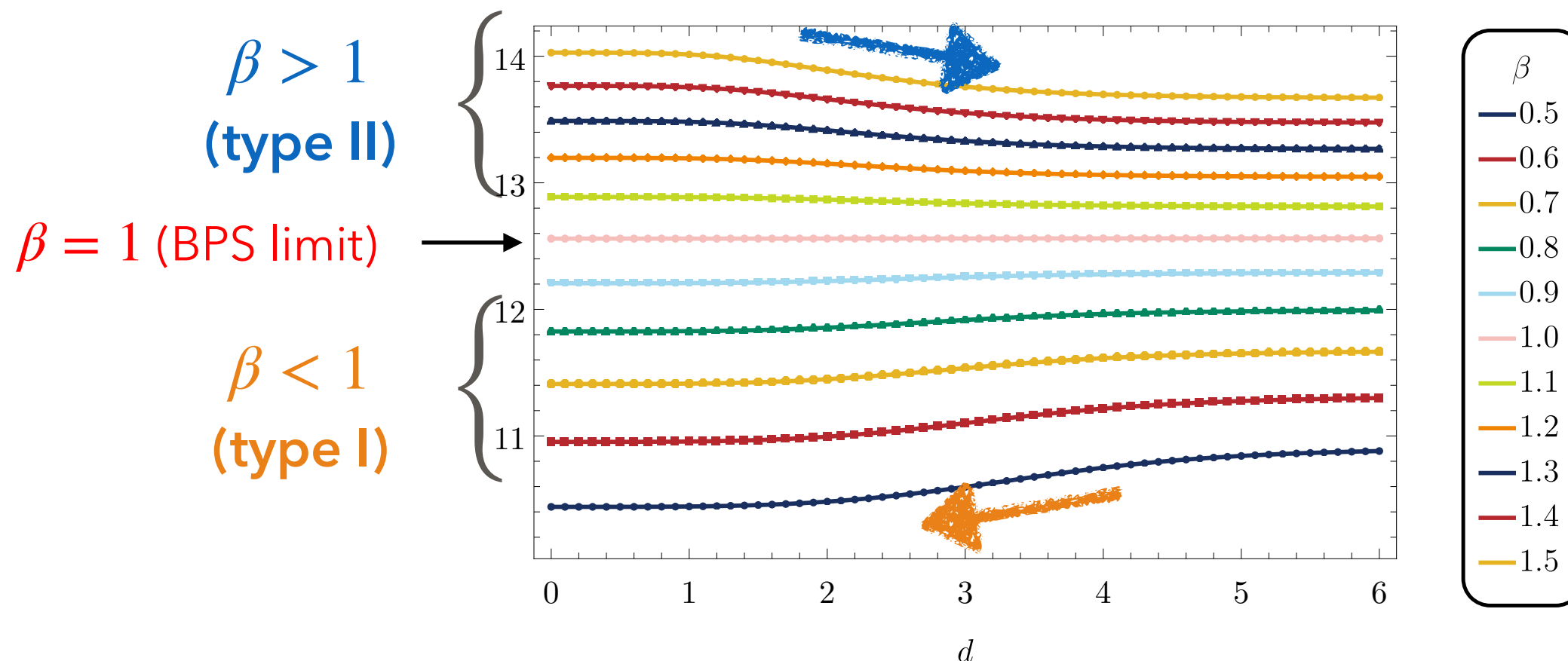


- 2本のANO string間の相互作用：

斥力 or 引力 for $\beta > 1$ and $\beta < 1$

$$\beta \equiv \frac{m_{\phi}^2}{m_A^2} = \frac{4\lambda v^2}{2g^2v^2}$$

interaction potential



Coleman-Weinberg potential

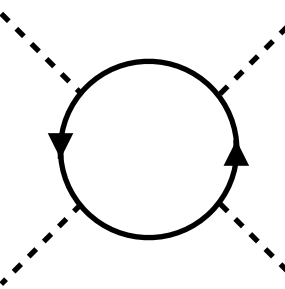
[Coleman-Weinberg '73]

- 場の二次項の無いColeman-Weinberg potential

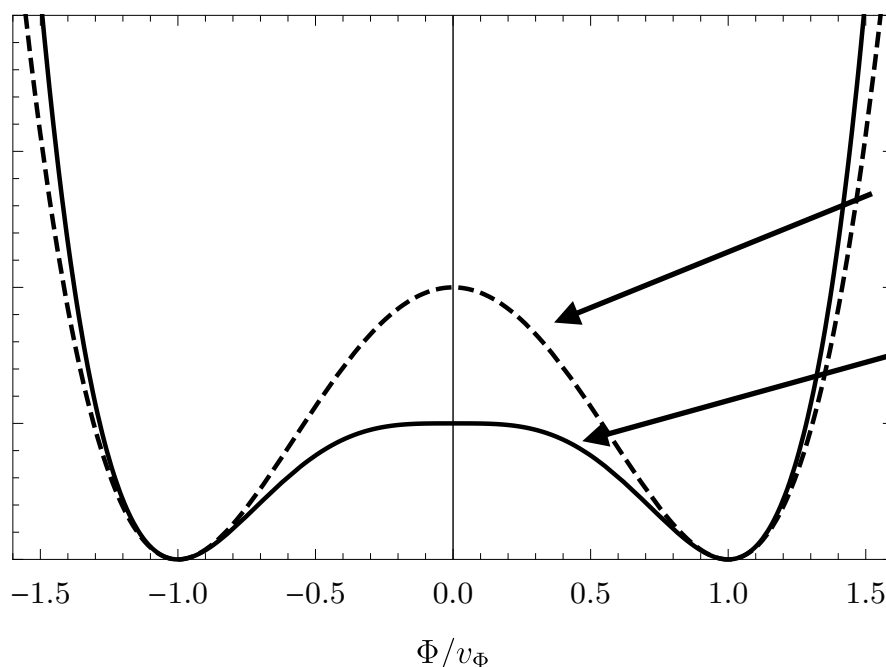
$$V_{\text{CW}}(\Phi) = \lambda(\Phi) |\Phi|^4$$

$\lambda(\Phi)$: running quartic coupling

- tree level $\rightarrow \lambda = \text{const.}$, スケール不変、no SSB
- quantum effects $\rightarrow \lambda(\Phi) = \lambda_{\text{CW}} \left(\log \frac{|\Phi|^2}{v^2} - \frac{1}{2} \right)$, triggers SSB



微視的な自由度に依存



$$\lambda \left(|\Phi|^2 - 1 \right)^2$$

$V_{\text{CW}}(\Phi)$

- 原点付近で平坦な構造
- スケールは量子効果を通じて現れる
 $\rightarrow$ ヒッグス粒子質量の起源を説明できる

[Iso-Okada-Orikasa '09] [Iso-Orikasa '12] [Chway+ '13]

Coleman-Weinberg potential

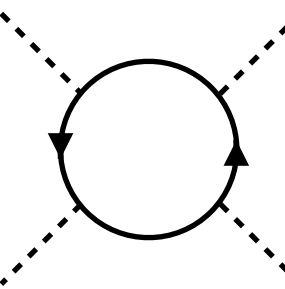
[Coleman-Weinberg '73]

- 場の二次項の無いColeman-Weinberg potential

$$V_{\text{CW}}(\Phi) = \lambda(\Phi) |\Phi|^4$$

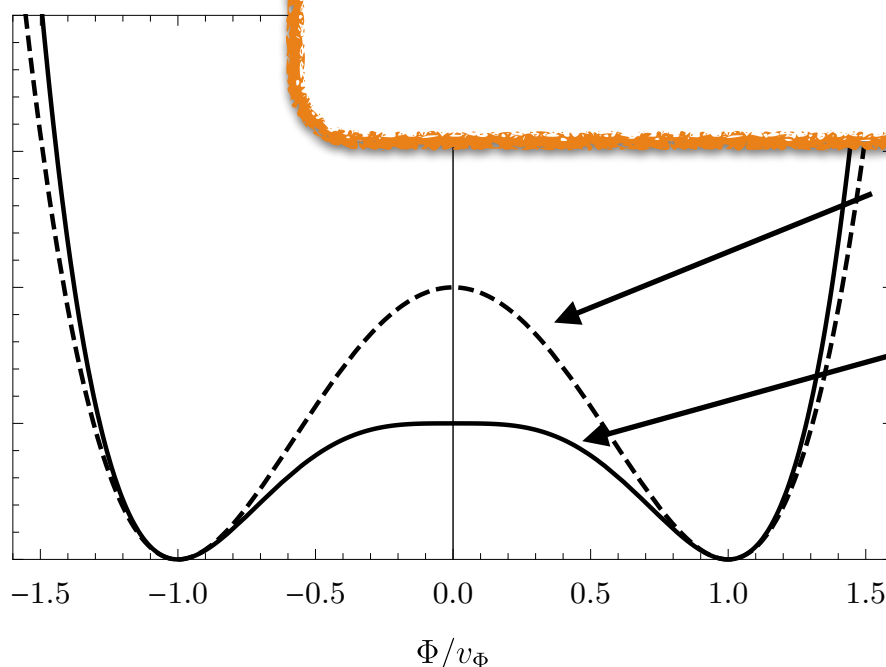
$\lambda(\Phi)$: running quartic coupling

- tree level $\rightarrow \lambda = \text{const.}$, スケール不変、no SSB
- quantum effects $\rightarrow \lambda(\Phi) = \lambda_{\text{CW}} \left(\log \frac{|\Phi|^2}{v^2} - \frac{1}{2} \right)$, triggers SSB



このポテンシャルがvortex stringの相互作用に影響するか

$\rightarrow$ Yes!!



- 原点付近で平坦な構造
- スケールは量子効果を通じて現れる
 $\rightarrow$ ヒッグス粒子質量の起源を説明できる

[Iso-Okada-Orikasa '09] [Iso-Orikasa '12] [Chway+ '13]

Model

- 3+1 D Abelian-Higgs model w/ two types of potential

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + |D_\mu \Phi|^2 - V(\Phi) \right] \quad D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$$

- usual Quadratic-Quartic

$$V(\Phi) = \lambda \left(|\Phi|^2 - v^2 \right)^2$$

- Coleman-Weinberg

$$V(\Phi) = \lambda \left(\log \frac{|\Phi|^2}{v^2} - \frac{1}{2} \right) |\Phi|^4$$

- 両方の模型で $U(1)$ 対称性が自発的に破れる $\rightarrow$ vortex stringが存在
 - Quadratic-Quartic $\rightarrow$ 普通のANO vortex string
 - Coleman-Weinberg $\rightarrow$ **Coleman-Weinberg ANO string!** (new!)

Model

- 場の再定義をしておく と 便利： $A_\mu \rightarrow A_\mu/g$ $\Phi \rightarrow \Phi/g$

$$S = \frac{1}{g^2} \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + |D_\mu \Phi|^2 - V_\beta(\Phi) \right] \quad D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu$$

- usual Quadratic-Quartic

$$V_\beta(\Phi) = \frac{\beta}{2} \left(|\Phi|^2 - 1 \right)^2$$

- Coleman-Weinberg

$$V_\beta(\Phi) = \frac{\beta}{2} \left(\log |\Phi|^2 - \frac{1}{2} \right) |\Phi|^4$$

- 一つのパラメータのみに依存 $\beta \equiv \frac{m_\phi^2}{m_A^2} = \frac{2\lambda}{g^2}$

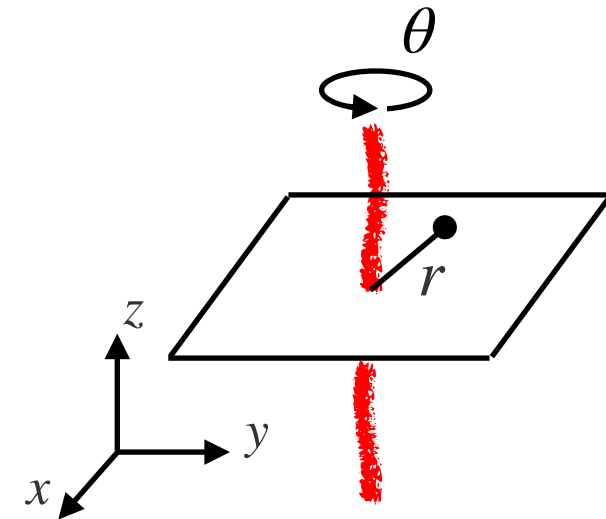
Axisymmetric string

- 遠方で一周した配位を考える：

$$\Phi(x) = f(r)e^{i\theta}$$

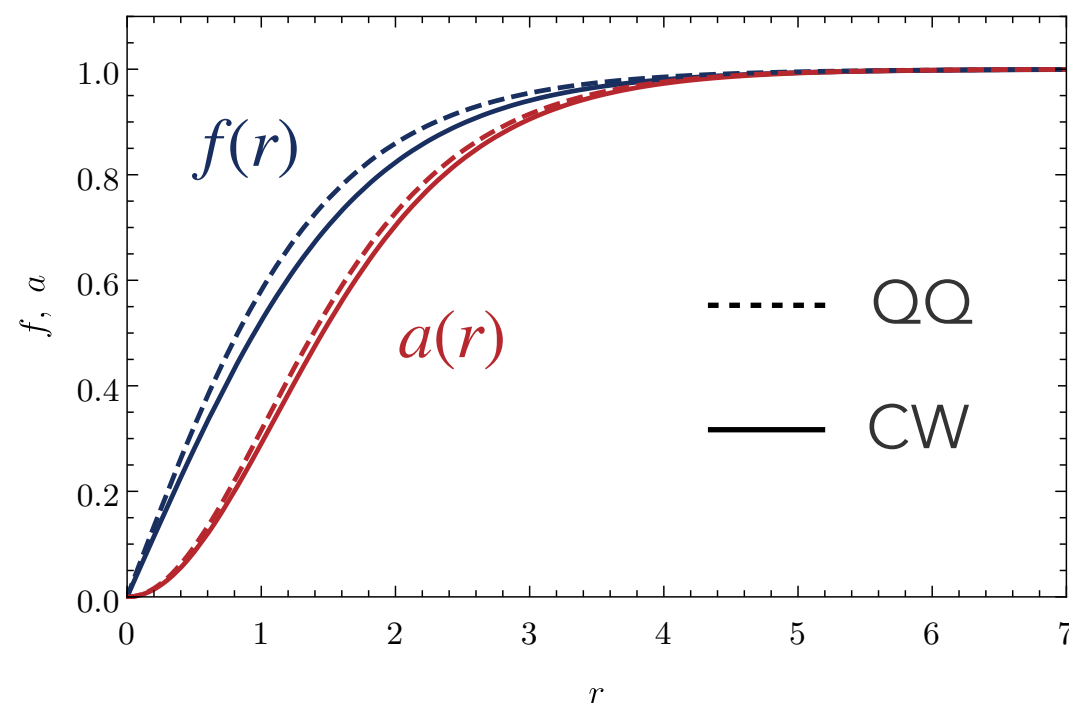
$$A_\theta(x) = a(r)$$

→ winding # = 1 & magnetic flux $\int d^2x B = 2\pi$

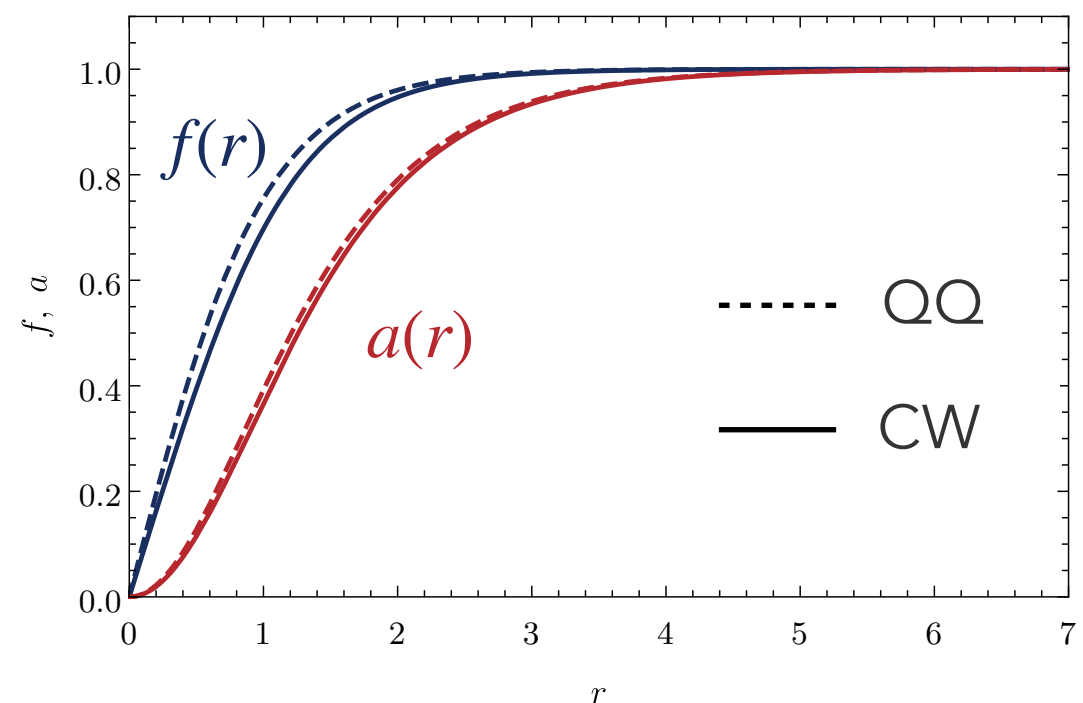


- 解の振る舞い自体は大きな違いがない

$$\beta = 0.5$$



$$\beta = 1.5$$



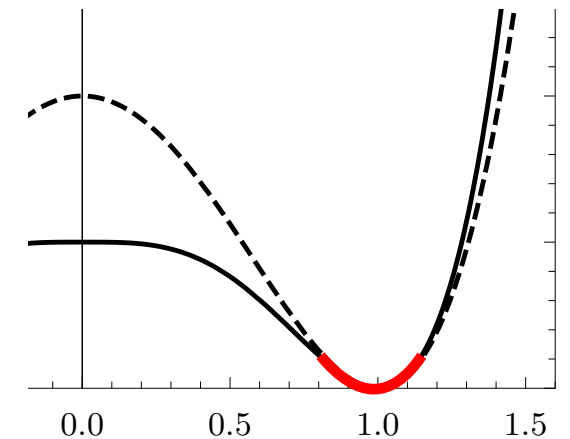
Asymptotics of CW-ANO string

- このことは解の漸近形 @ $r \rightarrow \infty$ から理解できる
- $f(r) \simeq 1, a(r) \simeq 1$ @ $r \rightarrow \infty$ なので、 $\delta f \equiv 1 - f$ and $\delta a \equiv 1 - a$ について線形化した形に書き換える

$$\delta f'' + \frac{1}{r} \delta f' - 2\beta \delta f = \mathcal{O}((\delta f)^2, (\delta a)^2)$$

$$\delta a'' - \frac{1}{r} \delta a' - 2\delta a = \mathcal{O}((\delta f)^2, (\delta a)^2)$$

真空まわりの二次曲率のみに依存



- 漸近形はポテンシャルの詳細によらない：

$$\delta f \simeq r^{-1/2} \exp \left[-\sqrt{2\beta} r \right] \quad \delta a \simeq r^{1/2} \exp \left[-\sqrt{2} r \right]$$

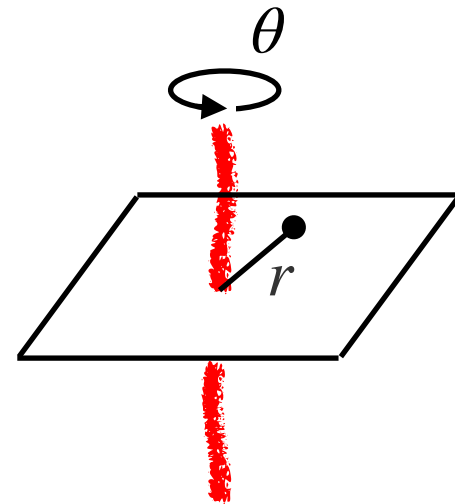
n 周した配位にしてみる

- Field configuration:

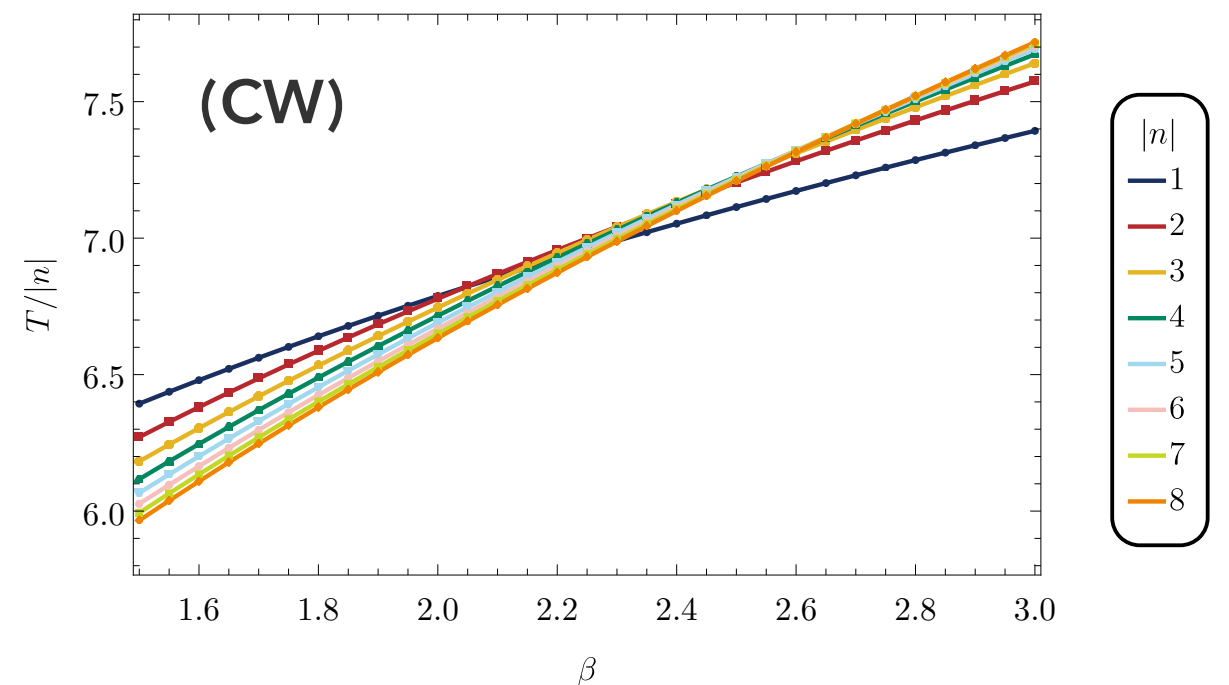
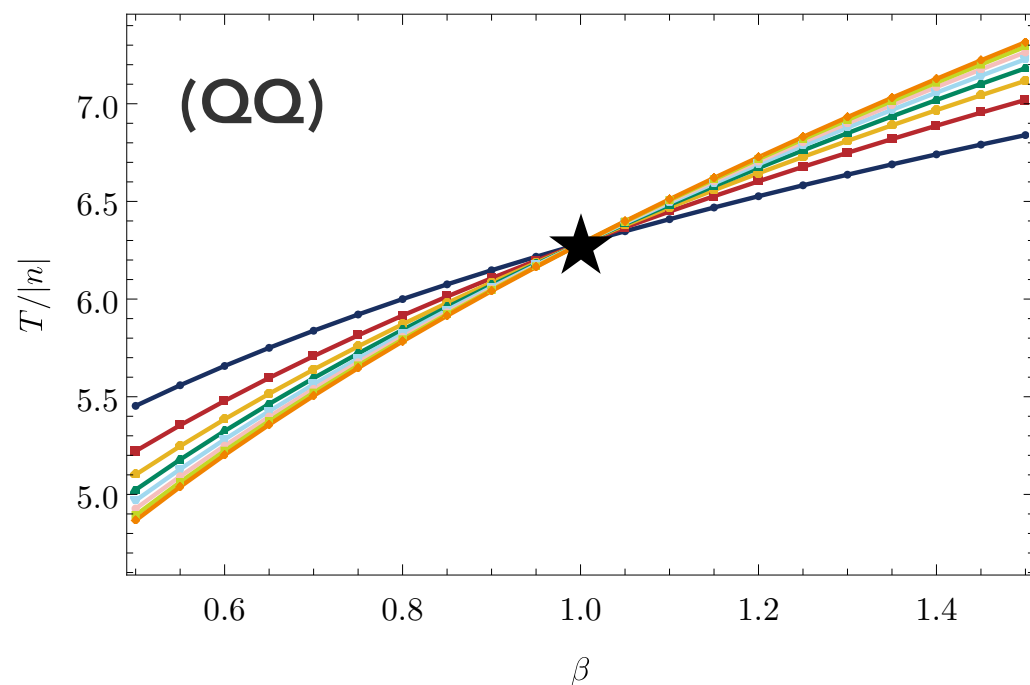
$$\Phi(x) = f(r)e^{in\theta}$$

$$A_\theta(x) = n a(r)$$

→ winding # = n & magnetic flux $\int d^2x B = 2\pi n$



- String tension for QQ and CW cases:



- For QQ case, all lines cross at $\beta = 1$ (BPS state) while it doesn't happen for CW case (next slide).

BPS state

[Bogomol'nyi '76]

[Prasad-Sommerfield '75]

- In Quadratic Quartic case, the energy can be rewritten by completion of square:

$$T = 2\pi|n| + 2\pi \int_0^\infty dr r \left[\left(f' + |n| \frac{a-1}{r} f \right)^2 + \frac{n^2}{2r^2} \left(a' + \frac{r}{|n|} (f^2 - 1) \right)^2 + \frac{1}{2}(\beta - 1)(f^2 - 1)^2 \right]$$

- For $\beta = 1$, the last term vanishes and the EOMs reduce to

$$f' + |n| \frac{a-1}{r} f = 0 \quad a' + \frac{r}{|n|} (f^2 - 1) = 0 \quad \text{BPS equations}$$

$$\longrightarrow \frac{T}{|n|} = 2\pi$$

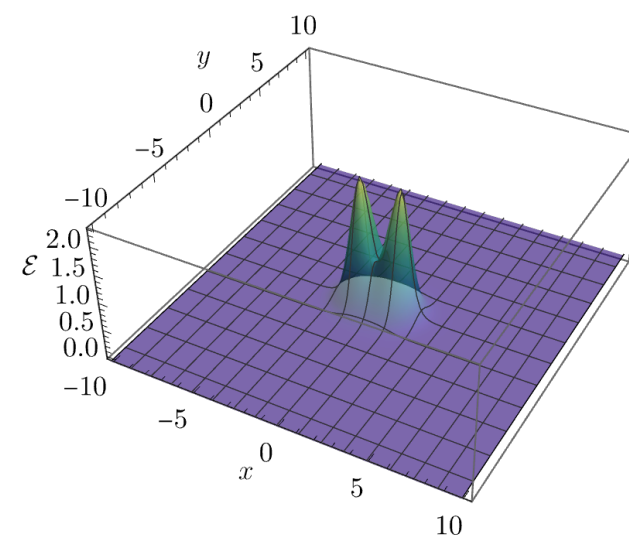
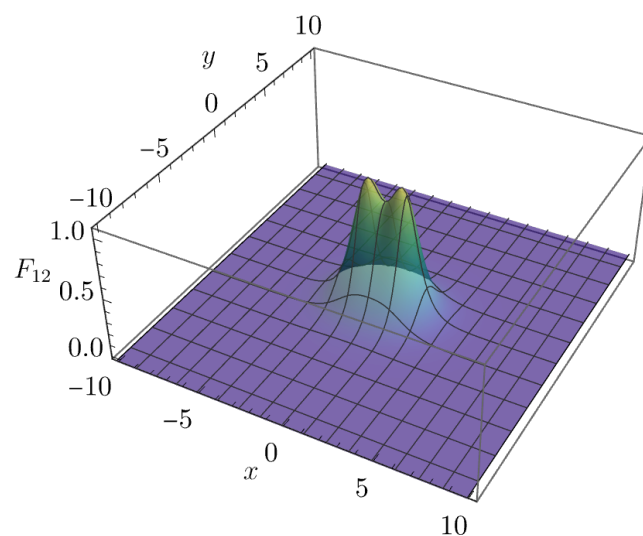
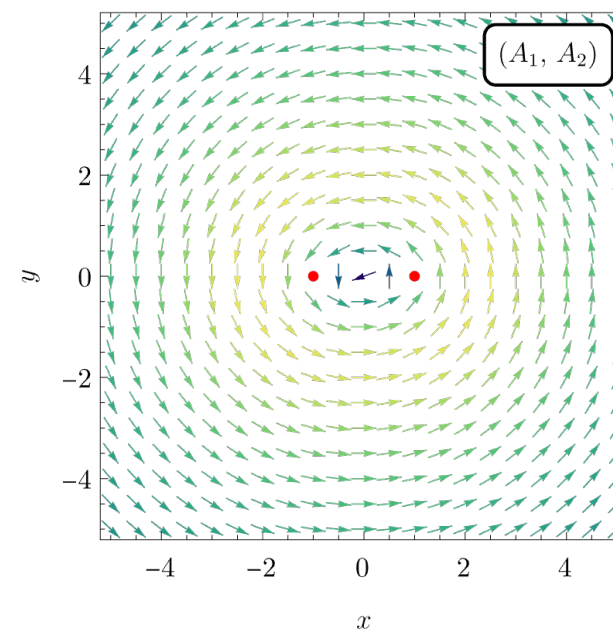
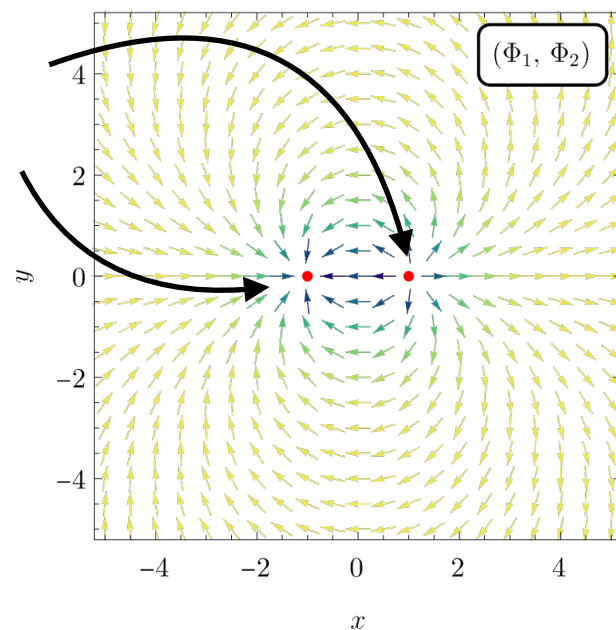
But, CW case doesn't have this property due to the log-potential.

Two string system

- put two parallel strings orthogonally to xy plane
w/ distance d .



string core



Calculation of interaction potential

1. put two strings w/ distance d

2. fix distance d (pinning string cores)

3. minimize the energy of the system

→ minimum-energy configuration w/ fixed d

4. do 1~3 for various d

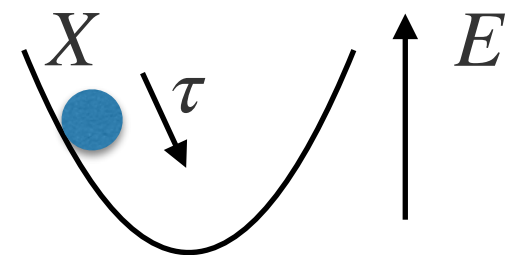
→ interaction potential as a function of d

- minimization is performed by the relaxation method (gradient flow):

$$\partial_{\tau} X = - \frac{\delta E}{\delta X}$$

$$X = \Phi \text{ or } A_i$$

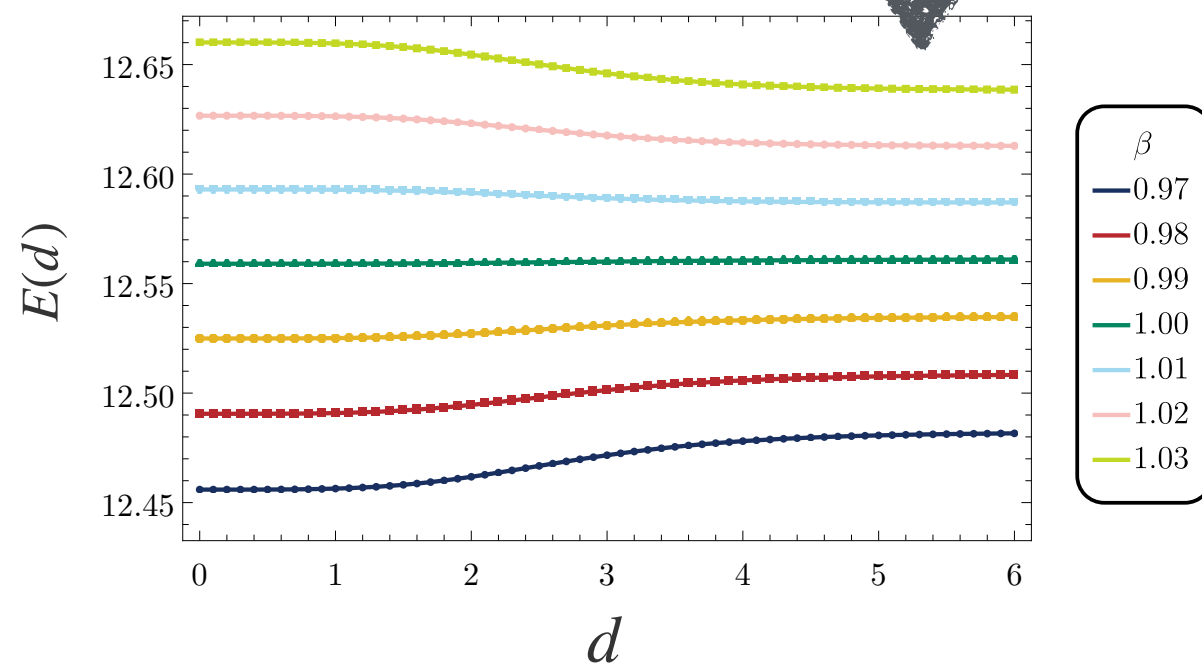
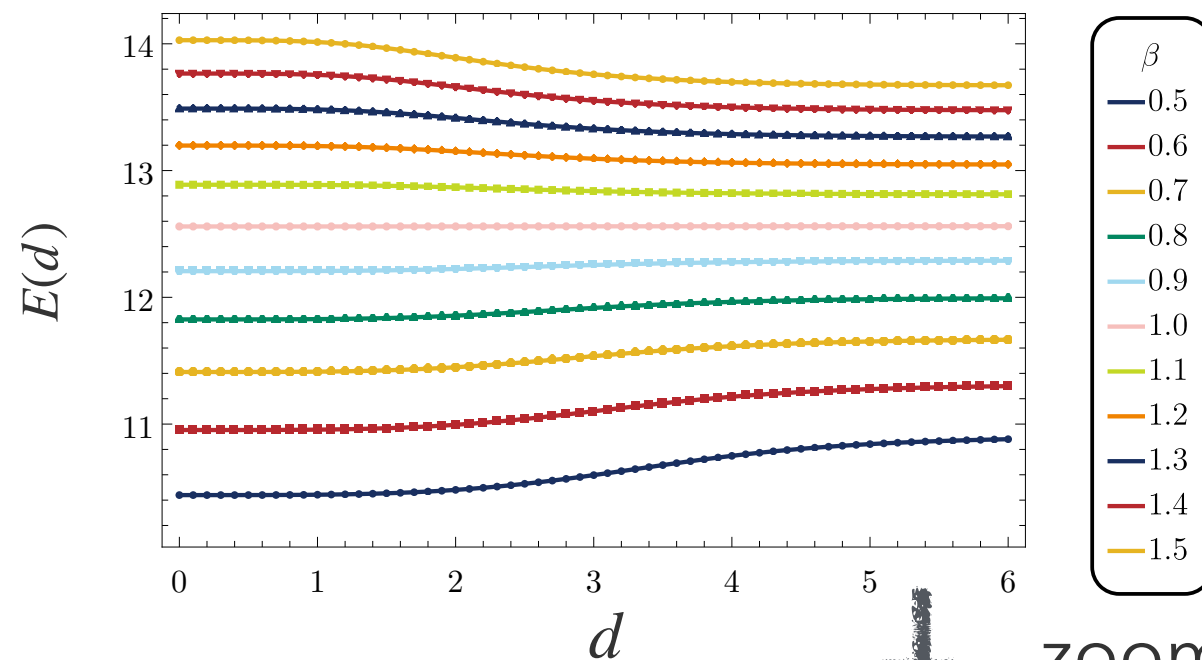
τ : fictitious time



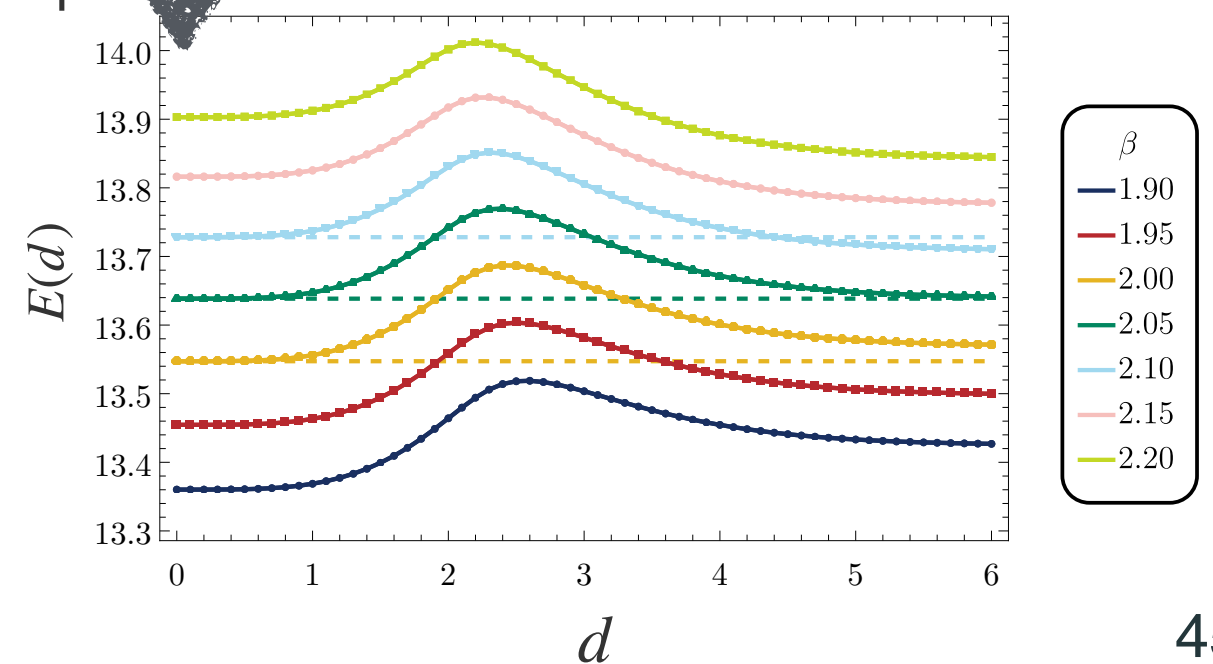
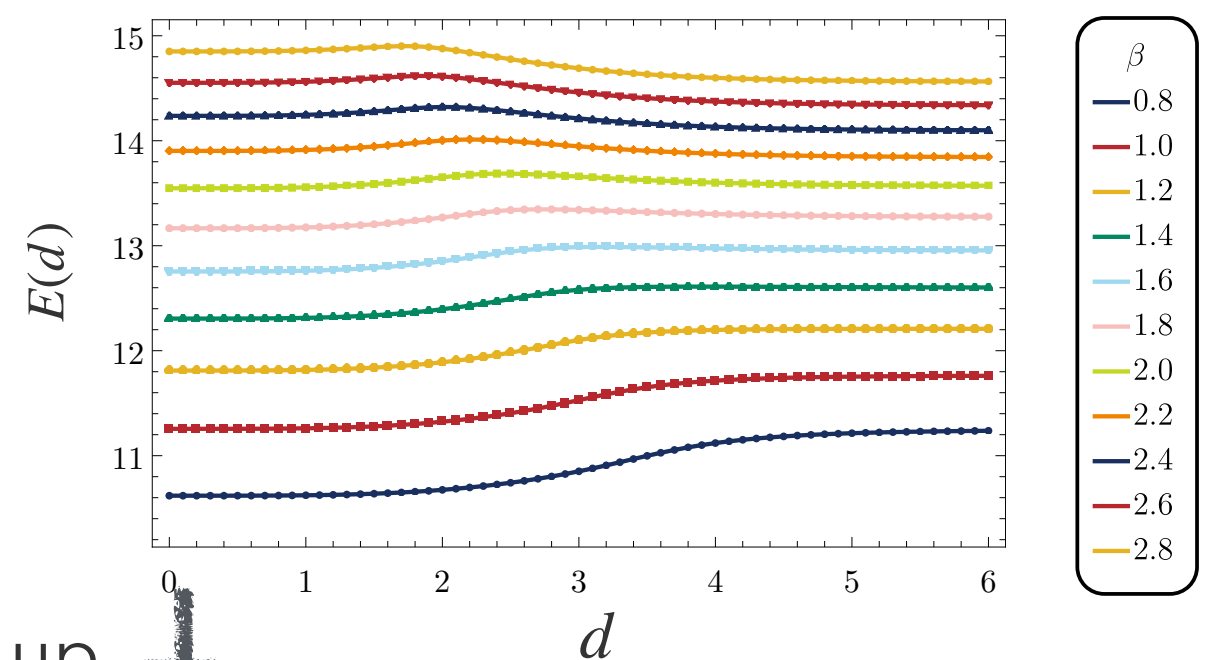
Result

- Interaction potential as a function of d for different β

Quadratic-Quartic



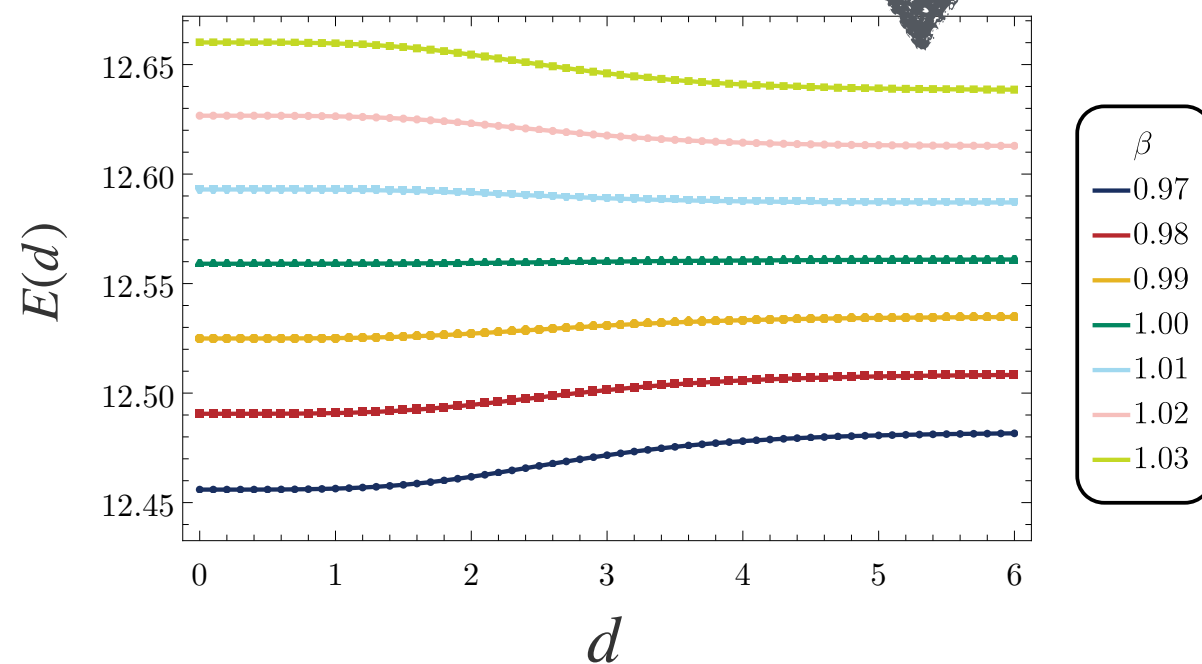
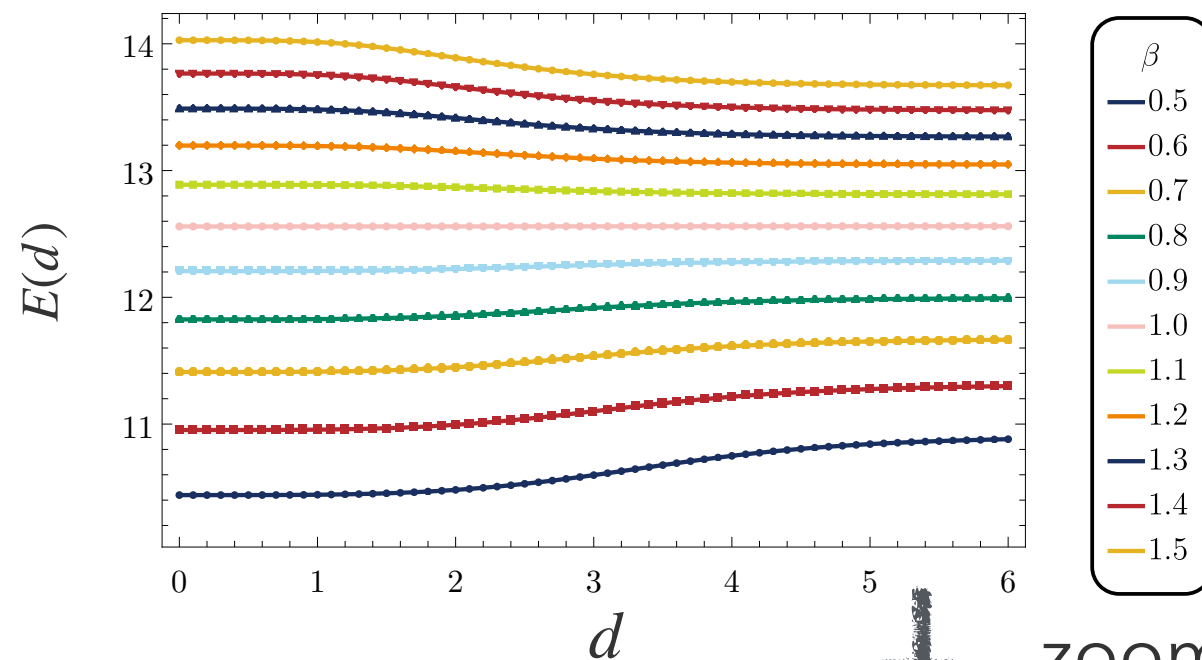
Coleman-Weinberg



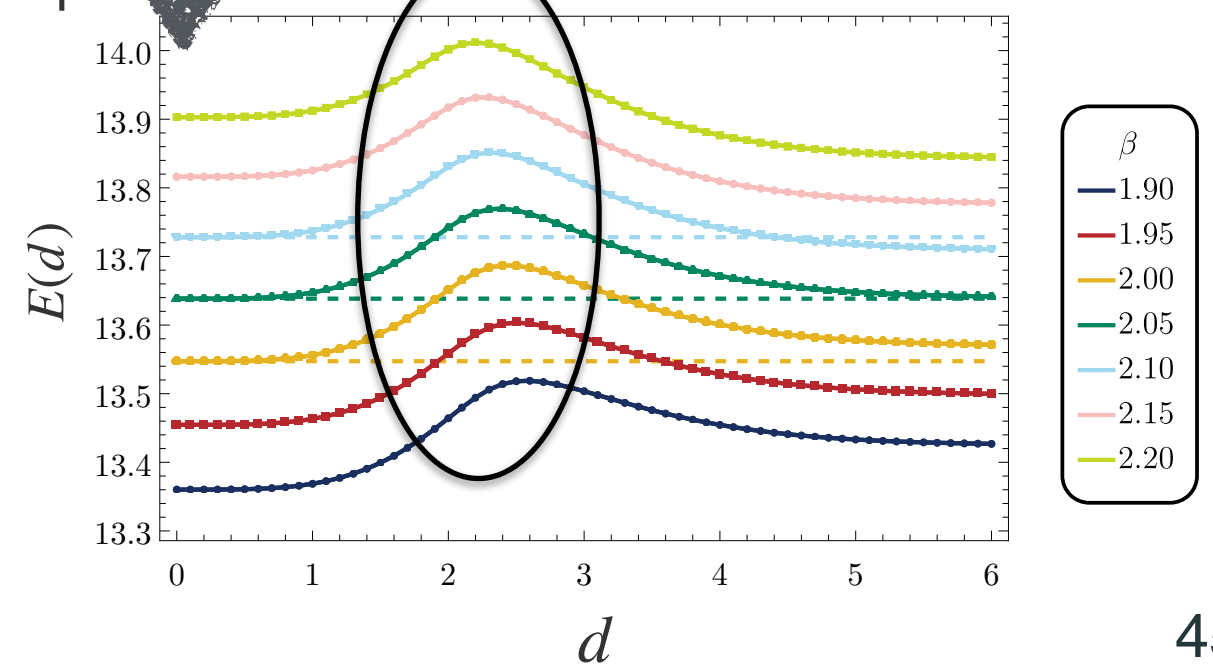
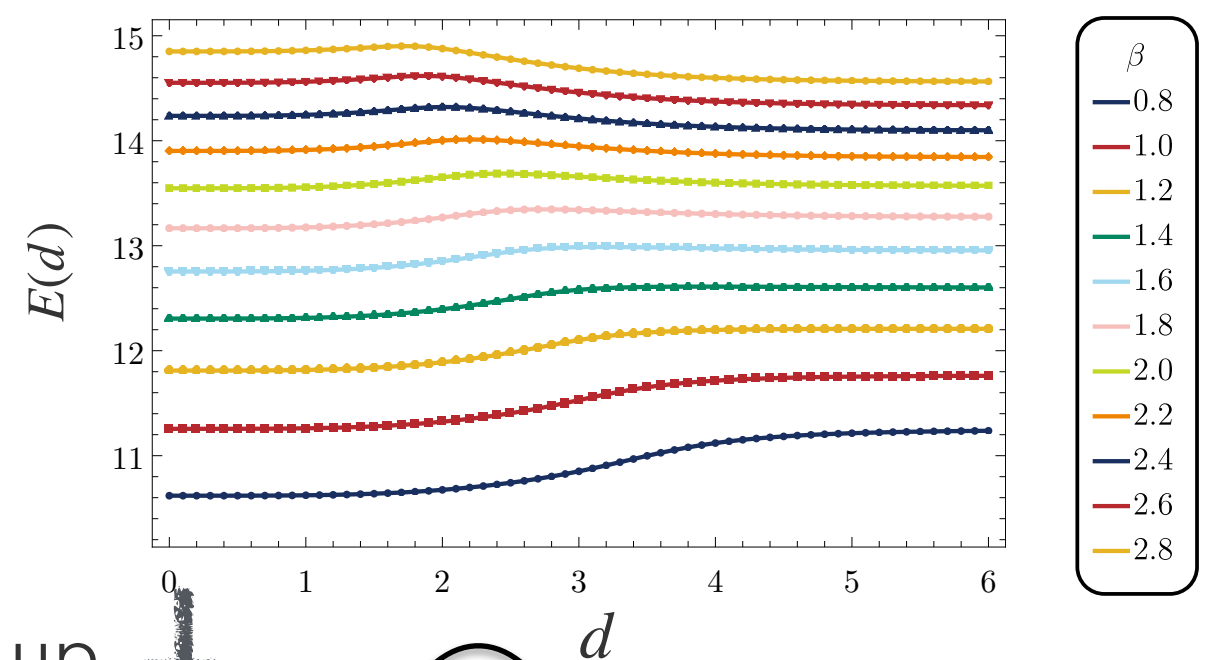
Result

- Interaction potential as a function of d for different β

Quadratic-Quartic



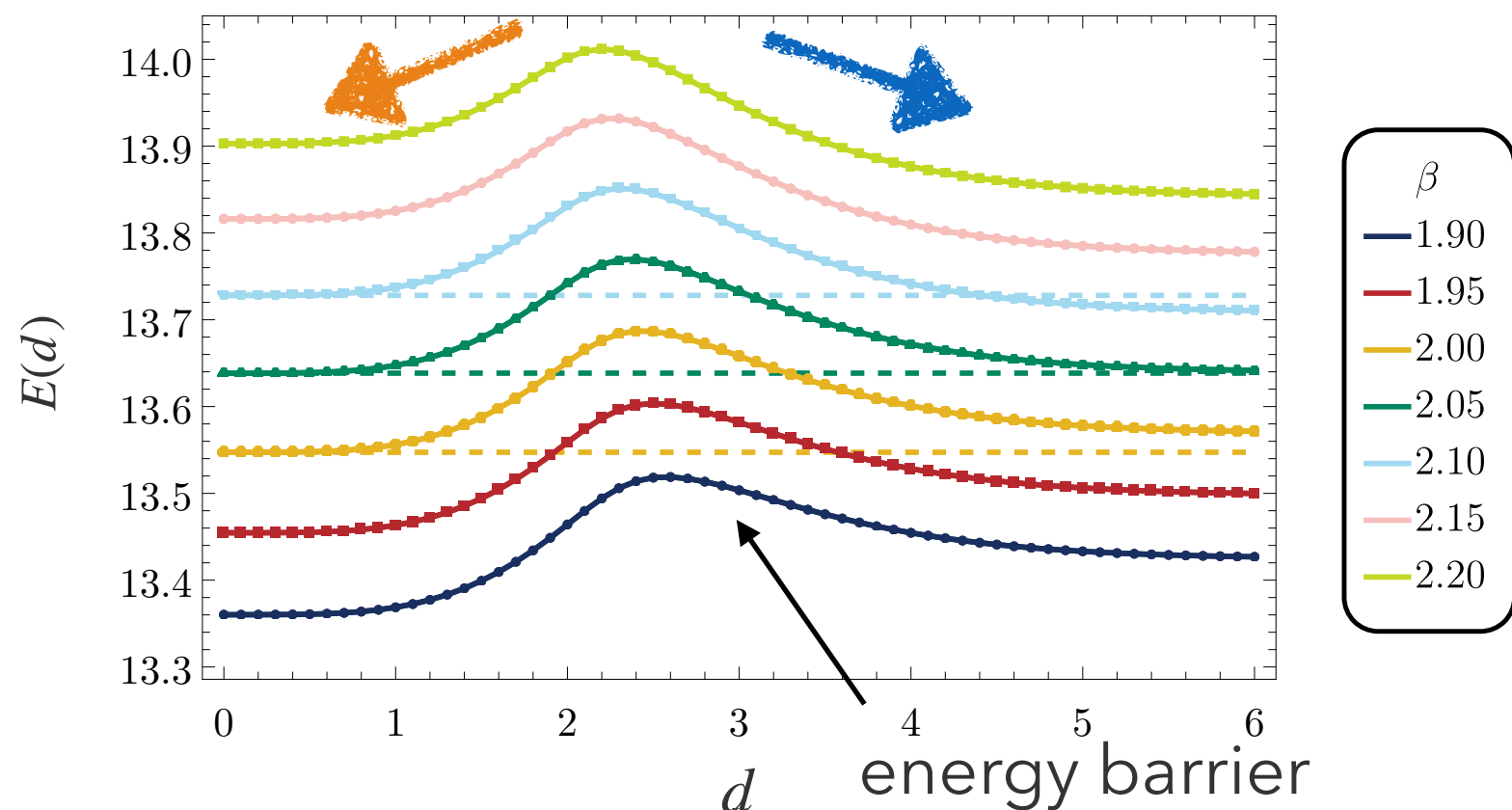
Coleman-Weinberg



Result: Energy barrier

- Interaction potential as a function of d for different β

Coleman-Weinberg

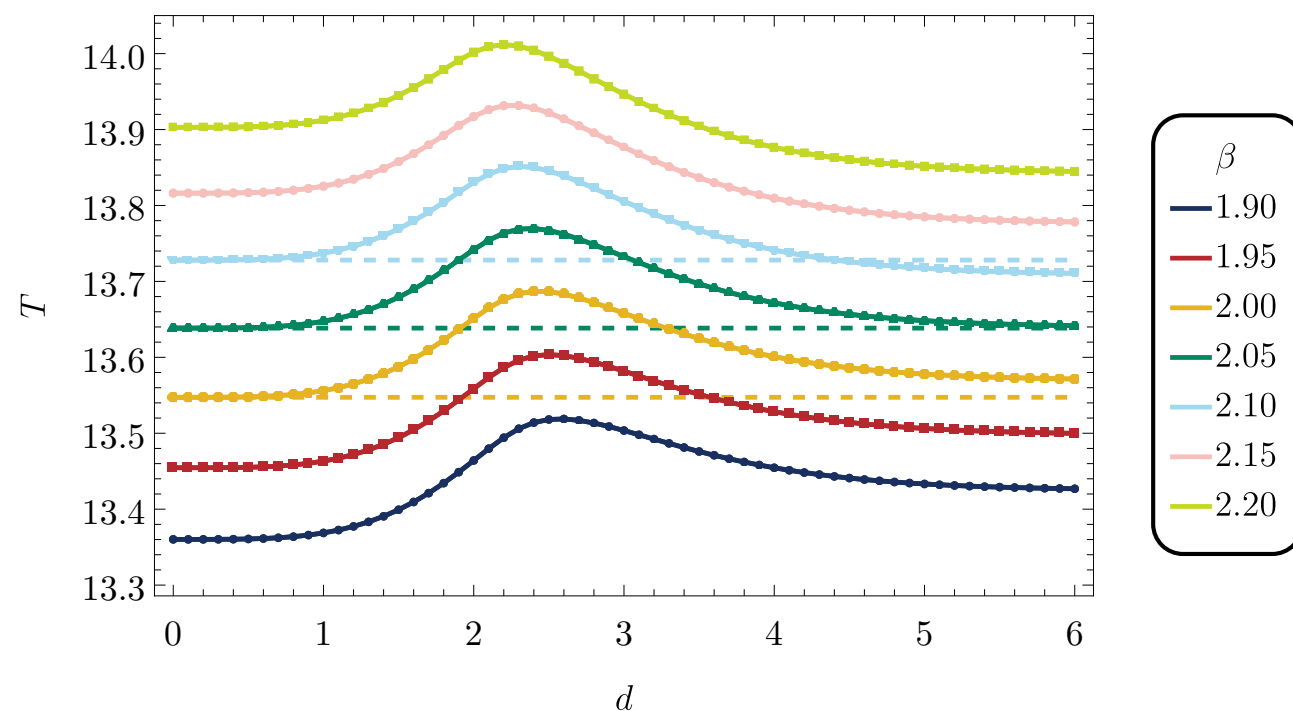
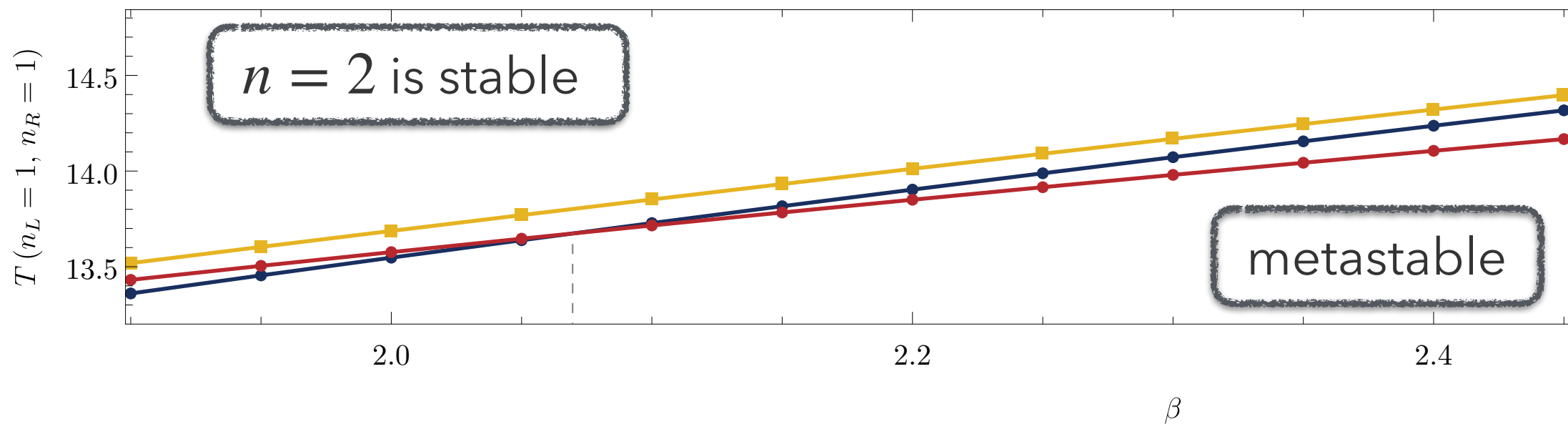


- Energy barrier** appears in CW case for $\beta > 1!!$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{attractive} \\ \text{repulsive} \end{array} \right\}$ for $\left\{ \begin{array}{l} \text{short} \\ \text{large} \end{array} \right\}$ distance

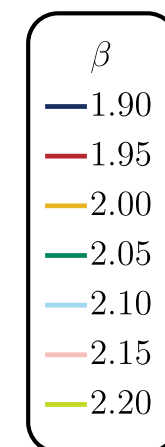
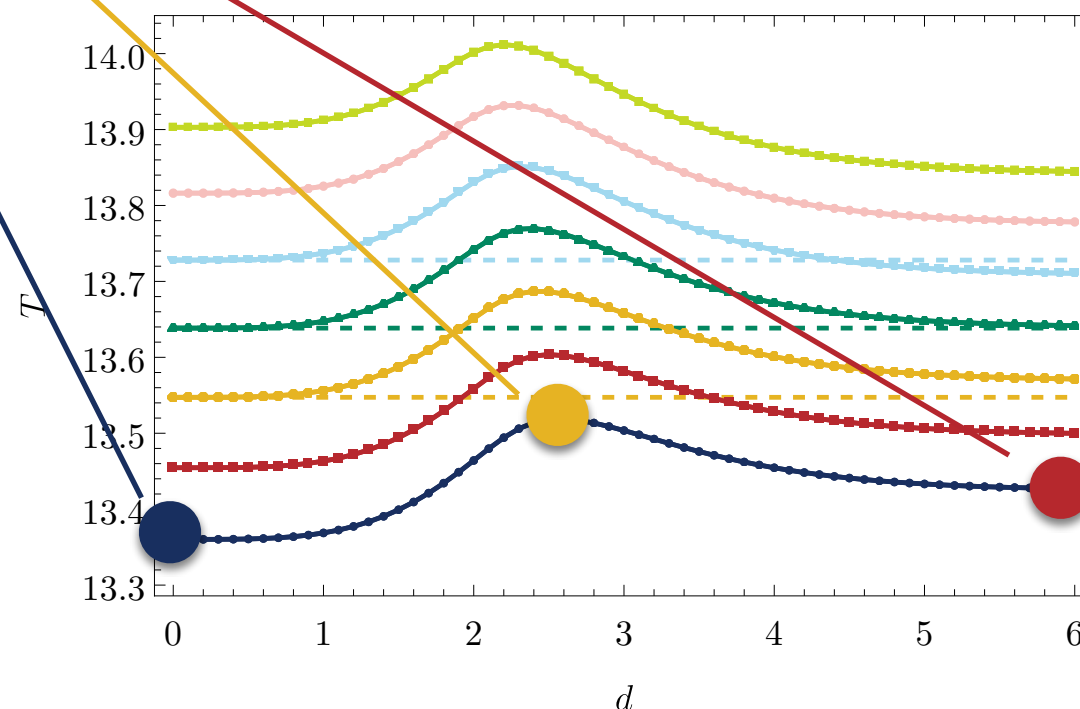
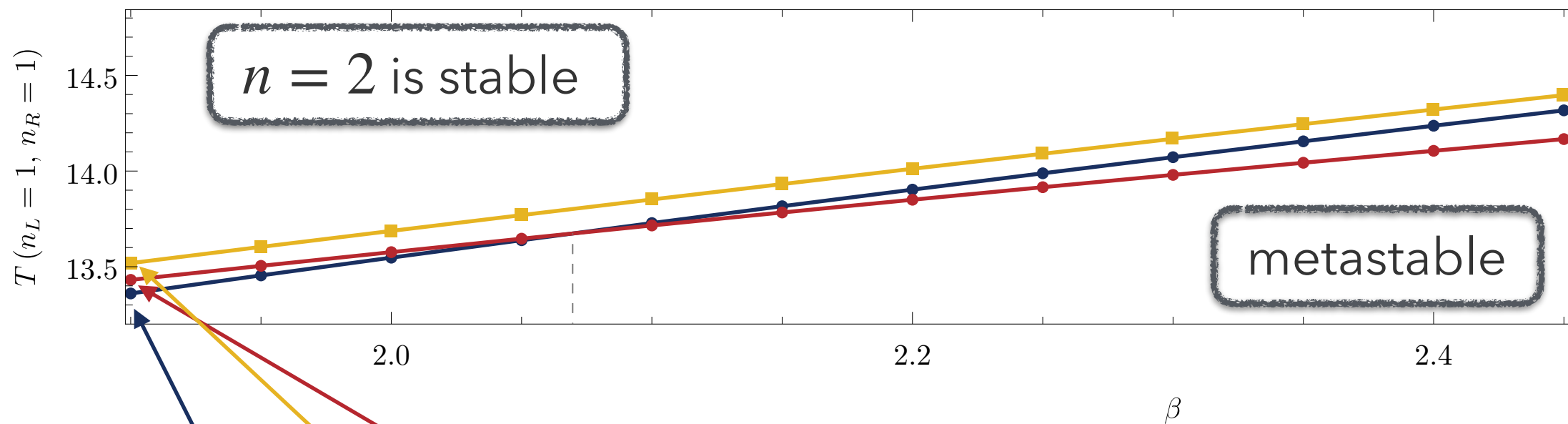
Stability of $n = 2$ state

- We can read off the stability of the vortex of $n = 2$ state.



Stability of $n = 2$ state

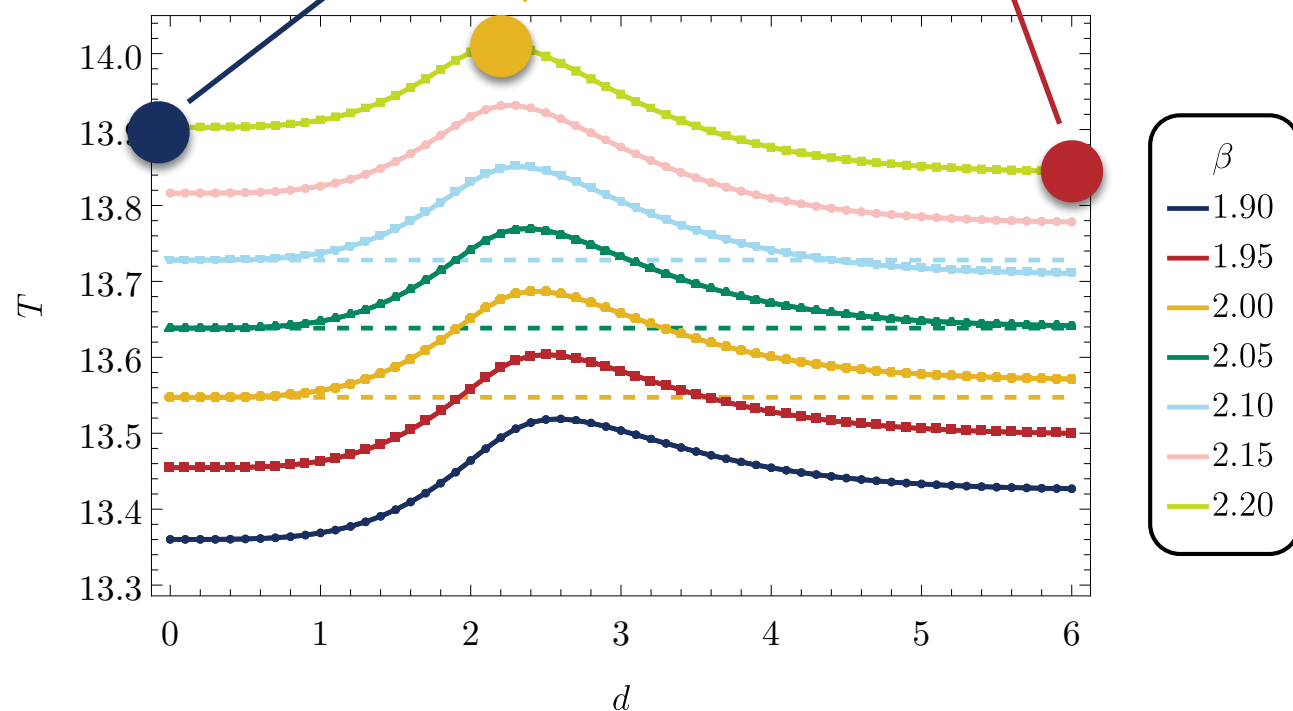
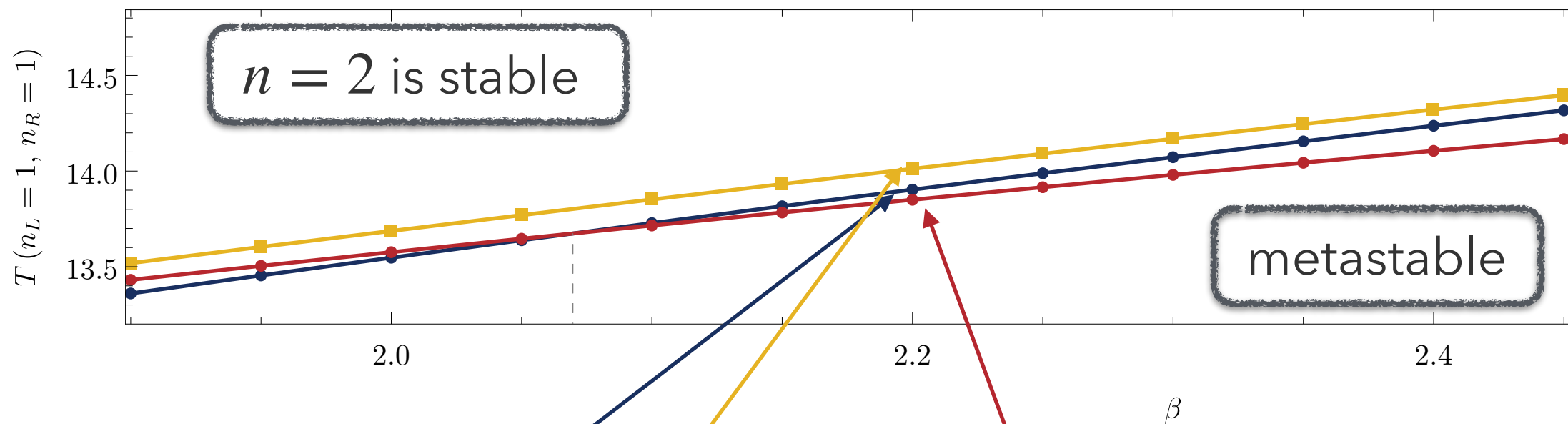
- We can read off the stability of the vortex of $n = 2$ state.



$n = 2$ state is absolute minimum.

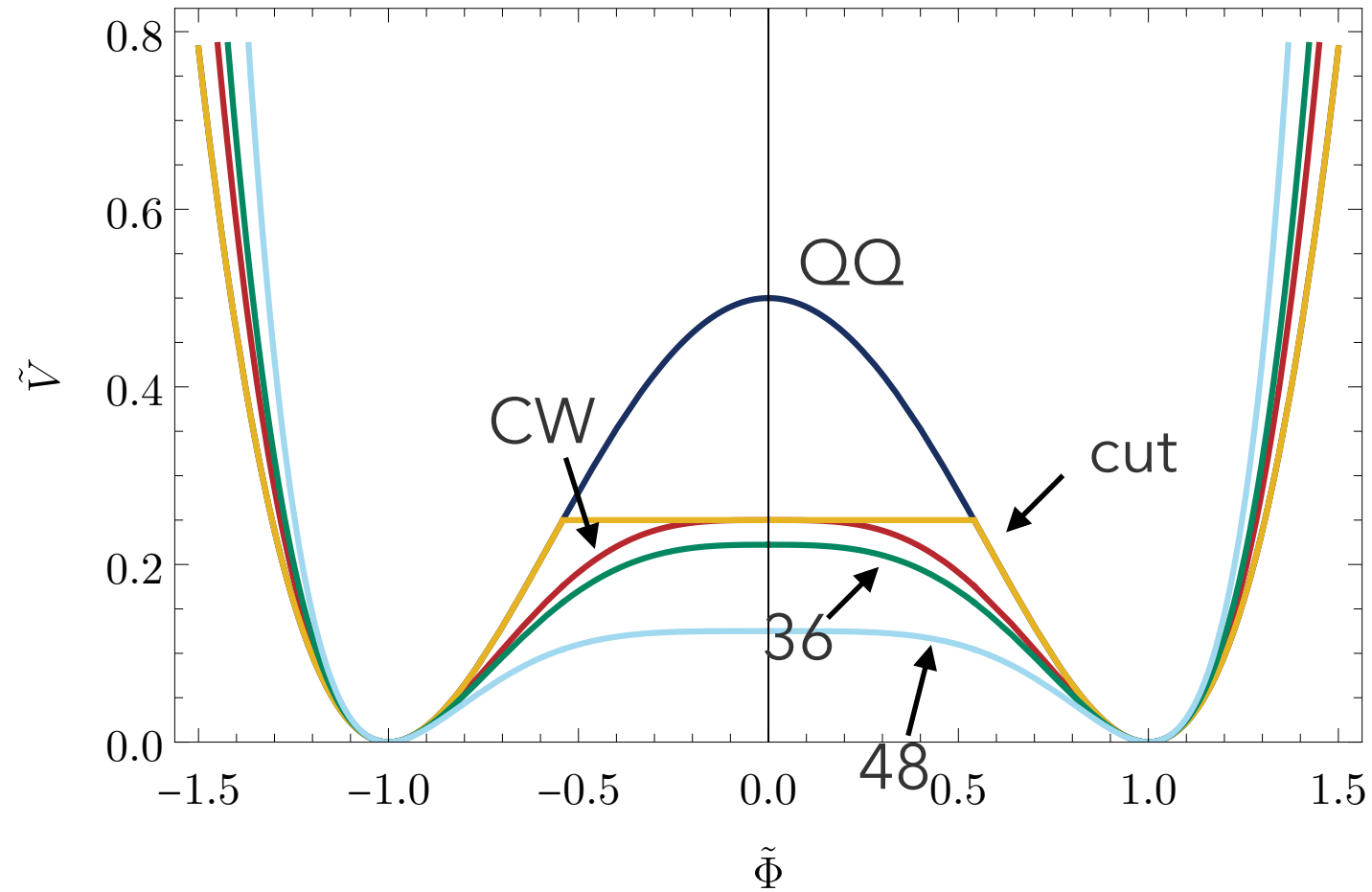
Stability of $n = 2$ state

- We can read off the stability of the vortex of $n = 2$ state.



$n = 2$ state can decay by quantum tunneling.

Other potentials

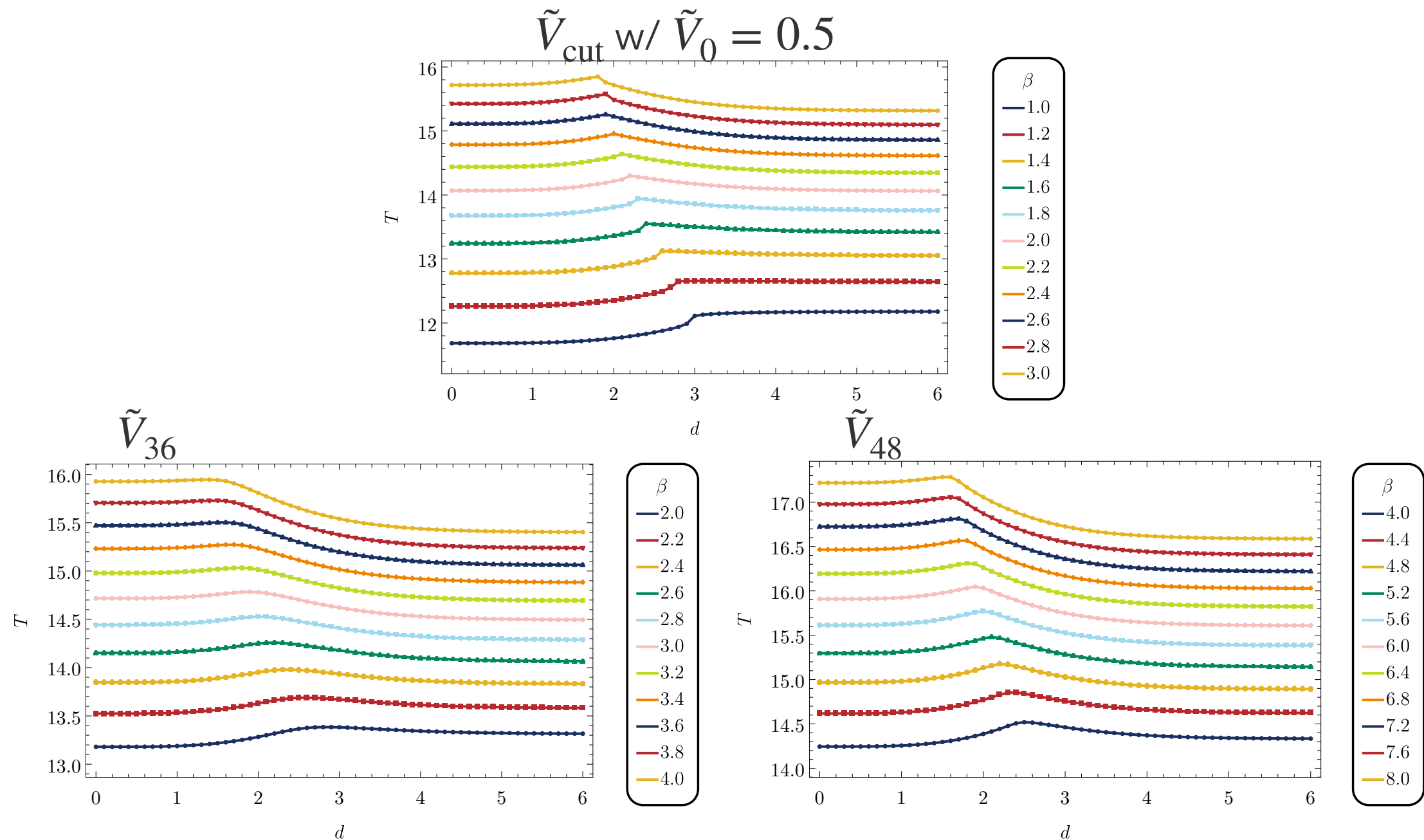


$$\tilde{V}_{\text{AH-cut}} = \begin{cases} \frac{\beta}{2} \tilde{V}_0 & \left(|\tilde{\Phi}| < \sqrt{1 - \sqrt{\tilde{V}_0}} \right) \\ \frac{\beta}{2} \left(|\tilde{\Phi}|^2 - 1 \right)^2 & \left(|\tilde{\Phi}| > \sqrt{1 - \sqrt{\tilde{V}_0}} \right) \end{cases}$$

$$\tilde{V}_{\text{AH-36}} = \frac{2\beta}{9} \left(|\tilde{\Phi}|^3 - 1 \right)^2,$$

$$\tilde{V}_{\text{AH-48}} = \frac{\beta}{8} \left(|\tilde{\Phi}|^4 - 1 \right)^2.$$

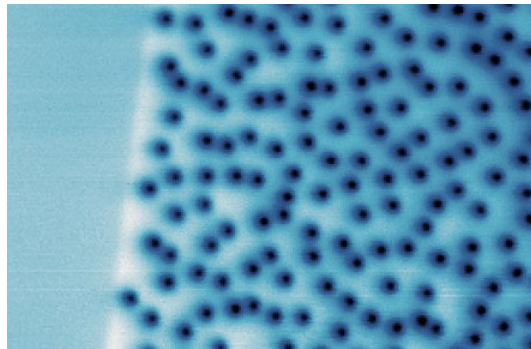
Other potentials



It seems that the energy barrier is universal for flatter potential than Quadratic-Quartic one.

Discussion

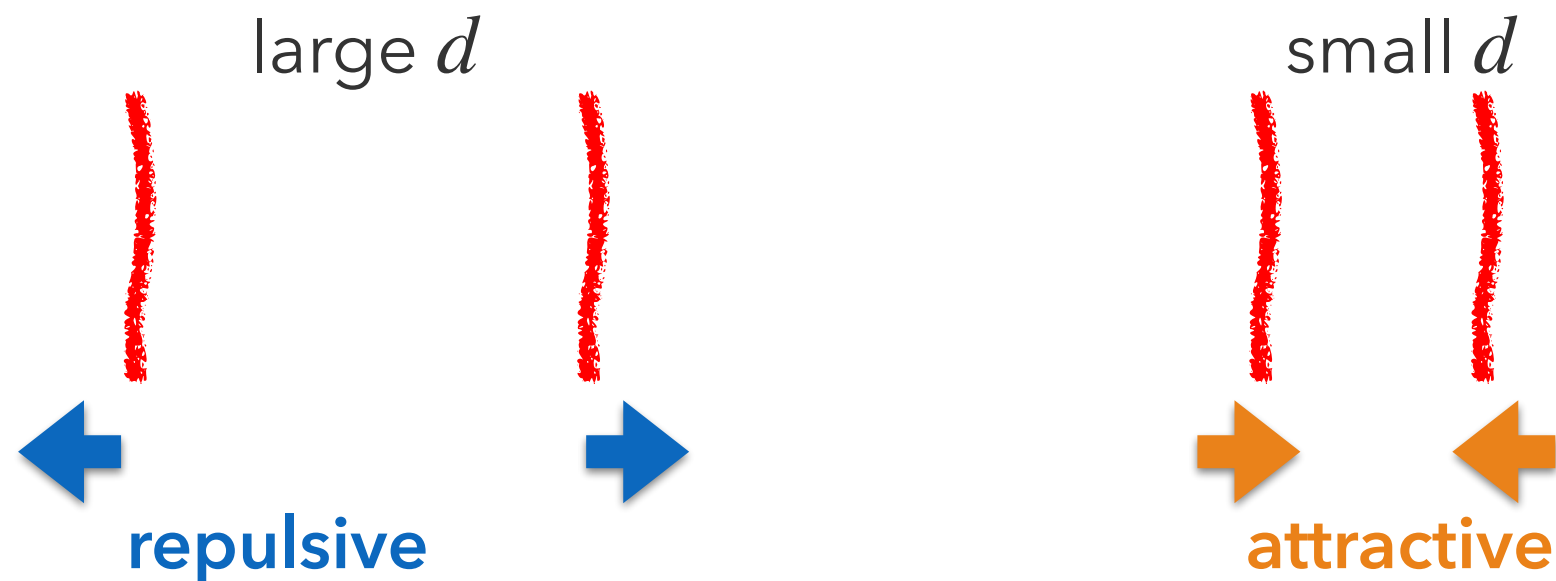
- Formation of Abrikosov-like lattice in superconductor?



dilute $\rightarrow$ lattice-like structure
dense $\rightarrow$ gather and merge!

novel phase transition!

- Cosmic string in universe $\rightarrow$ reconnection? gravitational waves?



might lead to non-trivial dynamics! (future work)

Summary

- Coleman-Weinberg potentialを持つAbelian-Higgs模型での vortex stringを調べた (CW-ANO string).

$$V_{\text{CW}}(\Phi) = \frac{\beta}{2} \left(\log \frac{|\Phi|^2}{v^2} - \frac{1}{2} \right) |\Phi|^4$$

- 通常の ANO vortex stringと違って、 $\beta > 1$ の時に2本間の相互作用ポテンシャルがエネルギー障壁を持つことがわかった

