3 次元極座標における微分演算子ナブラ

東京理科大学　小林 篤

2024 年 11 月 30 日

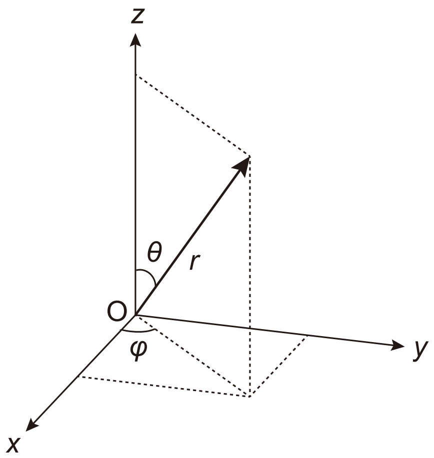

図 1　デカルト座標と極座標の関係

図 1 から以下の関係が成り立つ。

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{1}$$

$$\cos\theta = \frac{z}{r} \tag{2}$$

$$\tan\phi = \frac{y}{x} \tag{3}$$

デカルト座標系では、ナブラ演算子は次のように表される。

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

この式の基底ベクトルと各偏微分を極座標で表せればミッションコンプリートである。

$\frac{\partial}{\partial x}$ の導出

まず、偏微分の連鎖律[1)]を用いると $\frac{\partial}{\partial x}$ は次のように表せる。

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta}+\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

(1) 式 $r^2=x^2+y^2+z^2$ を x で偏微分して

$$2r\frac{\partial r}{\partial x}=2x \implies \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}=\sin\theta\cos\phi$$

(2) 式 $\cos\theta=\frac{z}{r}$ を x で偏微分すると

$$-\sin\theta\frac{\partial \theta}{\partial x}=-\frac{z}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}$$

これより

$$-\sin\theta\frac{\partial \theta}{\partial x}=-\frac{z}{r^2}\sin\theta\cos\phi \implies \frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{z}{r^2}\cos\phi=\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}$$

である。さらに、(3) 式 $\tan\phi=\frac{y}{x}$ を x で偏微分すると

$$\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}=-\tan\phi\frac{1}{r\sin\theta\cos\phi}$$

したがって

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=-\frac{\tan\phi\cos^2\phi}{r\sin\theta\cos\phi}=-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}$$

以上より

$$\frac{\partial}{\partial x}=\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

となる。

$\frac{\partial}{\partial y}$ の導出

y の偏微分の連鎖律を用いると次のようになり、$\frac{\partial}{\partial y}$ と同様の手順で計算をしていく。

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta}+\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

(1) 式 $r^2=x^2+y^2+z^2$ を y で偏微分して

$$2r\frac{\partial r}{\partial y}=2y \implies \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}=\sin\theta\sin\phi$$

(2) 式 $\cos\theta=\frac{z}{r}$ を y で偏微分すると

$$-\sin\theta\frac{\partial \theta}{\partial y}=-\frac{z}{r^2}\frac{\partial r}{\partial y}$$

これより

$$-\sin\theta\frac{\partial \theta}{\partial y}=-\frac{z}{r^2}\sin\theta\sin\phi \implies \frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{z}{r^2}\sin\phi=\frac{\cos\theta\sin\phi}{r}$$

1） 微分積分学の教科書を参照せよ。

である。(3) 式 $\tan\phi = \frac{y}{x}$ を y で偏微分すると

$$\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{1}{x} = \frac{1}{r\sin\theta\cos\phi}$$

したがって

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\cos^2\phi}{r\sin\theta\cos\phi} = \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}$$

以上より

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

となる。

$\frac{\partial}{\partial z}$ の導出

z の偏微分の連鎖律を用いると次のようになり、こちらも同様の手順で計算していく。

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

(1) 式 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ を z で偏微分して

$$2r\frac{\partial r}{\partial z} = 2z \implies \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} = \cos\theta$$

(2) 式 $\cos\theta = \frac{z}{r}$ を z で偏微分すると

$$-\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{1}{r} - \frac{z}{r^2}\frac{\partial r}{\partial z}$$

ここで $\frac{\partial r}{\partial z} = \cos\theta$ を代入すると

$$-\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{1}{r} - \frac{z\cos\theta}{r^2}$$

となる。これを整理して

$$-\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{r - r\cos^2\theta}{r^2} = \frac{\sin^2\theta}{r} \implies \frac{\partial\theta}{\partial z} = -\frac{\sin\theta}{r}$$

(3) 式 $\tan\phi = \frac{y}{x}$ を z で偏微分すると

$$\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0$$

したがって

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0$$

以上より

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

である。

偏微分演算子の変換

以上をまとめると、偏微分演算子 $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ と $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \phi}$ は次の行列で関係付けられる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \frac{\cos\theta\cos\phi}{r} & -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta} \\ \sin\theta\sin\phi & \frac{\cos\theta\sin\phi}{r} & \frac{\cos\phi}{r\sin\theta} \\ \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

基底ベクトルの変換

基底ベクトル $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ を $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi$ で表す。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\theta \\ \boldsymbol{e}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix}$$

これを逆行列で変換すると[2]、次のように表される。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\theta \\ \boldsymbol{e}_\phi \end{pmatrix}$$

ナブラの極座標系表現

以上をまとめると、以下の関係式が導かれる。

$$\boldsymbol{\nabla} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\theta \\ \boldsymbol{e}_\phi \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

これに、$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ を代入する。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \frac{\cos\theta\cos\phi}{r} & -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta} \\ \sin\theta\sin\phi & \frac{\cos\theta\sin\phi}{r} & \frac{\cos\phi}{r\sin\theta} \\ \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\nabla} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\theta \\ \boldsymbol{e}_\phi \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \frac{\cos\theta\cos\phi}{r} & -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta} \\ \sin\theta\sin\phi & \frac{\cos\theta\sin\phi}{r} & \frac{\cos\phi}{r\sin\theta} \\ \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

2） 各自計算をして確かめよ。

真ん中の 3×3 行列の積を計算する[3]。

$$\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \frac{\cos\theta\cos\phi}{r} & -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta} \\ \sin\theta\sin\phi & \frac{\cos\theta\sin\phi}{r} & \frac{\cos\phi}{r\sin\theta} \\ \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r\sin\theta} \end{pmatrix}$$

結果は

$$\boldsymbol{\nabla} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\theta \\ \boldsymbol{e}_\phi \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

となり、最終的にナブラ演算子は次のように表される。

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

3） これも各自計算して確認すること。