# Moment maps and isoparametric hypersurfaces in spheres — Hermititian case

## (球面内の等径超曲面と運動量写像: Hermite 対称空間の場合)*

藤井　忍† (広島大学大学院理学研究科 / 大阪市立大学数学研究所)

## 概要

本稿の内容は田丸博士氏 (広島大) との共同研究に基づく. 本稿では, 4 つの主曲率をもつ, 球面内の等質等径超曲面を定義する等径関数と, コンパクトで既約な階数 2 の Hermite 対称空間の等方表現の運動量写像の関係について述べる.

## 1　球面内の等径超曲面

本稿の主定理は以下である:

**主定理 (F. and Tamaru [4]).** $G/K$ を階数 2 のコンパクト既約 Hermite 対称空間, すなわち以下のいずれかとする:

(1) $\mathrm{SO}(n+2)/\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{SO}(n)$,
(2) $\mathrm{SU}(n+2)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(2)\times\mathrm{U}(n))$,
(3) $\mathrm{SO}(10)/\mathrm{U}(5)$,
(4) $\mathrm{E}_6/\mathrm{U}(1)\times\mathrm{Spin}(10)$.

さらに, $\mu:\mathfrak{p}\to\mathfrak{k}^*$ を $G/K$ の等方表現に付随する運動量写像とする. このとき, $\mathfrak{k}^*$ 上の $K$–不変ノルム $\|\cdot\|$ で, $\|\mu(P)\|^2$ (ただし $P\in\mathfrak{p}$) が 4 次の Cartan–Münzner 多項式になるものが存在する.

球面 $S^n$ 内の**等径超曲面**とは, $(S^n,\langle,\rangle)$ 上の等径関数 $\varphi:S^n\to\mathbb{R}$ のレベル集合として

---

* 研究集会「部分多様体幾何とリー群作用」 (於 東京理科大学, 2010 年 9 月 8 日–10 日) 報告集用原稿.
† E-mail address: `shinofu@hiroshima-u.ac.jp`

定義される余次元 1 の部分多様体である．球面 $S^n$ 内の等径超曲面 $M \subsetneq S^n$ に対して, 以下を満たす $g$ 次斉次多項式関数 $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ が存在することが知られている:
$f|_{S^n}$ は $M$ を定義する等径関数であり,

$$(*) \qquad \begin{cases} \|\operatorname{grad} f(P)\|^2 = g^2 \|P\|^{2g-2}, \\ \Delta f(P) = \dfrac{m_2 - m_1}{2} g^2 \|P\|^{g-2} \end{cases}$$

をみたす.
ここで, $g$ は異なる主曲率の個数で, $g \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ である．また, $m_i$ は主曲率を $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_g$ としたときの, $m_1$, $m_2$ の重複度である．このような斉次多項式を **Cartan–Münzner 多項式**という.

等径超曲面の基本的性質等については尾関–高木–竹内 [6] や宮岡 [5] 等を参照していただきたい．4 つの主曲率をもつ, 球面内の等径超曲面のうち, 現在知られているものは, 以下に挙げる階数 2 の対称空間の等方表現の主軌道として得られるものと, OT–FKM 型等径超曲面と呼ばれる, Clifford 代数の表現から構成されるものである:

(1) $\mathrm{SO}(2+n)/\,\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(n)$,
(2) $\mathrm{SU}(2+n)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(n))$,
(3) $\mathrm{SO}(10)/\,\mathrm{U}(5)$,
(4) $\mathrm{E}_6/\,\mathrm{U}(1) \times \mathrm{Spin}(10)$,
(5) $\mathrm{Sp}(2+n)/\,\mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{Sp}(n)$,
(6) $\mathrm{SO}(5) \times \mathrm{SO}(5)/\,\mathrm{SO}(5)$.

このうち, (1) から (4) までは Hermite 対称空間である.

我々は 4 つの主曲率を持つ, 球面内の等径超曲面に興味を持っている．特に「4 つの主曲率を持つ球面内の等径超曲面は, 等質か非等質かに依らずに, 全て運動量写像と関係するだろう」と予想をしていて, その研究を行っている．もし, この両者が関係あれば, その関係を利用して球面内の等径超曲面の統一的かつ幾何学的な手法による分類が出来るのではないかと期待している.

## 2 Hermite 対称空間の等方表現の運動量写像

本節では, 運動量写像の定義とその性質について簡単にまとめ, 主定理の仮定を**古典型**の場合に制限した結果を述べておく．Hamilton 作用や運動量写像に関する詳細なことは Audin [1] を, 古典型の場合の主結果に関しては論文 [3] をそれぞれ参照していただきたい.

**定義 1.**

(1) $2n$ 次元 $C^\infty$–多様体 $M$ と, $M$ 上の微分 2–形式 $\omega$ で, $d\omega = 0$ かつ $\omega^{\wedge n} \neq 0$ なるものの組 $(M, \omega)$ を**シンプレクティック多様体**といい, $\omega$ を $M$ の**シンプレクティック形式**という.

(2) Lie 群 $K$ のシンプレクティック多様体 $(M, \omega)$ への作用が **Hamilton 的**であるとは, 以下を満たすことをいう:

(i) $K$–作用はシンプレクティック形式 $\omega$ を保つ,

(ii) 運動量写像 $\mu : M \to \mathfrak{k}^*$ が存在する.

ただし, $\mathfrak{k}^*$ は $K$ の Lie 代数 $\mathfrak{k}$ の線型空間としての双対空間である. ここで写像 $\mu : M \to \mathfrak{k}^*$ が**運動量写像**であるとは,

(a) $(d\mu)_P(Q)(\xi) = \omega_P(\widetilde{\xi}_P, Q)$ for $P \in M$, $Q \in T_PM$, $\xi \in \mathfrak{k}$,

(b) $\mu(a.P) = a.\mu(P)$ for $P \in M$, $a \in K$

を満たすときをいう. ここで $\widetilde{\xi}$ は以下で定義される $M$ 上のベクトル場である:

$$M \ni P \overset{\widetilde{\xi}}{\longmapsto} \frac{d}{dt}\exp(t\xi).P\bigg|_{t=0} \in T_PM.$$

運動量写像の性質 (b) は, 運動量写像は $K$–同変写像であることを意味する.

さて, 階数 2 の Hermite 対称空間の等方表現について考える. 階数 2 の Hermite 対称空間 $G/K$ の等方表現の主 $K$–軌道が球面内の等質等径超曲面となることが知られている (特に 4 つの主曲率を持つものである). 定義からこの軌道は適当な等径関数 $\varphi : \mathfrak{p} \to \mathbb{R}$ のレベル集合である. ここで $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{g}$ の線型部分空間であって, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を満たすものである. さらに, この $\varphi$ に対応する 4 次の Cartan–Münzner 多項式 $f$ が存在する. 注目すべきは $f$ が $K$–不変であることである. 一方で, 階数 2 の Hermite 対称空間 $G/K$ の等方表現が Hamilton 作用であることが知られている. したがって, 運動量写像 $\mu : \mathfrak{p} \to \mathfrak{k}^* \simeq \mathfrak{k}$ が存在する. 運動量写像は $K$–同変写像であり, 適当な $K$–不変ノルム $\|\cdot\|^2$ との合成を考えることで 4 次の $K$–不変式を得る.

この 2 つの $K$–不変式の関係について述べたのが定理 2 および主定理である.

**定理 2 (F. [3]).** $G/K$ を階数 2 の**古典型**コンパクト既約 Hermite 対称空間 (つまり, 主定理内で挙げた階数 2 の対称空間のリストの (1), (2), (3) のいずれか) とする. このとき,

(1) 等方表現 $K \overset{\mathrm{Ad}}{\curvearrowright} \mathfrak{p}$ は $\omega$ を保つ,

(2) 運動量写像 $\mu : \mathfrak{p} \to \mathfrak{k}^* \simeq \mathfrak{k}$ は $\mu(P) = \dfrac{1}{2}[P, [P, Z]] \in \mathfrak{k}$ と書ける,

(3) $\|\mu(P)\|^2$ が 4 つの主曲率をもつ球面内の等質等径超曲面を定義する Cartan–

Münzner 多項式になるような $\mathfrak{k}^*$ 上の $K$–不変ノルム $\|\cdot\|$ が存在する.

ただし, $Z$ は $J := \mathrm{ad}_Z|_{\mathfrak{p}}$ が $\mathfrak{p}$ 上の複素構造を定めるような $\mathfrak{g}$ の元である. また, $\mathfrak{g}$ の Killing 形式から定まる $\mathfrak{k}^*$ 上の $K$–不変内積 $\langle\ ,\ \rangle$ によって $\mathfrak{k}^* \simeq \mathfrak{k}$ とみなしている. $\mathfrak{p}$ 上のシンプレクティック形式 $\omega$ は $\omega(x,y) := \langle J(x), y\rangle$ で定義する.

**注意 3.**

(1) 定理 2 で計算して得た Cartan–Münzner 多項式は, 尾関–竹内 [8] で計算されているものと本質的には同じものである (違いは $\mathfrak{k}^*$ 上の $K$–不変内積の取り方と**計算方法**である).

(2) 定理 2 (2) の運動量写像の記述は Hermite 対称空間の等方表現について成立し, $G/K$ の階数や古典型・例外型といった性質には依らない.

## 3 主定理の証明の概略

本節では, 主定理の証明の概略を説明する.

定理 2 の証明は, 扱っている Hermite 対称空間が “古典型”, つまり “行列で表せる” ということに頼っているため, 例外型 $\mathrm{E}_6/\mathrm{U}(1)\times\mathrm{Spin}(10)$ に関して同様の方法では計算できない. そこで, 定理 2 を行列の言葉に頼らずに証明する必要がある.

そのために定理 2 (3) の証明について簡単に説明する. $G/K$ は Hermite 対称空間ゆえ, Lie 代数として $\mathfrak{k} = \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{k}'$ を満たすような $\mathfrak{k}$ の Lie 部分代数 $\mathfrak{k}'$ が存在する. $\mathfrak{g}$ の Killing 形式 $B$ に対して

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{g}} := -B(\ ,\ )$$

は $\mathfrak{g}$ 上の内積を定めるが, 実数 $a$, $b$ に対して

$$\langle\ ,\ \rangle_{a,b} := a\,\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{u}(1)\times\mathfrak{u}(1)} + b\,\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{k}'\times\mathfrak{k}'}$$

は $\mathfrak{k}$ 上の (非退化とは限らない) 内積を定める. そこで, 運動量写像 $\mu$ の, 上で定めた内積 $\langle\ ,\ \rangle_{a,b}$ に関するノルム 2 乗関数を

$$\begin{aligned} f_{a,b}(P) &= a\,\langle \mu(P), \mu(P)\rangle_{a,b} + b\,\langle \mu(P), \mu(P)\rangle_{a,b} \\ &= a\|\mu_1(P)\|_{\mathfrak{g}}{}^2 + b\|\mu_2(P)\|_{\mathfrak{g}}{}^2 \end{aligned}$$

と定義する. ただし, $\|\cdot\|_{\mathfrak{g}}{}^2$ は $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{g}}$ から決まる ($\mathfrak{g}$ 上の) ノルム 2 乗であり, $\mu_1 := p_1 \circ \mu$, $\mu_2 := p_2 \circ \mu$ である. ここで,

$$p_1 : \mathfrak{k} \to \mathfrak{u}(1), \qquad p_2 : \mathfrak{k} \to \mathfrak{k}'$$

はそれぞれ $\mathfrak{k}$ の $\mathfrak{u}(1)$, $\mathfrak{k}'$ への標準的射影である．主定理の主張は「上手く $a$, $b$ を選べば $f_{a,b}(P)$ が 4 次の Cartan–Münzner 多項式になる」ということと同値である．この主張を確かめるためには $\mathfrak{p}$ の正規直交基底 $\{P_i\}$ に対して $\|\mathrm{grad}\, f_{a,b}(P)\|^2$, $\Delta f_{a,b}(P)$ を計算し, 4 次の Cartan–Münzner 多項式の条件式 $(*)$ と比較すれば良い．論文 [3] での定理 2 の証明は, 各 $G/K$ ごとに $\mathfrak{p}$ の正規直交基底を一つ固定し, それを具体的に行列で表記して計算している．例外型の場合にはこのような計算は出来ないので, 正規直交基底を具体的に記述しない計算法が必要なのだが, その鍵となるのが以下に挙げる命題である．これは階数 2 の古典型 Hermite 対称空間の等方表現の不変式環が 2 変数実係数多項式環であり, 特にその生成系として $\left\{\|P\|^2,\ \|\mu(P)\|^2\right\}$ が取れることから予想されたものである:

**命題 4 ([4]).** $G/K$ を階数 2 のコンパクト既約 Hermite 対称空間とするとき, 以下を満たす $\alpha = \alpha(m_1, m_2, a, b)$, $\beta = \beta(m_1, m_2, a, b)$, $\gamma = \gamma(Z, N, a, b) \in \mathbb{R}$ が存在する:

(1) $\|\mathrm{grad}\, f_{a,b}(P)\|^2 = \alpha\, \|P\|^6 + \beta\, \|P\|^2\, \|\mu(P)\|^2$,

(2) $\Delta f_{a,b}(P) = \gamma\, \|P\|^2$.

ただし, $m_1$, $m_2$ は主曲率の重複度, $N$ は $\mathfrak{p}$ の次元であり, その他の記号は上と同様である．

**注意 5.**

(1) 命題 4 (2) は $G/K$ の階数に依らずに成り立つ．$\mathrm{rank}\, G/K = 2$ の場合, $N$ および $\|Z\|^2$ は $m_1$, $m_2$ を用いて表わすことができる．

(2) 命題 4 (1) は $\mathrm{rank}\, G/K = 2$ の仮定のもと成立する．証明は, 以下の事実から (容易に, ではないが) 従う:

- 主定理で扱っている Hermite 対称空間に対応するルート系が $C_2$–type もしくは $BC_2$–type であること,
- $Z \in \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{k}_{2\varepsilon_1} \oplus \mathfrak{k}_{2\varepsilon_2}$ (この主張は $G/K$ の階数が 2 でなくとも成立する), ここで, $\mathfrak{k}_\alpha := \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_\alpha$, ($\alpha$ は $\mathfrak{g}$ 上のルート, $\mathfrak{g}_\alpha$ は $\alpha$ に対する $\mathfrak{g}$ のルート部分空間),
- 極大トーラスを $\mathfrak{a} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{H_{\varepsilon_1}, H_{\varepsilon_2}\}$ ($H_{\varepsilon_i}$ はルートベクトル) と表すとき, $\mathfrak{a}$ 上で $\|\mathrm{grad}\, f_{a,b}(P)\|^2$ が $\|P\|^6$ と $\|P\|^2\, \|\mu(P)\|^2$ の線型結合で表せる．

上の注意に現れる $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ は $\mathbb{R}^2$ の標準基底である．$\|\mathrm{grad}\, f_{a,b}(P)\|^2$ の計算が極大トーラス $\mathfrak{a}$ 上で十分なのは, 以下の事実に依る:

**事実 6.** $f$, $g : \mathfrak{p} \to \mathbb{R}$ がともに $\mathrm{Ad}_K$–不変な関数で, $f|_{\mathfrak{a}} = g|_{\mathfrak{a}}$ を満たしているならば, $\mathfrak{p}$ 上で $f = g$ である．

# 参考文献


[1] Audin, M, *Torus Actions on Symplectic Manifolds*, Second revised edition, Prog. in Math. **93**, Birkhäuser, 2004.

[2] Ferus, D., Karcher, H. and Münzner, H. F., “Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen”, *Math. Z.*, **177** (1981), 479–502.

[3] Fujii, S., “Homogeneous isoparametric hypersurfaces in spheres with four distinct principal curvatures and moment maps”, *Tohoku Math. J.*, **62** (2010), 191–213.

[4] Fujii, S. and Tamaru, H., “Moment maps and isoparametric hypersurfaces in spheres—Hermitian case”, in preparation.

[5] 宮岡 礼子, “等径超曲面再訪”, 数学 **53** (2001), 18–33.

[6] 尾関 英樹, 高木 亮一, 竹内 勝, “等径超曲面について”, 数学 **30** (1978), 23–32.

[7] Ozeki, H. and Takeuchi, M., “On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres I”, *Tôhoku Math. J.* **27** (1975), 515–559.

[8] ———, “On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres II”, *Tôhoku Math. J.* **28** (1976), 7–55.