中心アファイン極小曲面と Meijer の G 関数

(Centroaffine minimal surfaces and Meijer's G-functions)

藤岡敦 (一橋大学)

§1. 序

中心アファイン極小超曲面は Wang ([16]) により, Euclid 空間内の非退化中心アファイン超曲面に対する中心アファイン計量の面積積分の停留超曲面として定義された, 中心アファイン微分幾何における研究対象である. Wang 自身は中心アファイン計量が定値な場合に上の面積積分の第一変分を計算し, 原点を中心とする固有アファイン超球面は中心アファイン極小超曲面であることを示した他, 第二変分も計算し, 中心アファイン計量が負定値な原点を中心とする固有アファイン超球面は安定で, 原点を中心とする楕円面は不安定であることを示した.

Wang の仕事からも分かるように, 中心アファイン極小超曲面はアファイン超球面と深い関わりをもつ. アファイン超球面はアファイン型作用素がスカラー作用素となる Euclid 空間内の超曲面で, 等積アファイン微分幾何における研究対象である. 等積アファイン微分幾何を含むアファイン微分幾何については, 例えば [1, 13] を参照されたい. 特に, アファイン型作用素が零作用素でないアファイン超球面は固有であるというが, 固有アファイン球面, 即ち Euclid 空間が 3 次元の場合, その歴史は二十世紀初めの Tzitzéica ([14]) の仕事にまで遡ることができる.

3 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^3$ 内の曲面を局所的に考え, 領域 D から $\mathbf{R}^3$ への写像 f として表しておき, K を f の Euclid Gauss 曲率, d を原点と f の接平面の符号付き Euclid 距離, 即ち原点からの Euclid 支持関数とし, $d \neq 0$ とする. このとき, Tzitzéica は $\dfrac{K}{d^4}$ が原点を固定する等積アファイン変換, 即ち等積中心アファイン変換で不変であることを発見し, この量が一定のの曲面を S 曲面とよんだ. $K \neq 0$ の S 曲面は原点を中心とする固有アファイン球面に他ならない. また, 例えば等積アファイン計量が不定値の場合の固有アファイン球面に対する積分可能条件は一般に

$$(\log \psi)_{xy} = -\psi - \frac{1}{\psi^2}$$

と表され, この方程式は Tzitzéica 方程式ともよばれる.

ここでは $\mathbf{R}^3$ 内の中心アファイン極小超曲面, 即ちの中心アファイン極小曲面を局所的に考えるが, このような状況ですら本質的に新しい例は余り知られていない. また, Schief ([11]) が示したように, 中心アファイン極小曲面は可積分系理論的な側面ももち, 固有アファイン球面に対する Tzitzéica 変換の一般化や離散化が可能である. なお, [11] では中心アファイン極小曲面を一般化アファイン球面とよんでいる.

§2. 中心アファイン微分幾何

まず, アファイン微分幾何よりは親しみのある Euclid 微分幾何について少しだけ思い出しておく. $\mathbf{R}^3$ 内の曲面 f を領域 D から $\mathbf{R}^3$ への写像 f として表しておき, (x_1, x_2) を局所座標とする. Euclid 微分幾何では $\mathbf{R}^3$ に標準内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が備わっていると考えるから, 曲面 f に対する単位法ベクトル場 n を定めることができる. このとき, Gauss 方程式は Christoffel 記号 Γ_{ij}^k $(i, j, k = 1, 2)$ を用いて

$$f_{x_i x_j} = \Gamma_{ij}^1 f_{x_1} + \Gamma_{ij}^2 f_{x_2} + \langle f_{x_i x_j}, n\rangle n \quad (i, j = 1, 2)$$

と表される.

一方, アファイン微分幾何では $\mathbf{R}^3$ はアファイン空間であり, 曲面と横断的に交わるベクトル場として, n に代わるものを考えることになる. このようなものとして曲面の位置ベクトルを選ぶことのできる曲面が中心アファイン曲面である. よって, f が中心アファイン曲面のとき, 中心アファイン曲面としての Gauss 方程式は上とは異なる Christoffel 記号 $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ $(i, j, k = 1, 2)$ 及び中心アファイン計量とよばれる $(0, 2)$ テンソル場 h を用いて

$$f_{x_i x_j} = \tilde{\Gamma}_{ij}^1 f_{x_1} + \tilde{\Gamma}_{ij}^2 f_{x_2} - h(\partial_{x_i}, \partial_{x_j}) f \quad (i, j = 1, 2)$$

と表される.

中心アファイン曲面は中心アファイン計量が非退化, 定値, 不定値の場合に応じて, それぞれ非退化, 定値, 不定値であるという. 上の 2 式と n の内積を取ると

$$\langle f_{x_i x_j}, n\rangle = -h(\partial_{x_i}, \partial_{x_j})\langle f, n\rangle$$

となるから, 中心アファイン曲面が定値, 或いは不定値であることは Euclid Gauss 曲率がそれぞれ正, 或いは負であることと同値である.

§3. 中心アファイン極小曲面

簡単のため f を不定値中心アファイン曲面とする. 局所座標として漸近線座標 (x, y) を選んでおき, f の定義域 D は有界であるとする. また,

$\Phi(x,y,t)$ を不定値中心アファイン曲面の 1 径数族で,

$$\Phi = f + t(\lambda f + \mu f_x + \nu f_y) + o(t) \quad (t \to 0)$$

となるものとする. 但し, λ, μ, ν は D の境界で 0 となる D 上の実数値関数である. 更に, $Adxdy$ を Φ の中心アファイン計量の面積要素とすると, 第一変分公式

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_D Adxdy = \pm 2 \int_D \rho_{xy} \lambda dxdy$$

が成り立つ. 但し, f の Euclid Gauss 曲率 K 及び f の原点からの Euclid 支持関数 $d = \langle f, n \rangle$ を用いて

$$\rho = -\frac{1}{4} \log \left(-\frac{K}{d^4} \right)$$

とおいた. また, h を f の中心アファイン計量とすると, 第一変分公式の右辺の符号は $h(\partial_x, \partial_y)$ と異符号である. §1 において述べたことから, ρ は等積中心アファイン変換で不変な量となる. なお, 等積アファイン微分幾何の言葉を用いると, e^ρ は f の原点からの等積アファイン支持関数と符号を除いて一致する. 第一変分公式より, f が中心アファイン極小であることは ρ が漸近線座標に関してローレンツ調和, 即ち $\rho_{xy} = 0$ であることと同値である. よって, 中心アファイン極小曲面は Euclid 微分幾何における調和逆平均曲率曲面や Bianchi 曲面のアファイン微分幾何版ともみなすことができる. 調和逆平均曲率曲面及び Bianchi 曲面の基本的事項については, 例えば [2] を参照されたい.

後で用いるために, 上とは異なる方法で中心アファイン極小曲面を特徴付けよう. f を非退化中心アファイン曲面, $\tilde{\nabla}$ を中心アファイン曲面 f の誘導する接続, $\hat{\nabla}$ を f の中心アファイン計量 h の Levi-Civita 接続とする. このとき, 差テンソルとよばれる $(1,2)$ テンソル場 C 及び中心アファイン Tchebychev ベクトル場とよばれるベクトル場 T が

$$C = \tilde{\nabla} - \hat{\nabla},\ T = \frac{1}{2} \mathrm{tr}_h C$$

により定められる. 但し, 第 2 式の右辺は

$$h_{ij} = h(\partial_{x_i}, \partial_{x_j}),\ (h^{ij}) = (h_{ij})^{-1},\ C_{ij}^k \partial_{x_k} = C(\partial_{x_i}, \partial_{x_j})$$

とおき,

$$\mathrm{tr}_h C = h^{ij} C_{ij}^k \partial_{x_k}$$

により定められる.

このとき,

$$T = \mathrm{grad}_h \rho$$

が成り立つことが分かるから, §1 において述べたことより, f が原点を中心とする固有アファイン球面であることは $T=0$ であることと同値である.

更に, f が中心アファイン極小であることは中心アファイン Tchebychev 作用素 $\hat{\nabla}T$ のトレースが消えることと同値であることが分かる. 特に, 原点を中心とする固有アファイン球面は中心アファイン極小曲面である. 次に述べるように, 多くの中心アファイン極小曲面の例はトレースを取る以前に $\hat{\nabla}T$ 自体が消えているものとして知られている.

§4. 中心アファイン極小曲面の例

まず, 二次曲面は中心アファイン極小曲面となる. 実際, 原点を中心とする楕円面, 一葉双曲面, 二葉双曲面は $T=0$ となる中心アファイン極小曲面である. これらは固有アファイン球面の例でもある. また, 原点を頂点とする楕円放物面, 原点を鞍点とする双曲放物面からそれぞれ原点を除いたものは $T=0$ ではないが $\hat{\nabla}T=0$ となる中心アファイン極小曲面である. これらは非固有アファイン球面, 即ちアファイン型作用素が零作用素となるアファイン球面の例でもある.

また, §3 の最後において述べたように, 原点を中心とする固有アファイン球面は $T=0$ で特徴付けられる中心アファイン極小曲面である. f を原点を中心とする固有アファイン球面, κ を中心アファイン計量 h の曲率, 即ち中心アファイン Gauss 曲率とする. 等積アファイン計量の曲率が一定のアファイン球面は Magid-Ryan ([8]), Simon ([12]) らによって分類されたが, 原点を中心とする固有なものについては等積アファイン計量の曲率が一定であることは中心アファイン曲面とみなしたときの κ が一定であることと同値であることが分かるため, $T=0$ で κ が一定の中心アファイン極小曲面は彼らの分類によって得られたものに含まれる. 特に, このとき $\kappa = 0, 1$ である. 以下, $f=(X,Y,Z)$ とおき, 中心アファイン合同を除いて考えることにする.

まず, $T=0$, $\kappa=0$ となる f は Magid-Ryan の結果より, 次の (1), (2) の何れかで表される.

(1) $XYZ=1$.

(2) $(X^2+Y^2)Z=1$.

また, $T=0$, $\kappa=1$ となる f は Simon の結果より, 次の (1)〜(3) の何れかで表される.

(1) 原点を中心とする楕円面.

(2) 原点を中心とする二葉双曲面.

(3) $f = A'(u) + vA(u)$. 但し, A は $\det \begin{pmatrix} A \\ A' \\ A'' \end{pmatrix}$ が 0 でない定数となる $\mathbf{R}^3$ 値関数.

更に, Liu-Wang ([7]) により, 上に挙げたものを除いて $\hat{\nabla}T = 0$ となる f は次の (1)〜(5) の何れかで表され, すべて $\kappa = 0$ をみたす.

(1) $X^\alpha Y^\beta Z^\gamma = 1,\ \alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma) \neq 0.$

(2) $\left\{\exp\left(-\alpha \tan^{-1}\dfrac{X}{Y}\right)\right\}(X^2+Y^2)^\beta Z^\gamma = 1,\ \gamma(2\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2) \neq 0.$

(3) $Z = -X(\alpha \log X + \beta \log Y),\ \beta(\alpha+\beta) \neq 0.$

(4) $Z = \pm X \log X + \dfrac{Y^2}{X}.$

(5) $f = (e^x, A_1(x)e^y, A_2(x)e^y)$. 但し, A_1, A_2 は任意関数 $a = a(x)$ に対する微分方程式 $A'' - A' - a(x)A = 0$ の線形独立な解.

なお, [7] には (4) の例が落ちている ([6]).

Vrancken ([15]) は $\hat{\nabla}T \neq 0$ で T が $\hat{\nabla}T$ の固有ベクトルとなる定値中心アファイン極小曲面がある 1 階の常微分方程式の解を用いて記述されることを示したが, 具体的な曲面の形は与えていない.

筆者は [3] において, 中心アファイン曲面の不変量の 1 つである 3 次微分にある種の対称性を仮定し, κ が一定の中心アファイン極小曲面を分類し, その中で $\hat{\nabla}T \neq 0$ となるものを具体的に得た. この例は不定値な場合は

$$f = \left(\frac{e^{-u}}{u}\cos v, \frac{e^{-u}}{u}\sin v, 1 - \frac{1}{u}\right),$$

定値な場合は

$$f = \left(\frac{e^{-u+v}}{u}, \frac{e^{-u-v}}{u}, 1 - \frac{1}{u}\right)$$

と表され, Vrancken が調べた性質をみたすことが分かる.

§5. Meijer の G 関数を用いて表される例

筆者は [4] において中心アファイン Gauss 曲率 κ が一定で中心アファイン Tchebychev 作用素 $\hat{\nabla}T$ が対角化可能でない中心アファイン極小曲面を, また [5] において κ と Pick 関数 J が一定の中心アファイン極小曲面を分類した. なお, Pick 関数は §3 において現れた記号を用いて,

$$J = \frac{1}{2}\|C\|^2 = \frac{1}{2}h_{kr}h^{ip}h^{jq}C^k_{ij}C^r_{pq}$$

により定められる. 上の二つの分類のどちらにおいても新しい中心アファイン極小曲面の例を二つ得ることができた.

一つめは $\kappa = 1$, $J = 0$ で, §4 において述べた Simon による例を一般化した

$$f = A'(u) + vA(u)$$

と表される線織面である. 但し, A は $\det\begin{pmatrix} A \\ A' \\ A'' \end{pmatrix}$ が 0 でない $\mathbf{R}^3$ 値関数である.

二つめは $\kappa = 0$, $J = -1$ で,

$$f(x,y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{n,1}(x)y^n, \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{n,2}(x)y^n, \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{n,3}(x)y^n\right)$$

と表されるものである. 但し, (x,y) は $x_0 \neq 0$ となる $(x_0, 0)$ の周りにおける漸近線座標, $\varphi_{0,1}, \varphi_{0,2}, \varphi_{0,3}$ は微分方程式

$$x\varphi''' + \varphi'' - \varphi = 0$$

の線形独立な解で, 更に

$$\varphi_{n+1,i} = \frac{x}{n+1}\varphi''_{n,i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

である.

複素線積分を用いて

$$G^{m,n}_{p,q}\left(z \middle| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j + s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1 - b_j - s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j + s)} z^{-s} ds$$

により定められる Meijer の G 関数は $\max\{p,q\}$ 階の微分方程式

$$\left\{(-1)^{p-m-n}z\prod_{j=1}^{p}\left(z\frac{d}{dz}-a_j+1\right)-\prod_{j=1}^{q}\left(z\frac{d}{dz}-b_j\right)\right\}G(z)=0$$

をみたし, 多くの初等関数や特殊関数を表すことができることで知られている. 但し, m,n,p,q は $0\leq m\leq q$, $0\leq n\leq p$ をみたす整数で, $z\neq 0$ である. パラメータ $a_1,\ldots,a_p$, $b_1,\ldots,b_q$ に対する条件や積分経路 L の他, Meijer の G 関数に関する詳しいことについては [9] や [10] を参照されたい. 特に, 上の 3 階微分方程式の解は

$$\begin{aligned}\varphi(x)=c_1G^{2,0}_{0,3}\left(\frac{x^2}{8}\,\middle|\,\begin{matrix}-\\ \frac{1}{2},\frac{1}{2},0\end{matrix}\right)+ic_2G^{1,0}_{0,3}\left(-\frac{x^2}{8}\,\middle|\,\begin{matrix}-\\ \frac{1}{2},\frac{1}{2},0\end{matrix}\right)\\ +c_3G^{1,0}_{0,3}\left(-\frac{x^2}{8}\,\middle|\,\begin{matrix}-\\ 0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\end{matrix}\right)\qquad(c_1,c_2,c_3\in\mathbf{R})\end{aligned}$$

によりあたえられる. なお, 右辺の第 2 項と第 3 項は一般化超幾何関数 ${}_0F_2$ を用いて表すことができる.

参考文献

[1] 野水克己, 佐々木武, アファイン微分幾何学–アファインはめ込みの幾何–. 裳華房, 1994.

[2] A. I. Bobenko, Surfaces in terms of 2 by 2 matrices. Old and new integrable cases. Harmonic maps and integrable systems, 83–127, Aspects Math., E23, Vieweg, 1994.

[3] A. Fujioka, Centroaffine minimal surfaces with constant curvature metric, Kyungpook Math. J. **46** (2006) 297–305.

[4] A. Fujioka, Centroaffine minimal surfaces with non-semisimple centroaffine Tchebychev operator, Results Math. **56** (2009) 177–195.

[5] A. Fujioka, Centroaffine minimal surfaces whose centroaffine curvature and Pick function are constants, J. Math. Anal. Appl. **365** (2010) 694-700.

[6] H. Furuhata and L. Vrancken, The center map of an affine immersion, Results Math. **49** (2006) 201-217.

[7] H. Liu and C. Wang, The centroaffine Tchebychev operator, Results Math. **27** (1995) 77–92.

[8] M. A. Magid and P. J. Ryan, Flat affine spheres in R^3, Geom. Dedicata. **33** (1990) 277–288.

[9] A. M. Mathai, A handbook of generalized special functions for statistical and physical sciences. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993.

[10] A. M. Mathai and R. K. Saxena, Generalized hypergeometric functions with applications in statistics and physical sciences. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 348. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.

[11] W. K. Schief, Hyperbolic surfaces in centro-affine geometry. Integrability and discretization, Chaos Solitons Fractals **11** (2000) 97–106.

[12] U. Simon, Local classification of two-dimensional affine spheres with constant curvature metric, Differential Geom. Appl. **1** (1991) 123–132.

[13] U. Simon, A. Schwenk-Schellschmidt and H. Viesel, Introduction to the affine differential geometry of hypersurfaces. Lecture Notes, Science University of Tokyo, 1991.

[14] G. Tzitzéica, Sur une nouvelle classe de surfaces, Rendi. Circ. Mat. Palermo **25** (1908), 180–187; **28** (1909) 210–216.

[15] L. Vrancken, Centroaffine extremal surfaces, Soochow J. Math. **30** (2004) 377–390.

[16] C. P. Wang, Centroaffine minimal hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}$, Geom. Dedicata **51** (1994) 63–74.