

複素球面内の Calabi-Yau 計量に関する 余等質性 1 の特殊 Lagrange 部分多様体の構成

橋本 要 (Kaname Hashimoto)*¹

大阪市立大学大学院理学研究科後期博士課程 3 年

1 はじめに

Stenzel [5] はコンパクト階数 1 の対称空間の余接束（接束）上にコンパクト Lie 群 G が余等質性 1 で作用することに着目し, Ricci 平坦になるための Monge-Ampère 方程式を常微分方程式に帰着させることにより完備な Calabi-Yau 計量の構成をしている. 特に, この計量は 2 次元球面の余接束 T^*S^2 の場合, Eguchi-Hanson による超 Kähler 計量に他ならない. 球面の余接束にはこの Stenzel 計量に関する特殊 Lagrange 部分多様体の構成がいくつか与えられている. Karigiannis-Min-Oo [4] は Harvery と Lawson の余接束の手法の類似として, 球面の S^n 内の austere 部分多様体の余法束が余接束 T^*S^n の特殊 Lagrange 部分多様体を構成している. Anciaux [1] は, この Stenzel 計量の対称性に着目して, 標準球面 S^n の余接束 T^*S^n 内における $SO(n)$ の作用で不変な特殊 Lagrange 部分多様体を構成した. また, Ionel-Min-Oo [3] は運動量写像を用いて T^*S^3 内においてトーラス T^2 の作用で不変な特殊 Lagrange 部分多様体を構成し, その漸近挙動を調べている.

ここでは, Ionel-Min-Oo の運動量写像を用いた手法の拡張と, Anciaux の手法の拡張して得られる球面 S^n の余接束（接束）内の余等質性 1 の特殊 Lagrange 部分多様体の構成を紹介する. このとき, 特殊 Lagrange 部分多様体になるための条件はある常微分方程式に帰着される. この常微分方程式の解を調べることによって得られる特殊 Lagrange 部分多様体の漸近の様子について紹介する. なお, 本稿の内容は, 酒井高司氏（首都大学東京）との共同研究に基づく.

2 特殊 Lagrange 部分多様体

定義 2.1. $n \geq 2$ とする. (M, J, ω) が複素 n 次元 Kähler 多様体であり, Ω が M 上の 0 にならない正則 $(n, 0)$ 形式であるとき, (M, J, ω, Ω) を概 Calabi-Yau 多様体とよぶ. さらに, Kähler 形式 ω と Ω の間に関係式

$$\frac{\omega^n}{n!} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{\sqrt{-1}}{2} \right)^n \Omega \wedge \bar{\Omega}$$

を満たすとき (M, J, ω, Ω) を Calabi-Yau 多様体という.

Riemann 多様体 M 上の閉 k 次形式 ϕ で, $T_x M$ の任意の k 次元部分空間 V について

$$\phi|_V \leq \text{vol}_V$$

*¹ h-kaname@sci.osaka-cu.ac.jp

となるとき, ϕ を M 上のキャリブレーションとよび, M の k 次元部分多様体 X で任意の $x \in X$ において $\phi|_{T_x X} = \text{vol}_V$ となるとき, X は ϕ によってキャリブレートされているという.

定義 2.2. ある定数 $\theta \in \mathbb{R}$ に対し, Calabi-Yau 多様体 (M, J, ω, Ω) 上のキャリブレーション $\text{Re}(e^{\sqrt{-1}\theta}\Omega)$ によってキャリブレートされた部分多様体を特殊 Lagrange 部分多様体とよぶ.

命題 2.3. (M, J, ω, Ω) を実 $2n$ 次元の Calabi-Yau 多様体とし, L を M の n 次元部分多様体とする. このとき, L が $\text{Re}(e^{\sqrt{-1}\theta}\Omega)$ によってキャリブレートされた特殊 Lagrange 部分多様体であるための必要十分条件は, $\omega|_L \equiv 0$, $\text{Im}(e^{\sqrt{-1}\theta}\Omega|_L) \equiv 0$ となることである.

注意 2.4. Calabi-Yau 多様体内の特殊 Lagrange 部分多様体はキャリブレートされた多様体であるため, そのホモロジー類の中で体積最小という特徴をもつ. また, 概 Calabi-Yau 多様体においても, $\omega|_L \equiv 0$, $\text{Im}(e^{\sqrt{-1}\theta}\Omega|_L) \equiv 0$ によって特殊 Lagrange 部分多様体の概念は定義できるが, この場合体積最小になるとは限らない.

3 T^*S^n 上の Stenzel 計量

次に, Stenzel 計量の構成について球面 S^n の場合を用いて簡単に述べる. n 次球面 $S^n \cong G/K = SO(n+1)/SO(n)$ の余接束を

$$T^*S^n = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1, \langle x, \xi \rangle = 0\}$$

と表す. S^n の任意の単位余接ベクトルは $SO(n+1)$ の作用で互いに移り合うので, T^*S^n には $SO(n+1)$ が余等質性 1 で作用する. $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の複素超曲面 Q^n を次のように定める.

$$Q^n = \left\{ (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n (z_i)^2 = 1 \right\}$$

T^*S^n は Q^n と写像

$$\begin{aligned} \Phi : T^*S^n &\longrightarrow Q^n \\ (x, \xi) &\longmapsto x \cosh(\|\xi\|) + \sqrt{-1} \frac{\xi}{\|\xi\|} \sinh(\|\xi\|) \end{aligned}$$

によって微分同型になる. この Q^n は等質空間として $G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ と表すことができるので複素球面と呼ぶこともある. T^*S^n と Q^n は $SO(n+1)$ の作用で同変な微分同相写像により同一視することができる. この同一視を用いて, T^*S^n の複素構造を Q^n から定めることができ, Stenzel [5] はこの複素構造に関して $Q^n \cong T^*S^n$ 上に完備な Ricci 平坦 Kähler 計量が次で与えられることを示した.

$$\omega_{Stz} = \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} u(r^2) = \sqrt{-1} \sum_{j,k=0}^n \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} u(r^2) dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

ここで, $r^2 = \|z\|^2$, u は次の常微分方程式

$$\frac{d}{d\tau} (U'(\tau))^n = nc (\sinh \tau)^{n-1} \quad (c > 0)$$

を満たす U によって $U(\tau) = u \circ \cosh(\tau)$ と表される函数とする.

また, $\mathbb{C}^{n+1}$ の標準的な $(n+1, 0)$ 形式を $\Omega_0 := dz_0 \wedge \cdots \wedge dz_n$ として,

$$\frac{1}{2}d((z_0)^2 + \cdots + (z_n)^2 - 1) \wedge \Omega_{St} = \Omega_0$$

によって Q^n 上の $(n, 0)$ 形式 Ω_{Stz} 定める. このとき, Ω_{Stz} は

$$\Omega_{Stz}(v_1, \dots, v_n) = \Omega_0(z, v_1, \dots, v_n) \quad (v_1, \dots, v_n \in T_z Q^n, z \in Q^n)$$

または,

$$\Omega_{Stz}(v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{\|z\|^2} \Omega_0(\bar{z}, v_1, \dots, v_n)$$

$$\left(v_1, \dots, v_n \in T_z Q^n, z \in Q^n, \bar{z} = \bar{z}_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + \cdots + \bar{z}_n \frac{\partial}{\partial z_n} \right)$$

と表わすことができる.

命題 3.1. $\omega_{Stz}, \Omega_{Stz}$ は共に $SO(n+1)$ の作用で不変である. さらに, ある定数 $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して $\omega_{Stz}^n = \lambda \Omega_{Stz} \wedge \bar{\Omega}_{Stz}$ となる. 従って, $(Q^n, J, \omega_{Stz}, \Omega_{Stz})$ は余等質性 1 の Calabi-Yau 多様体になる.

さらに, $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の複素錐 Q_0^n を

$$Q_0^n = \left\{ (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n (z_i)^2 = 0 \right\}$$

によって定める. Q_0^n は $\mathbb{C}^{n+1}$ の原点において唯一の特異点をもつ. このとき, $r \rightarrow \infty$ とすると, $\mathbb{C}^{n+1}$ において複素球面 Q^n は複素錐 Q_0^n に漸近する. さらに, Q_0^n 上の正則 $(n, 0)$ 形式を

$$\frac{1}{2}d((z_0)^2 + \cdots + (z_n)^2) \wedge \Omega_{cone} = \Omega_0$$

によって与える. これより, Ω_{cone} は特異点を除いたところで

$$\Omega_{cone}(v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{\|z\|^2} \Omega_0(\bar{z}, v_1, \dots, v_n)$$

と表すことができる. このとき, 複素錐 Q_0^n 上に Stenzel 計量の極限として Ricci 平坦 Kähler 計量を構成することができる.

命題 3.2. $f_{cone}(r^2) = c r^{\frac{2(n-1)}{n}}$ ($c > 0$) として,

$$\omega_{cone} = \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} f_{cone}(r^2) = \sqrt{-1} \sum_{ij=1}^n \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} f_{cone}(r^2) dz_i \wedge d\bar{z}_j$$

によって与えられる ω_{cone} は複素錐 Q_0^n 上の Ricci 平坦な Kähler 計量になる.

注意 3.3. $n = 3$ のとき, $c = \frac{3}{2}$ とすると $f_{cone}(r^2) = \frac{3}{2} r^{\frac{4}{3}}$ となり, Candelas-dela Ossa [2] が構成した Q_0^3 上の Ricci 平坦な Kähler 計量の Kähler ポテンシャルに一致する.

4 運動量写像と Lagrange 部分多様体

$SO(n+1)$ は $T^*S^n \cong Q^n$ の Calabi-Yau 構造を保ち余等質性 1 で作用する. G を $SO(n+1)$ の Lie 部分群とし, その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする. $A \in \mathfrak{g}$ による Q^n 上の基本ベクトル場を X_A と表す. G の Q^n への作用が Hamilton 作用であるから, その作用に関する運動量写像 $\mu: Q^n \rightarrow \mathfrak{g}^*$ は

$$(\mu(z))(A) = \mu_A(z) = u'(r^2)\langle Jz, Az \rangle \quad (z \in Q^n, A \in \mathfrak{g})$$

によって与えられる. $\mathfrak{g}^*$ の中心を $Z(\mathfrak{g}^*) = \{X \in \mathfrak{g}^* \mid \text{Ad}^*(g)X = X \ (\forall g \in G)\}$ によって定義する. 運動量写像 μ は G 同変であるから, μ による $c \in \mathfrak{g}^*$ の逆像 $\mu^{-1}(c)$ が G 不変であるための必要十分条件は $c \in Z(\mathfrak{g}^*)$ となることである.

命題 4.1. G を $SO(n+1)$ の連結 Lie 部分群とする. $z \in Q^n$ を通る G 軌道を $\mathcal{O} := Gz$ と表す. このとき, $\mathcal{O}$ がイソトロピックである, つまり $\omega_{Stz}|_{\mathcal{O}} \equiv 0$ となるための必要十分条件はある $c \in Z(\mathfrak{g}^*)$ について $\mathcal{O} \subset \mu^{-1}(c)$ となることである.

より一般に次が示される.

命題 4.2. シンプレクティック多様体 (M, ω) に Lie 群 G が作用し, その作用は Hamilton 作用であるとする. (M, ω) への G 作用の運動量写像を $\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ で表す. L は (M, ω) の連結なイソトロピック部分多様体で G 不変であるとする. このとき, L は $\mathfrak{g}^*$ の中心のある元 $c \in Z(\mathfrak{g}^*)$ の逆像 $\mu^{-1}(c)$ に含まれる.

また, 次も示される.

命題 4.3. シンプレクティック多様体 (M, ω) に Lie 群 G が作用し, その作用は Hamilton 作用であるとする. (M, ω) への G 作用の運動量写像を $\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ で表す. L は (M, ω) の G 不変で連結な部分多様体であり, L への G の作用は余等質性 1 であるとする. このとき, L がイソトロピックであるための必要十分条件は $\mathfrak{g}^*$ の中心のある元 $c \in Z(\mathfrak{g}^*)$ が存在して L が $\mu^{-1}(c)$ に含まれることである.

5 T^*S^n 内の余等質性 1 の特殊 Lagrange 部分多様体

ここでは, 運動量写像を用いて, $T^*S^n \cong Q^n$ 内の余等質性 1 の特殊 Lagrange 部分多様体を構成する. T^*S^n の零切断である S^n は等質な特殊 Lagrange 部分多様体であるから, S^n 内の等質超曲面は T^*S^n 内の等質なイソトロピック部分多様体になる. これを 1 次元拡張することによって, S^n 内の等質超曲面から T^*S^n 内の余等質性 1 の Lagrange 部分多様体を構成する. さらに, この Lagrange 部分多様体が特殊 Lagrange 部分多様体になるための条件を与える.

$SO(n+1)$ の部分群で S^n へ作用させたとき $(n-1)$ 次元の軌道が現れるものとして

$$G = \begin{pmatrix} SO(p) & 0 \\ 0 & SO(q) \end{pmatrix} \cong SO(p) \times SO(q) \quad (p+q = n+1, 1 \leq p \leq q \leq n)$$

を考える. (i, j) 成分が 1 でその他の成分がすべて 0 である $(n+1) \times (n+1)$ 行列を E_{ij} と表し,

$$X_{ij} = E_{ji} - E_{ij} \in \mathfrak{so}(n+1)$$

と定める. このとき

$$\{X_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq p\} \cup \{X_{ij} \mid p+1 \leq i < j \leq n+1\}$$

は G の Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(p) \oplus \mathfrak{so}(q)$ の基底になる. この基底の双対基底を $\{\theta_{ij}\}$ とすると, Q^n への G 作用の運動量写像 $\mu: Q^n \rightarrow \mathfrak{g}^*$ は

$$\mu(z) = \sum_{i,j} \mu_{ij}(z) \theta_{ij}$$

と表される. ここで, μ_{ij} は $\mu_{ij}(z) := \mu_{X_{ij}}(z) = (\mu(z))(X_{ij})$ によって定義される Q^n 上の関数である. このとき, Q^n への G 作用の運動量写像 $\mu: Q^n \rightarrow \mathfrak{g}^*$ は

$$\mu(z) = u'(r^2) \left(\text{Im}(z_i \bar{z}_j)_{1 \leq i < j \leq p}, \text{Im}(z_i \bar{z}_j)_{p+1 \leq i < j \leq n+1} \right)$$

と $\{\theta_{ij}\}$ を基底とする成分で表示される.

命題 4.3 より, Q^n 内の G の作用で不変な Lagrange 部分多様体は $\mathfrak{g}^*$ の中心のある元の運動量写像 μ による逆像に含まれることがわかる. $p=2$ の場合は $SO(2)$ が可換であるから, $\mathfrak{g}^*$ は非自明な中心を持つ. また, $p=1$ の場合は G を零切断に作用させたときの軌道が主曲率 1 個の等質超曲面となるため, G 作用の軌道空間が異なる. したがって, $n \geq 3$ とし, 次の 4 つの場合に分けて考察する.

$$(1) 3 \leq p \leq q, \quad (2) p=1, q \geq 3, \quad (3) p=2, q \geq 3, \quad (4) p=q=2$$

$p=1$ の場合は Anciaux [1] が構成した $SO(n)$ の作用で不変な特殊 Lagrange 部分多様体を得られる. また, $n=3$ の場合は Ionel-Min-Oo [3] によって調べられている.

(1) $3 \leq p \leq q$ の場合について考察する. なお, 他の場合も同様に考察することができる. $\mu^{-1}(0)$ の G 作用の軌道空間を考える. このとき, G の作用によって, $x = (\cos t, 0, \dots, 0, \sin t, 0, \dots, 0)$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$), $\rho = \|\xi\|$ に帰着させることができる. いま, $\mathfrak{g}^*$ の中心は $Z(\mathfrak{g}^*) = \{0\}$ である. $\Phi(\Sigma) \subset Q^n$ の中で $\mu^{-1}(0)$ に含まれる部分集合 $\mu^{-1}(0) \cap \Phi(\Sigma)$ を求めると,

$$\begin{aligned} & \mu^{-1}(0) \cap \Phi(\Sigma) \\ &= \left\{ (\cos \tau, 0, \dots, 0, \sin \tau, 0, \dots, 0) \mid \tau = t + \sqrt{-1}\xi_1, 0 < t < \frac{\pi}{2}, \xi_1 \in \mathbb{R} \right\} \\ & \cup \left\{ (\cos \tau, 0, \dots, 0, \sin \tau, 0, \dots, 0) \mid \tau = 0 + \sqrt{-1}\xi_1, \xi_1 \geq 0 \right\} \\ & \cup \left\{ (\cos \tau, 0, \dots, 0, \sin \tau, 0, \dots, 0) \mid \tau = \frac{\pi}{2} + \sqrt{-1}\xi_1, \xi_1 \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

となる. μ は G 不変であるから

$$\mu^{-1}(0) = G \cdot (\mu^{-1}(0) \cap \Phi(\Sigma))$$

となり, $\mu^{-1}(0) \cap \Phi(\Sigma)$ は $\mu^{-1}(0)$ への G 作用の軌道空間と同一視することができる.

定理 5.1. 複素平面 $\mathbb{C}$ 内の曲線を $\tau(s)$ として, $\mu^{-1}(0) \cap \Phi(\Sigma)$ 内の曲線 $\sigma(s)$ を

$$\sigma(s) = (\cos \tau(s), 0, \dots, 0, \sin \tau(s), 0, \dots, 0)$$

によって定める. このとき軌道空間 $L = G \cdot \sigma(s)$ は Q^n 内の Lagrange 部分多様体になる. さらに, $\tau(s)$ が

$$\operatorname{Im} \left(e^{\sqrt{-1}\theta} \tau'(s) (\cos \tau(s))^{p-1} (\sin \tau(s))^{q-1} \right) = 0$$

を満たすとき L が Q^n の特殊 Lagrange 部分多様体になる.

曲線 $\tau(s)$ を与えたとき, L は次の写像 Ψ の像として得られる.

$$\begin{aligned} \Psi : I \times S^{p-1} \times S^{q-1} &\longrightarrow Q^n \\ (s, x, y) &\longmapsto \left(\cos \tau(s)x_1, \dots, \cos \tau(s)x_p, \sin \tau(s)y_1, \dots, \sin \tau(s)y_q \right) \end{aligned}$$

ここで, I は $\mathbb{R}$ の開区間である. 曲線 $\tau(s)$ が $0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$ を通るとき, 写像 Ψ は退化し, L は特異点をもつ. $\tau(s)$ が $0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$ を通らないならば, L は $I \times S^{p-1} \times S^{q-1}$ に微分同型であり, Ψ によって Q^n に埋め込まれている.

さらに, $\gamma(s) = \cos \tau(s)$ によって $\mathbb{C}$ 内の曲線 $\gamma(s)$ を定め,

$$\begin{aligned} \Psi : I \times S^{p-1} \times S^{q-1} &\longrightarrow Q^n \\ (s, x, y) &\longmapsto \left(\gamma(s)x_1, \dots, \gamma(s)x_p, \sqrt{1-\gamma(s)^2}y_1, \dots, \sqrt{1-\gamma(s)^2}y_q \right) \end{aligned}$$

と表す. ここで, $\gamma(s)$ は複素数であるから $\sqrt{1-\gamma(s)^2}$ は $\pm$ の不定性があるが, 球面 S^{q-1} の対称性により, 像は well-defined になる. このとき, L が Q^n の特殊 Lagrange 部分多様体になるために $\gamma(s)$ が満たすべき常微分方程式は

$$\operatorname{Im} \left(e^{\sqrt{-1}\theta} \gamma'(s) \gamma(s)^{p-1} (1 - \gamma(s)^2)^{\frac{q-2}{2}} \right) = 0 \quad (5.1)$$

となる.

6 解曲線

前節で構成した Q^n 内の特殊 Lagrange 部分多様体は位相的には $\mathbb{R} \times S^{p-1} \times S^{q-1}$ と同型である. 常微分方程式 (5.1) の解を解析することによってこれらの特殊 Lagrange 部分多様体の特異集合およびエンドの漸近的挙動について (1) $3 \leq p \leq q$ の場合について考察すると次のことがわかる. 他の場合も同様に考察することができる.

定理 6.1. $3 \leq p \leq q$ のとき, (5.1) は 0 および ± 1 において特異点を持つ. さらに, $\theta = 0$ のとき線分 $[-1, 0]$ と $[0, 1]$ は自明な解となり, これらに対応する特殊 Lagrange 部分多様体は T^*S^n の零切断 S^n となる. また, γ が $\pm\infty, 0, \pm 1$ に近づくとき (5.1) の解は次のように振舞い, それに伴う L の挙動は次のようになる.

- $|\gamma| \rightarrow \infty$ のとき, (5.1) の解は $2n - 2$ 本の半直線に漸近する. これに伴い, L のエンドは複素錐 Q_0^n 内の特殊 Lagrange 錐に漸近する.
- (5.1) の解は 0 において $2p$ 本の解に分岐する. このとき, p 個の特殊 Lagrange 部分多様体が T^*S^n の零切断 S^n の全測地的 S^{q-1} を特異集合として交わる.
- (5.1) の解は ± 1 において q 本の解に分岐する. このとき, q 個の特殊 Lagrange 部分多様体が T^*S^n の零切断 S^n の全測地的 S^{p-1} を特異集合として交わる.

以下, (1), (2), (3), (4) の場合について具体的な例で解の相空間をあらわす. 図の解曲線それぞれが特殊 Lagrange 部分多様体に対応している.

$n = 4, p = 1, q = 4$ の場合

このとき特殊 Lagrange 部分多様体になるために満たすべき常微分方程式は

$$\operatorname{Im}\left(e^{\sqrt{-1}\theta}\gamma'(s)(1-\gamma(s)^2)\right) = 0$$

となる. このとき ± 1 において特異点を持つ. さらに, $\theta = 0$ のとき線分 $[-1, 1]$ は自明な解となり, これらに対応する特殊 Lagrange 部分多様体は T^*S^n の零切断として得られる球面である.

- $|\gamma| \rightarrow \infty$ のとき, 解は 6 本の半直線に漸近し, これらは複素錐 Q_0^n 内の特殊 Lagrange 錐に対応している.
- $\gamma \rightarrow \pm 1$ でそれぞれ 4 本の解に分岐していることがわかる.

さらに位相 θ のずれをみるために $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ とすると次のような解曲線の相空間の変形がみてとれる.

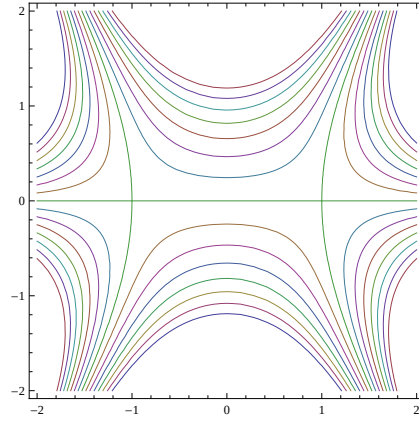


図 1 $\theta = 0$

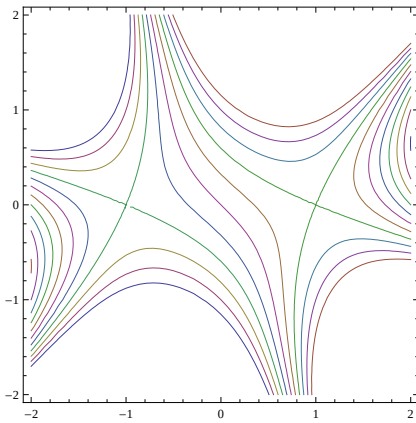


図 2 $\theta = \frac{\pi}{4}$

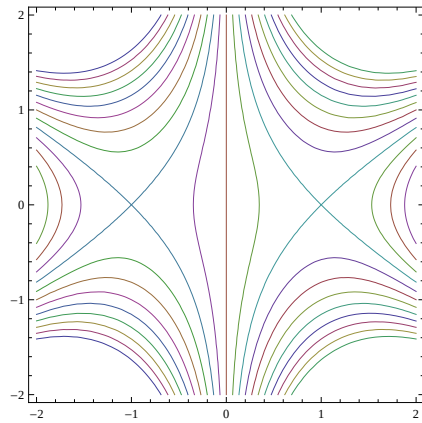


図 3 $\theta = \frac{\pi}{2}$

$n = 3, p = 2, q = 2$ の場合

このときの特特殊 Lagrange 部分多様体になるための満たすべき常微分方程式は

$$\operatorname{Im}\left(e^{\sqrt{-1}\theta}\gamma'(s)\gamma(s)\right) = 0$$

となる. この場合, $p = 2$ であるから, 0 において特異点を持つ. さらに, $\theta = 0$ のとき線分 $[-1, 0]$, $[0, 1]$ は自明な解となり, これらに対応する特特殊 Lagrange 部分多様体は T^*S^n の零切断として得られる球面である.

- $|\gamma| \rightarrow \infty$ のとき 解は 4 本の半直線に漸近し, これらは複素錐 Q_0^n 内の特特殊 Lagrange 錐に対応している.
 - $\gamma \rightarrow 0$ のとき 4 本の解に分岐しており, $\gamma \rightarrow \pm 1$ において 2 本の解に分岐している.
- さらに $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ とすると次のような解曲線の相空間の変形がみてとれる.

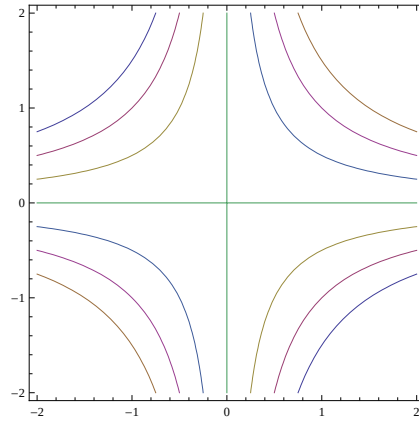


図 4 $\theta = 0$

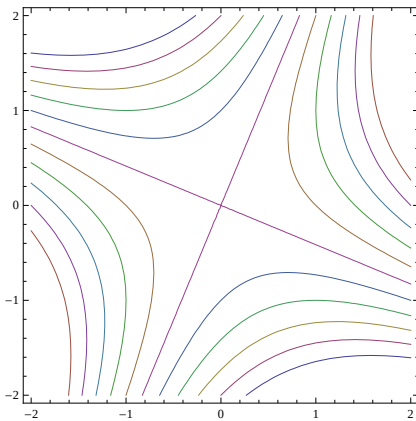


図 5 $\theta = \frac{\pi}{4}$

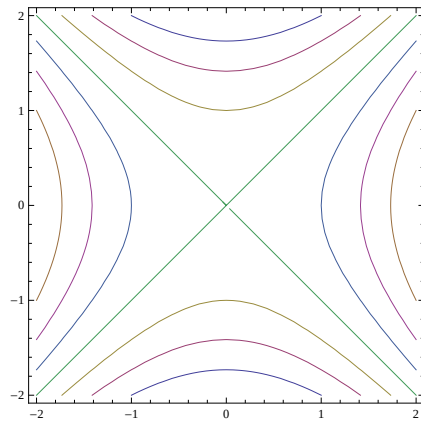


図 6 $\theta = \frac{\pi}{2}$

$n = 4, p = 2, q = 3$ の場合

このとき特殊 Lagrange 部分多様体になるために満たすべき常微分方程式は

$$\operatorname{Im}\left(e^{\sqrt{-1}\theta}\gamma'(s)\gamma(s)(1-\gamma(s)^2)^{\frac{1}{2}}\right) = 0$$

となる. このとき $0, \pm 1$ において特異点を持つ. さらに, $\theta = 0$ のとき線分 $[-1, 0], [0, 1]$ は自明な解となり, これらに対応する特殊 Lagrange 部分多様体は T^*S^n の零切断として得られる球面である.

- $|\gamma| \rightarrow \infty$ のとき, 解は 5 本の半直線に漸近する. これらは複素錐 Q_0^n 内の特殊 Lagrange 錐に対応している.
 - $\gamma \rightarrow 0$ のとき, 0 で 4 本の解に分岐しており, $\gamma \rightarrow \pm 1$ でそれぞれ 3 本の解に分岐している.
- さらに $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ とすると次のような解曲線の相空間の変形がみてとれる.

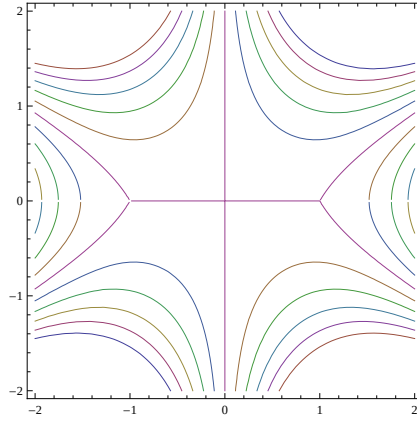


図 7 $\theta = 0$

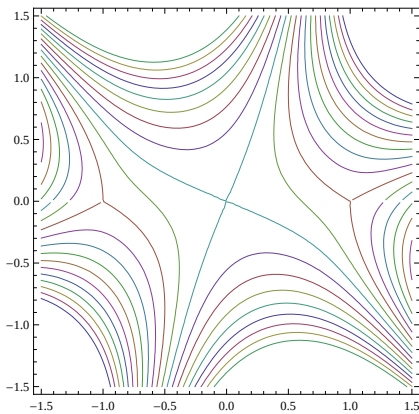


図 8 $\theta = \frac{\pi}{4}$

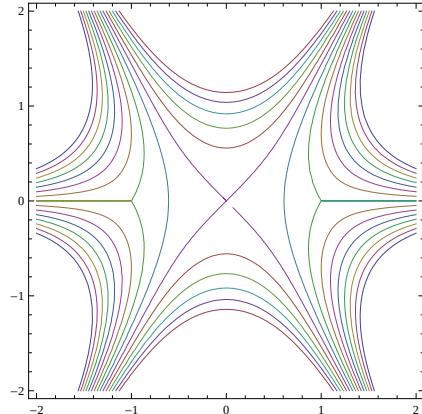


図 9 $\theta = \frac{\pi}{2}$

$n = 8, p = 3, q = 6$ の場合

このとき特殊 Lagrange 部分多様体になるために満たすべき常微分方程式は

$$\operatorname{Im}\left(e^{\sqrt{-1}\theta}\gamma'(s)\gamma(s)^2(1-\gamma(s)^2)^3\right) = 0$$

となる. このとき $0, \pm 1$ において特異点を持つ. さらに, $\theta = 0$ のとき線分 $[-1, 0]$ と $[0, 1]$ は自明な解となり, これらに対応する特殊 Lagrange 部分多様体は T^*S^n の零切断として得られる球面である.

- $|\gamma| \rightarrow \infty$ のとき, 解は 14 本の半直線に漸近する. これらは複素錐 Q_0^n 内の特殊 Lagrange 錐に対応している.
 - $\gamma \rightarrow 0$ のとき, 0 で 6 本の解に分岐しており, ± 1 でそれぞれ 6 本の解に分岐している.
- さらに $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ とすると次のような解曲線の相空間の変形がみてとれる.

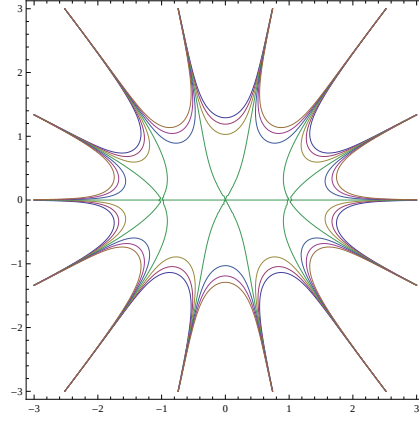


図 10 $\theta = 0$

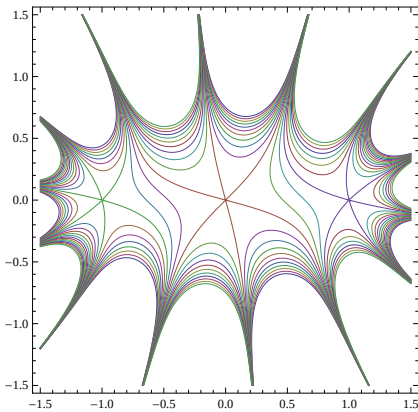


図 11 $\theta = \frac{\pi}{4}$

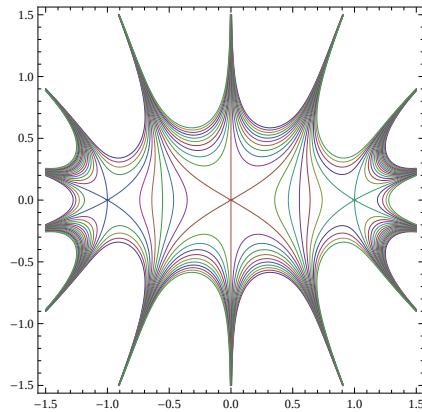


図 12 $\theta = \frac{\pi}{2}$

参考文献

- [1] H. Anciaux: *Special Lagrangian submanifolds in the complex sphere*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **16** (2007), no. 2, 215–227.
- [2] P. Candelas and X. de la Ossa: *Comments on conifolds*, Nuclear Physics B342 (1990), 246–268.
- [3] M. Ionel, M. Min-Oo: *Cohomogeneity one special Lagrangian 3-folds in the deformed and the resolved conifolds*, Illinois J. Math. **52** (2008), no. 3, 839–865.
- [4] S. Karigiannis and M. Min-Oo: *Calibrated subbundles in noncompact manifolds of special holonomy*, Ann. Global Anal. Geom. **28** (2005), no. 4, 371–394.
- [5] M. Stenzel: *Ricci-flat metrics on the complexification of a compact rank one symmetric space*, Manuscripta Math. **80** (1993), no. 2, 151–163.