

ガウス曲率一定の円柱面について

弘前大学 理工学研究科

小林 真平 shimpei@cc.hirosaki-u.ac.jp

概要

三次元ユークリッド空間のガウス曲率一定曲面 ($K \neq 0$) が随伴族をもち、それらの曲面が可積分系の手法を用いて表現される事は良く知られている。本報告では、同変なガウス曲率一定円柱面の場合の分類について述べる。複素化と実形の手法を用いて、統一的にそれらを説明する。これらの結果は Nick Schmitt 氏 (Tübingen 大学) との共同研究で得られたものである [6].

序

三次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 のガウス曲率一定曲面 $K \neq 0$ (以下 CGC と略記) の構造方程式は可積分な非線形偏微分方程式である事はよく知られている [1]. 特に正一定の場合は、双曲的サイン・ゴルドン, 負一定の場合はサイン・ゴルドンと呼ばれる可積分系となる。この事は幾何学的には \mathbb{R}^3 の CGC 曲面が一径数族, “同伴族” を持つという事から導かれる。この同伴族はスペクトル径数とも呼ばれ, サイン・ゴルドン, 双曲的サイン・ゴルドン方程式を可積分系として特徴付けるものとして重要である。

\mathbb{R}^3 の CGC 曲面の中で一番簡単な曲面は回転面であり, この場合構造方程式は常微分方程式となり, 楕円関数を用いて解く事ができる。得られた曲面の随伴族は同変 CGC 曲面をなす。逆に同変 CGC 曲面はすべてこの様にして得られる。興味深い事に回転面でない同変 CGC 曲面の随伴族の中で位相的に円柱になるものが存在する事が知られている, 図 2, [2].

ここでは, 同変 CGC 曲面のモデュライ空間を記述し, すべての位相的に円柱面になる同変 CGC 曲面が特徴づけられたを報告する。詳しくは論文 [6] を見ていただきたい。正, 負の場合を統一的, 効率良く表す為に \mathbb{C}^3 内の複素 CGC 曲面の理論を用いた [4]. 特にここで用いた手法は, 可積分系の理論のスペクトル曲線の変形理論と対応している。実際, 位相的な同変 CGC 円柱面を特徴付ける為に, 勾配流を記述する事を行っている。驚くべき事に, この勾配流は, 非常に綺麗な形になり (楕円積分を係数とする多項式) その事によって, 特徴づけが得られる。

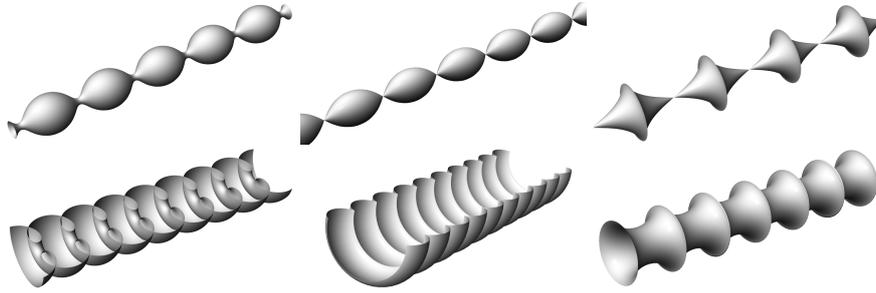


図 1: CGC 回転面. 左の図は, 正の場合の平行曲面として得られる平均曲率一定回転面 (ダラナーアンデュロイド (上) とノドイド (下)), 中の図は, その平行正 CGC 回転面. 右の図は負 CGC 回転面, ミンディング曲面と呼ばれる.

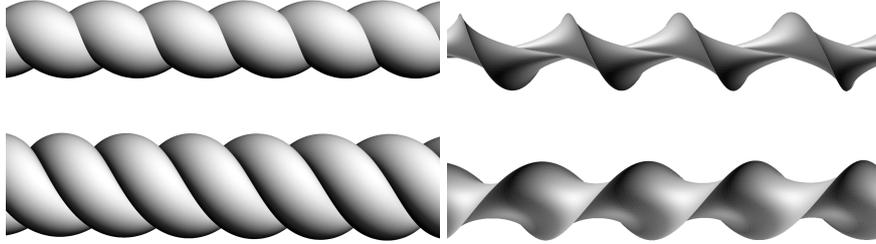


図 2: 回転面でない位相的な円柱面 (螺旋対称性を持つ). ダラナー・ツイズラー (左上), 正 CGC ツィズラー (左下) とミンディング・ツイズラー (右).

1 複素 CGC はめ込み

\mathbb{D} を \mathbb{C}^2 の領域として, f を \mathbb{D} から \mathbb{C}^3 への正則はめ込みとする. \mathbb{C}^3 には, 複素双線形形式 $\langle -, - \rangle$ によって, 複素計量を入れておく. f によって引き戻した誘導計量は, ある特別な座標系 $(z, w) \in \tilde{\mathbb{D}} \subset \mathbb{D}$ (ナル座標) が存在して

$$g = e^u dzdw,$$

と書ける. ここで $u = u(z, w)$ は $\tilde{\mathbb{D}}$ 上の正則関数.

第二基本形式 II は $II := -\langle df, dN \rangle$ で定義され,

$$II = Qdz^2 + e^u Hdzdw + Rdw^2 \quad (1.1)$$

と表現できる. ここで, N は f に対する単位法ベクトル場, $Q = \langle f_{zz}, N \rangle$, $R = \langle f_{ww}, N \rangle$, $H = 2e^{-u} \langle f_{zw}, N \rangle$. $K = \det(g^{-1}II)$ を複素ガウス曲率と定義する. 曲面 f の構造方程式は, 次の様に与えられる.

$$u_{zw} - 2RQe^{-u} + \frac{1}{2}H^2e^u = 0, \quad (1.2)$$

$$Q_w - \frac{1}{2}H_z e^u = 0, \quad R_z - \frac{1}{2}H_w e^u = 0. \quad (1.3)$$

複素ガウス曲率 K が零でない一定の曲面を**ガウス曲率一定 (CGC) 曲面**と言ひ, f_K で表す.

良く知られている様に, f_K の構造方程式は $Q \rightarrow \lambda^{-2}Q$ と $R \rightarrow \lambda^2R$, $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ で不変である. 従って, f_K は随伴族 $f_{K,\lambda}$ を持つ. この $f_{K,\lambda}$ に大して, 動標構の族 $F: \mathbb{D} \rightarrow \mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ が存在して次が成立する [4]:

$$\alpha = F^{-1}dF = F^{-1}F_z dz + F^{-1}F_w dw = Udz + Vdw, \quad (1.4)$$

ここで

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}u_z & -\frac{1}{2}\lambda^{-1}He^{u/2} \\ Qe^{-u/2} & -\frac{1}{4}u_z \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}u_w & -Re^{-u/2} \\ \frac{1}{2}\lambda He^{u/2} & \frac{1}{4}u_w \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

u, Q, R と H は (1.1) で定義されている. $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ を滑らかな写像 $g: S^1 \rightarrow \mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ のなす群とすると (1.4) で定義される F は $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ の元である. F の事を f_K の**拡張動標構**と呼ぶ.

2 同変 CGC 円柱面

天下りであるが, まず定義を与える.

定義 1. G/K を等質空間とする. $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ から G/K への正則写像 ϕ が \mathbb{C} -同変とは, $\xi \in \mathrm{Lie}(G)$ と $\tilde{\phi}: \mathbb{C} \rightarrow G/K$ が存在して, $\phi(x, y) = \exp(y\xi)\tilde{\phi}(x)$ が成立する事である.

f_K を複素 CGC はめ込みとし, F をその拡張動標構とする. $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ を次で定める.

$$(z, w) = (x + iy, x - iy),$$

ここで (z, w) は f_K のナル座標. 拡張動標構 F が同変であるとしよう. つまり

$$F(x, y) = \exp\left(\frac{1}{2}\chi ye_1\right)g(x), \quad (2.1)$$

が成立するとする. ここで $\chi = \sqrt{a\lambda + b\lambda^{-1} + c}$ をとし, e_1 は $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ の基底, $g(x) \in \mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ は y に依存しない. f_K の単位法ベクトル場 N は F を用いて $N = \frac{1}{2}Fe_1F^{-1}$ と表され, $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}/K$ への同変写像である, ここで $K = \{\mathrm{diag}(a, a^{-1}) \mid a \in \mathbb{C}^\times\}$.

逆にすべての $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}/K$ への同変写像の拡張動標構 F は, 初期値の任意性を除いて (2.1) で与えられる事が知られている [2, 定理 3.4]. 複素 CGC はめ込みの単位法ベクトル場が同変である時, **複素同変 CGC はめ込み**と呼ぶ.

$v = e^{u/2}$ とおいて, 計算すると U と V は

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}v^{-1}v_x & -\frac{1}{2}\lambda^{-1}Hv \\ Qv^{-1} & -\frac{1}{4}v^{-1}v_x \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}v^{-1}v_x & -Rv^{-1} \\ \frac{1}{2}\lambda Hv & \frac{1}{4}v^{-1}v_x \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

となる. ここで v は x にしかよらない事に注意する. また Q, R は定数となる. 構造方程式 (正確にはその積分) は,

$$(v^{-1}v_x)^2 + H^2v^2 + 4QRv^{-2} - 2\lambda HR - 2\lambda^{-1}HQ = \chi^2. \quad (2.3)$$

であり, ここで χ^2 は

$$\chi^2 = -2\lambda HR - 2\lambda^{-1}HQ + 2c \quad (2.4)$$

である. この方程式の微分は, ガウス方程式 (1.2) であり, 実際

$$(v^{-1}v_x)_x + H^2v^2 - 4QRv^{-2} = 0 \quad (2.5)$$

となる.

注意 2.1. 今まで, すべて複素 CGC はめ込みについての話をしてきたが, 実形を適切に取る事によって, すべての話は次元ユークリッド空間の CGC 曲面の話と考える事ができる [5].

2.1 ガウス方程式の解

ここでは, 方程式 (2.3) を (2.5) の条件の下で解く事にする. (ある種の曲面を実現できない解を除く為, (2.3) の微分である (2.5) は無視できない.) 一般性を失わずに H, Q, R, c は次で与えられるとして良い.

$$(H, Q, R, c) = (\epsilon, \epsilon\delta^2/2, \epsilon\delta^2/2, (\epsilon\delta)^2(r + r^{-1})/2), \quad (2.6)$$

ここで $\epsilon, \delta^2 \in \{1, i\}, r \in \mathbb{C}^\times$.

命題 2.2. F を拡張動標構とし, H, Q, R, c を (2.6) で与えられるとする. この時方程式 (2.3) の解は条件 (2.5) の下でヤコビの楕円関数 $\text{sn}(x, m)$ [3, 18 ページ] を用いて次の様に表現される.

$$v = \delta\sqrt{r} \text{sn}(i\epsilon\delta\sqrt{r^{-1}}x, r). \quad (2.7)$$

さらに,

1. もし $\epsilon = \delta = 1, x, y \in \mathbb{R}, \lambda \in S^1, r \in \mathbb{R}^+$ であつ初期条件を適切に選べば, 対応する曲面は \mathbb{R}^3 の同変正 CGC 曲面である.
2. もし $\epsilon = \delta = 1, x, iy \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{R}^- \cup S^1$ であつ初期条件を適切に選べば, 対応する曲面は \mathbb{R}^3 の同変負 CGC 曲面である.

ミンディンク, $\lambda = 1, v \in S^1, \chi \in \mathbb{R}$		ダラナー, $\lambda = \pm 1, v \in \mathbb{R}^+, \chi \in i\mathbb{R}$	
直線	$r = 1$	円柱面 $\lambda = \pm 1$	$r = 1$
チューブ型	$r \in S^1 \setminus \{\pm 1\}$	アンデュロイド $\lambda = -1$	$r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
擬球または直線	$r = -1$	ノドイド $\lambda = 1$	$r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
コニカル型	$r \in \mathbb{R}^- \setminus \{-1\}$		

表 1: ミンディンクとダラナー曲面. (負 CGC 回転面と正 CGC 回転面の平行曲面.)

2.2 同変 CGC 円柱面の勾配流

この節では, 同変 CGC 曲面が位相的に円柱面になる必要十分条件を与える.

$(H, Q, R, c) = (\epsilon, \epsilon\delta^2/2, \epsilon\delta^2/2, (\epsilon\delta)^2(r+r^{-1})/2)$ とし, χ^2 を (2.4) で定義されるものとし, さらに v を (2.7) の解とする. ω を

$$\omega = \int_0^\rho \left(\frac{2R}{-\lambda^{-1}Hv^2(t) + 2R} - \frac{2Q}{-\lambda Hv^2(t) + 2Q} \right) dt, \quad (2.8)$$

で定義する. ここで ρ は v の基本周期とする. この時次が成立する.

命題 2.3. f_K を (r, λ) で径数付けされる複素同変 CGC はめ込みとする. ψ を次で定義する.

$$\psi(r, \lambda) = \frac{i\chi^2(r, \lambda)\omega'(r, \lambda)}{\chi'(r, \lambda)}, \quad (2.9)$$

ここで ω は (2.8) 定義される関数で \prime は λ での微分とする. この時 f_K がある $(r_0, \lambda_0) \in \mathbb{C}^2$ に対して位相的に円柱面である必要十分条件は次で与えられる.

$$\frac{\psi(r_0, \lambda_0)}{\pi} \in \mathbb{Q}.$$

この命題により, 位相的に円柱面であるかどうかは, ψ/π の有理性を調べれば良い事となる. ψ の等位面は次の勾配流で与えられる.

$$(\dot{r}, \dot{\lambda}) = \left(-\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}, \frac{\partial\psi}{\partial r} \right), \quad (2.10)$$

ここで \cdot は流れの径数での微分を表す. 方程式 (2.10) を **勾配流方程式** と呼ぼう.

2.3 同変 CGC 円柱面のモデュライ空間

この節では, 勾配流方程式 (2.10) を具体的に書き下そう.

最初に第一種, 第二種, 第三種完全楕円積分についての復習をしよう [3, 9–10 ページ]:

$$\begin{aligned} K(k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(t)}}, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2(t)} dt, \\ \Pi(\alpha^2, k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(1-\alpha^2 \sin^2(t))\sqrt{1-k^2 \sin^2(t)}} = \int_0^{K(k)} \frac{dt}{1-\alpha^2 \operatorname{sn}^2(t, k)}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

ここで $\operatorname{sn}(t, k)$ は母数 k のヤコビの楕円関数. ρ_1 と ρ_2 を

$$\rho_1 = (i\epsilon\delta)^{-1} \sqrt{r} K(r), \quad \rho_2 = (i\epsilon\delta)^{-1} \sqrt{r^{-1}} K(r^{-1}) \quad (2.12)$$

とする. この時 $4\rho_1$ は $4\rho_2$ は方程式 (2.7) の v の周期となる. $2(\rho_1 \pm \rho_2)$ が周期格子になる事に注意する. ω_1 と ω_2 を (2.8) で定義される ω であって, ρ を ρ_1 と ρ_2 で置き換えたものとする. この時 ω_1 は次の様に計算される.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \int_0^{\rho_1} \left(\frac{2R}{-H\lambda^{-1}v^2(t) + 2R} - \frac{2Q}{-H\lambda v^2(t) + 2Q} \right) dt, \\ &= (i\epsilon\delta)^{-1} \sqrt{r} (\Pi(\lambda^{-1}r, r) - \Pi(\lambda r, r)). \end{aligned} \quad (2.13)$$

同様にして ω_2 は

$$\omega_2 = (i\epsilon\delta)^{-1} \sqrt{r^{-1}} (\Pi(\lambda^{-1}r^{-1}, r^{-1}) - \Pi(\lambda r^{-1}, r^{-1})) \quad (2.14)$$

となる. この時 (2.9) の ψ は次の様に計算できる.

命題 2.4. ψ_1 と ψ_2 を (2.9) の ψ であって ω を ω_1 と ω_2 に置き換えたものとする. この時 ψ_1 と ψ_2 は完全楕円積分 (2.11) を用いて次の様に計算される

$$\psi_j(r, \lambda) = i\chi(r, \lambda) \left(\frac{\lambda + \lambda^{-1}}{\lambda - \lambda^{-1}} \rho_j(r) - \frac{2}{\lambda - \lambda^{-1}} J_j(r) - \omega_j(r, \lambda) \right), \quad (2.15)$$

ここで

$$J_1(r) = (i\epsilon\delta)^{-1} \sqrt{r^{-1}} (K(r) - E(r)), \quad (2.16)$$

$$J_2(r) = (i\epsilon\delta)^{-1} \sqrt{r} (K(r^{-1}) - E(r^{-1})). \quad (2.17)$$

さらに $\psi_2(r, \lambda) = \psi_1(r^{-1}, \lambda)$ が成立する.

それでは, 勾配流方程式 (2.10) を座標

$$(p, q) = \left(\frac{r + r^{-1}}{2}, \frac{\lambda + \lambda^{-1}}{2} \right). \quad (2.18)$$

を用いて計算しよう. a_1, a_2 を整数とし ρ と β を次で定める.

$$\rho = a_1 \rho_1 + a_2 \rho_2, \quad \beta = \frac{a_1 J_1 + a_2 J_2}{\rho}.$$

β は p にしかよらない事に注意する. 長い計算の後, 次の定理が示される.

定理 2.5. 複素同変 CGC はめ込みに対する勾配流方程式 (2.10) は座標 (p, q) の下で次の様に表される :

$$(\dot{p}, \dot{q}) = ((1-p^2)(1-q\beta), (1-q^2)(1-p\beta)). \quad (2.19)$$

三次元ユークリッド空間の場合はさらに次の事がわかる.

系 2.6. $\epsilon = \delta = 1$ と $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ を仮定する. この時 $(1-p^2)^{-1}$ でスケール変換した勾配流方程式 (2.19) は

$$(\dot{p}, \dot{q}) = ((1-q\beta), (1-q^2)(1-p\beta)(1-p^2)^{-1}) \quad (2.20)$$

であり, 流れは $\mathbb{R}^2 \setminus \{p = -1\} \cup \{(1, 1)\}$ で正則である.

これまでの議論をまとめると次の定理が得られる.

定理 2.7. 三次元ユークリッド空間の同変 CGC 曲面のモデュライ空間は次の D_1 (ガウス曲率正の場合) と D_2 (ガウス曲率負の場合) である :

$$D_1 = \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq p < \infty, -1 \leq q \leq 1\},$$

$$D_2 = \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < p \leq 1, 1 \leq q < \infty\}.$$

勾配流方程式 (2.20) の中の位相的円柱面を定める流れは正則となり, D_1, D_2 の稠密な部分集合を与える. 特にガウス曲率正の場合, 位相的円柱面は退化した曲面である直線の同伴族からすべて得られる.

参考文献

- [1] A. I. Bobenko, *Surfaces in terms of 2 by 2 matrices. Old and new integrable cases*, Harmonic maps and integrable systems, Aspects Math., E23, Vieweg, Braunschweig, 1994, pp. 83–127. MR MR1264183
- [2] F. E. Burstall and M. Kilian, *Equivariant harmonic cylinders*, Q. J. Math. **57** (2006), no. 4, 449–468. MR MR2277594 (2007j:53067)
- [3] P. F. Byrd and M. D. Friedman, *Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 67, Springer-Verlag, New York, 1971, Second edition, revised. MR MR0277773 (43 #3506)
- [4] J. Dorfmeister, S.-P. Kobayashi, and F. Pedit, *Complex surfaces of constant mean curvature fibered by minimal surfaces*, Hokkaido Math. J. **39** (2010), no. 1, 1–55.

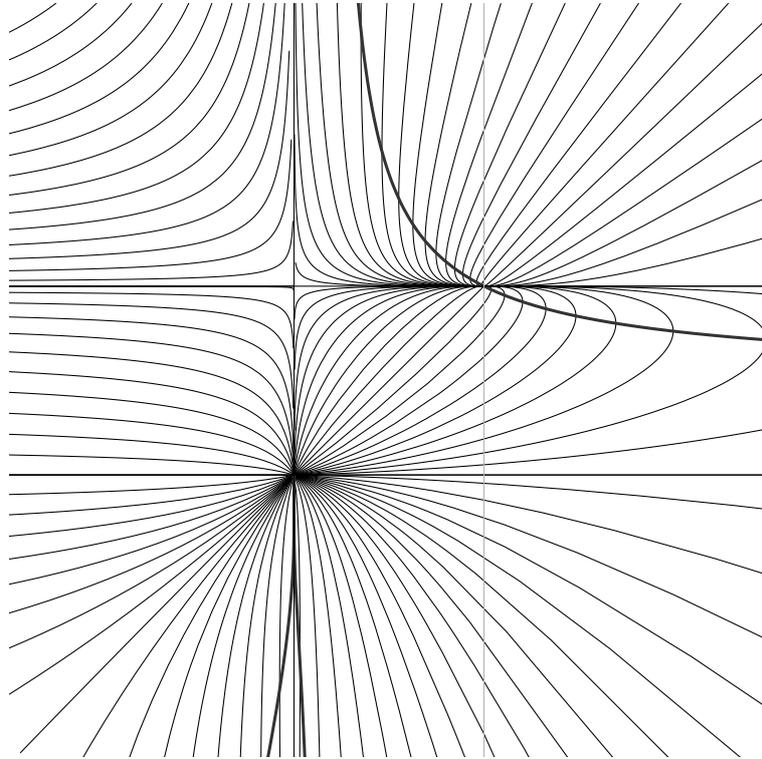


図 3: 同変ガウス曲率一定曲面のモデュライ空間 $((p, q)$ 座標で表示している)。位相的に円柱面である曲面を実線であらわしており、それらはモデュライ空間を稠密に埋め尽くしている。 (p, q) 平面は直線 $p = \pm 1$ と $q = \pm 1$ によって 9 つの領域に分割されている。中心の右の領域 $(p, q) \in [1, \infty) \times [-1, 1]$ は同変ガウス曲率正一定曲面をあらわし、左上の領域 $(p, q) \in (-\infty, 1] \times [1, \infty)$ は同変ガウス曲率負一定曲面をあらわしている。濃い実線で表した曲線は、 $\dot{p} = 0$ となる曲線であり、幾何学的にはフラックスが 0 となる曲面を表す。

- [5] S.-P. Kobayashi, *Real forms of complex surfaces of constant mean curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. (to appear).
- [6] S.-P. Kobayashi and N. Schmitt, *Constant mean curvature and constant Gauss curvature cylinders*, Preprint (2010).