

非平坦複素空間形内の実超曲面と概接触計量構造

前田定廣（佐賀大学大学院工学系研究科）

ABSTRACT. 非平坦な n 次元複素空間形 $\widetilde{M}_n(c)(= \mathbb{C}P^n(c), \mathbb{C}H^n(c))$ において, $\widetilde{M}_n(c)$ のケーラー構造 J とリーマン計量 g から誘導された概接触計量構造 (ϕ, ξ, η, g) に関して, $d\eta(X, Y) = \pm k \cdot g(X, \phi Y)$ for $\forall X, Y \in TM$ を満たす実超曲面 M^{2n-1} を分類する。ここで, k は正の任意定数である。その結果, そのような実超曲面は $\widetilde{M}_n(c)$ 内の等質実超曲面になることが分かった。更に本講演では, そのような等質実超曲面の幾何学的性質を調べる。

1. 序文

$\widetilde{M}_n(c)$, $n \geq 2$ を定正則断面曲率 $c(c \neq 0)$ を持つ複素 n 次元完備単連結ケーラー多様体とする。即ち, $\widetilde{M}_n(c)$ は c の正負に従って, $\mathbb{C}P^n(c)$ 又は $\mathbb{C}H^n(c)$ と正則等長同型である。 $\widetilde{M}_n(c)$ を定正則断面曲率 c を持つ非平坦複素空間形という。

本講演では, $\widetilde{M}_n(c)$ 内の実超曲面 M^{2n-1} を考察する。任意の実超曲面 M^{2n-1} は概接触計量構造 (ϕ, ξ, η, g) を持つことが知られている。よって実超曲面を接触幾何学の観点から調べることは, 自然なことである (参照: [1, 2])。そこで接触幾何学の基本的な概念に動機付けられて, $\widetilde{M}_n(c)$ 内の実超曲面 M に対して, 次のような方程式を考えてみよう。

$$(1.1) \quad d\eta(X, Y) = \pm k \cdot g(X, \phi Y) \quad \text{for } \forall X, Y \in TM,$$

ここで k は正の定数である。言うまでもなく, 方程式 (1.1) は, M の接触形式 η の外微分 $d\eta$ が, M 上 $d\eta(X, Y) = k \cdot g(X, \phi Y)$ for $\forall X, Y \in TM$ 又は $d\eta(X, Y) = -k \cdot g(X, \phi Y)$ for $\forall X, Y \in TM$ を満たすことを意味している。

本講演では, まず最初に $\widetilde{M}_n(c)$ 内の実超曲面 M^{2n-1} で方程式 (1.1) を満たすものを分類する (定理 1, 2)。これらの分類定理によるとそのような実超曲面 M は $\widetilde{M}_n(c)$ において等質的, 即ち M は外側の空間 $\widetilde{M}_n(c)$ の等長変換群 $I(\widetilde{M}_n(c))$ の適当な部分群の軌道になっている。次にこれらの実超曲面 M 上の測地線を観察することにより, 実超曲面全体の中で M を特徴付けよう (定理 3 および命題 2)。

ここで一言。非平坦複素空間形は, $d\eta = 0$ を満たす実超曲面 M を許容しない (参照: [8] の系 2. 12)。

2. 接触幾何学における基本概念

M を概接触計量構造 (ϕ, ξ, η, g) を持つ奇数次元のリーマン多様体とする。即ち, (ϕ, ξ, η, g) は M 上の $(1, 1)$ -テンソル ϕ , ベクトル場 ξ , 微分 1 形式 η とリーマン計量 g から成るもので次を満たすとする:

$$\phi^2(X) = -X + \eta(X)\xi, \quad \eta(\xi) = 1 \quad \text{かつ} \quad g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

for $\forall X, Y \in TM$. よって特に $\phi\xi = 0$ かつ $\eta(\phi(X)) = 0$ が成り立つ。このような奇数次元のリーマン多様体を 概接触計量多様体 という。概接触計量多様体 M 上で

$d\eta(X, Y) := (1/2)\{X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta([X, Y])\}$ によって定義された接触形式 η の外微分 $d\eta$ が,

$$(2.1) \quad d\eta(X, Y) = g(X, \phi Y) \quad \text{for } \forall X, Y \in TM,$$

を満たすとき, (ϕ, ξ, η, g) を M 上の 接触計量構造 という。接触計量構造を持つ概接触多様体を 接触多様体 という。接触多様体は, ケーラー幾何学におけるエルミート多様体に対応する概念である。概接触多様体 M の構造テンソル ϕ が次式を満たすとき, M を 佐々木多様体 という。

$$(2.2) \quad (\nabla_X \phi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X \quad \text{for } \forall X, Y \in TM.$$

簡単な計算より, 佐々木多様体は接触多様体であることが分かる。佐々木多様体 M 上の特性ベクトル ξ と直交する任意の単位ベクトル $u \in TM$ に対して, $K(u, \phi u) := g(R(u, \phi u)\phi u, u)$ を u 方向の ϕ -断面曲率 という。勿論ここで, R は M の曲率テンソルを表す。 ϕ -断面曲率が単位ベクトル $u(\perp \xi)$ の取り方に依存しないような佐々木多様体を 佐々木空間形 という。佐々木多様体と佐々木空間形は, ケーラー幾何学におけるケーラー多様体と複素空間形にそれぞれ対応する概念である。接触幾何学に関して更に詳しく知りたい方は, 例えば文献 [5] を参照されたい。

3. $\widetilde{M}_n(c)$ 内の実超曲面論の基礎

M^{2n-1} を $\widetilde{M}_n(c)$, $c \neq 0$ 内の局所単位法ベクトル $\mathcal{N}$ を持つ実超曲面とする。 $\widetilde{M}_n(c)$ のリーマン接続 $\widetilde{\nabla}$ と実超曲面 M のリーマン接続 ∇ は, 次の2つの公式 (ガウスの公式とワインガルテンの公式) により関係付けられる。

$$(3.1) \quad \widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(AX, Y)\mathcal{N},$$

$$(3.2) \quad \widetilde{\nabla}_X \mathcal{N} = -AX,$$

ここで X, Y は M 上の任意のベクトルであり, A は M の $\widetilde{M}_n(c)$ における型作用素である。型作用素 A の固有値と固有ベクトルを実超曲面 M の $\widetilde{M}_n(c)$ における主曲率と主曲率ベクトルとそれぞれ呼ぶ。 $V_\lambda := \{v \in TM \mid Av = \lambda v\}$ を主曲率 λ に対応する主分布という。

$\widetilde{M}_n(c)$ 内の実超曲面 M には次のようにして概接触計量構造 (ϕ, ξ, η, g) が定義されることが知られている。

$$g(\phi X, Y) = g(JX, Y), \quad \xi = -J\mathcal{N} \quad \text{かつ} \quad \eta(X) = g(\xi, X) = g(JX, \mathcal{N}).$$

(3.1), (3.2) と $\widetilde{\nabla}J = 0$ より次が成り立つ。

$$(3.3) \quad (\nabla_X \phi)Y = \eta(Y)AX - g(AX, Y)\xi,$$

$$(3.4) \quad \nabla_X \xi = \phi AX.$$

ここで $\widetilde{M}_n(c)$ 内の実超曲面 M が接触多様体であることの意味を明確にしよう。法ベクトル $\mathcal{N}$ の向きを考えると実超曲面 M には2種類の概接触計量構造 (ϕ, ξ, η, g) , $(\phi, -\xi, -\eta, g)$ が自然に導入されることに注意されたい。従って, M が接触多様体であるとは, M が (2.1) 又は $d\eta(X, Y) = -g(X, \phi Y)$ for $\forall X, Y \in TM$ を満たすと定義するのが妥当であろう。同様に, 実超曲面 M が佐々木多様体であるとは, M が (2.2) 又は $(\nabla_X \phi)Y = -g(X, Y)\xi + \eta(Y)X$ for $\forall X, Y \in TM$ を満たすと定義する。

$\widetilde{M}_n(c)$ 内の任意の実超曲面 M の曲率テンソル R は、ガウスの方程式と呼ばれる次の式によって表される。

$$\begin{aligned}
 (3.5) \quad & g(R(X, Y)Z, W) \\
 &= (c/4)\{g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W) + g(\phi Y, Z)g(\phi X, W) \\
 &\quad - g(\phi X, Z)g(\phi Y, W) - 2g(\phi X, Y)g(\phi Z, W)\} \\
 &\quad + g(AY, Z)g(AX, W) - g(AX, Z)g(AY, W).
 \end{aligned}$$

特性ベクトル ξ が主曲率ベクトルである実超曲面 M を ホップ超曲面 と呼ぶ。 $\widetilde{M}_n(c)$ 内のホップ超曲面の主曲率に関する次の性質はよく知られている。

- 補題 1. (1) ξ が主曲率ベクトルであれば、対応する主曲率 δ は局所的に定数である。
 (2) $Av = \lambda v$ かつ v が ξ に直交すれば、 $(2\lambda - \delta)A\phi v = (\delta\lambda + (c/2))\phi v$ が成り立つ。特に $c > 0$ であれば、 $A\phi v = ((\delta\lambda + (c/2))/(2\lambda - \delta))\phi v$ となる。

注意 1. $c < 0$ のとき、補題 1(2) を使う際は、2つの方程式 $2\lambda - \delta = 0$, $\delta\lambda + (c/2) = 0$ が同時に成り立つことがあることに注意されたい。実際、例えば $\mathbb{C}H^n(c)$ 内のホ口球面を取ってみるとこの実超曲面は2つの異なる主曲率 $\lambda = \sqrt{|c|}/2$, $\delta = \sqrt{|c|}$ 又は $\lambda = -\sqrt{|c|}/2$, $\delta = -\sqrt{|c|}$ を持っている。

その上、 $\widetilde{M}_n(c)$ 内の任意のケーラー部分多様体上の半径が十分小さいチューブは、必ずホップ超曲面になることが知られている。この事は非平坦複素空間形内の実超曲面論においてホップ超曲面の概念が自然であることを意味している。

$\mathbb{C}P^n(c)$ ($n \geq 2$) 内の主曲率が全てそれぞれ一定であるホップ超曲面は、局所的に次に挙げられる実超曲面のどれかと合同である (参照 [8]):

- (A₁) $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の半径 r の測地球面 $G(r)$, ここで $0 < r < \pi/\sqrt{c}$;
- (A₂) 全測地的 $\mathbb{C}P^\ell(c)$ ($1 \leq \ell \leq n-2$) 上の半径 r のチューブ, ここで $0 < r < \pi/\sqrt{c}$;
- (B) 複素2次超曲面 $\mathbb{C}Q^{n-1}$ 上の半径 r のチューブ, ここで $0 < r < \pi/(2\sqrt{c})$;
- (C) $\mathbb{C}P^1(c) \times \mathbb{C}P^{(n-1)/2}(c)$ 上の半径 r のチューブ, ここで $0 < r < \pi/(2\sqrt{c})$ であり, $n (\geq 5)$ は奇数;
- (D) 複素グラスマン $\mathbb{C}G_{2,5}$ 上の半径 r のチューブ, ここで $0 < r < \pi/(2\sqrt{c})$ であり, $n = 9$;
- (E) エルミート対称空間 $SO(10)/U(5)$ 上の半径 r のチューブ, ここで $0 < r < \pi/(2\sqrt{c})$ であり, $n = 15$.

これらの実超曲面はそれぞれ (A₁), (A₂), (B), (C), (D), (E) 型実超曲面と呼ばれている。(A₁) 型実超曲面と (A₂) 型実超曲面は、(A) 型実超曲面と総称される。これらの実超曲面の異なる主曲率の個数は、(A₁) 型から (E) 型まで順に 2, 3, 3, 5, 5, 5 と

なっている。その主曲率を表にすると以下ようになる。

	(A ₁)	(A ₂)	(B)	(C, D, E)
λ_1	$\frac{\sqrt{c}}{2} \cot(\frac{\sqrt{c}}{2} r)$	$\frac{\sqrt{c}}{2} \cot(\frac{\sqrt{c}}{2} r)$	$\frac{\sqrt{c}}{2} \cot(\frac{\sqrt{c}}{2} r - \frac{\pi}{4})$	$\frac{\sqrt{c}}{2} \cot(\frac{\sqrt{c}}{2} r - \frac{\pi}{4})$
λ_2	—	$-\frac{\sqrt{c}}{2} \tan(\frac{\sqrt{c}}{2} r)$	$\frac{\sqrt{c}}{2} \cot(\frac{\sqrt{c}}{2} r + \frac{\pi}{4})$	$\frac{\sqrt{c}}{2} \cot(\frac{\sqrt{c}}{2} r + \frac{\pi}{4})$
λ_3	—	—	—	$\frac{\sqrt{c}}{2} \cot(\frac{\sqrt{c}}{2} r)$
λ_4	—	—	—	$-\frac{\sqrt{c}}{2} \tan(\frac{\sqrt{c}}{2} r)$
δ	$\sqrt{c} \cot(\sqrt{c} r)$	$\sqrt{c} \cot(\sqrt{c} r)$	$\sqrt{c} \cot(\sqrt{c} r)$	$\sqrt{c} \cot(\sqrt{c} r)$

ここで $\mathbb{C}P^n(c)$ において、全測地的 $\mathbb{C}P^\ell(c)$ ($0 \leq \ell \leq n-1$) 上の半径 r ($0 < r < \pi/\sqrt{c}$) のチューブは、全測地的 $\mathbb{C}P^{n-\ell-1}(c)$ 上の半径 $((\pi/\sqrt{c}) - r)$ のチューブと合同であることに注意されたい。 $\mathbb{C}P^n(c)$ はコンパクトであるからこの種の双対性が成り立つわけである。

$\mathbb{C}H^n(c)$ ($n \geq 2$) 内の主曲率が全てそれぞれ一定であるホップ超曲面は、局所的に次に挙げられる実超曲面のどれかと合同である (参照 [8]):

- (A₀) $\mathbb{C}H^n(c)$ 内のホ口球面;
- (A_{1,0}) $\mathbb{C}H^n(c)$ 内の半径 r ($0 < r < \infty$) の測地球面 $G(r)$;
- (A_{1,1}) 全測地的 $\mathbb{C}H^{n-1}(c)$ 上の半径 r ($0 < r < \infty$) のチューブ;
- (A₂) 全測地的 $\mathbb{C}H^\ell(c)$ ($1 \leq \ell \leq n-2$) 上の半径 r ($0 < r < \infty$) のチューブ;
- (B) 全実全測地的 $\mathbb{R}H^n(c/4)$ 上の半径 r ($0 < r < \infty$) のチューブ。

これらの実超曲面はそれぞれ (A₀), (A₁), (A₁), (A₂), (B) 型実超曲面と呼ばれている。ここで、(A₁) 型は (A_{1,0}) 型又は (A_{1,1}) 型を意味している。(A₀) 型実超曲面、(A₁) 型実超曲面と (A₂) 型実超曲面は、(A) 型実超曲面と総称される。半径 $r = (1/\sqrt{|c|}) \log_e(2 + \sqrt{3})$ である (B) 型実超曲面の主曲率は、 $\lambda_1 = \delta = \sqrt{3}|c|/2$, $\lambda_2 = \sqrt{|c|}/(2\sqrt{3})$ となり、この特殊な半径 r に対応する (B) 型実超曲面は、主曲率2種を持つ (参照 [4])。この実超曲面を除けば、主曲率がすべてそれぞれ一定であるホップ超曲面の異なる主曲率の個数は、(A₀) 型から (B) 型まで順に 2, 2, 2, 3, 3 となっている。その主曲率を表にすると以下ようになる。

	(A ₀)	(A _{1,0})	(A _{1,1})	(A ₂)	(B)
λ_1	$\frac{\sqrt{ c }}{2}$	$\frac{\sqrt{ c }}{2} \coth(\frac{\sqrt{ c }}{2} r)$	$\frac{\sqrt{ c }}{2} \tanh(\frac{\sqrt{ c }}{2} r)$	$\frac{\sqrt{ c }}{2} \coth(\frac{\sqrt{ c }}{2} r)$	$\frac{\sqrt{ c }}{2} \coth(\frac{\sqrt{ c }}{2} r)$
λ_2	—	—	—	$\frac{\sqrt{ c }}{2} \tanh(\frac{\sqrt{ c }}{2} r)$	$\frac{\sqrt{ c }}{2} \tanh(\frac{\sqrt{ c }}{2} r)$
δ	$\sqrt{ c }$	$\sqrt{ c } \coth(\sqrt{ c } r)$	$\sqrt{ c } \coth(\sqrt{ c } r)$	$\sqrt{ c } \coth(\sqrt{ c } r)$	$\sqrt{ c } \tanh(\sqrt{ c } r)$

$\widetilde{M}_n(c)$, $c \neq 0$ は全臍的実超曲面を許容しない。これに関連して “totally η -umbilic” という概念を思い出す。 $\widetilde{M}_n(c)$, $n \geq 2$ 内の実超曲面 M が totally η -umbilic であるとは、 M の $\widetilde{M}_n(c)$ における型作用素 A が $A = \alpha I + \beta \eta \otimes \xi$ を満たしていることである。ここで、 α と β は M 上の可微分関数である。この定義は、 $Au = \alpha u$ for $\forall u(\perp \xi) \in TM$ と明らかに同値である。任意の totally η -umbilic 実超曲面は、相異

なる一定の主曲率 $\alpha, \alpha + \beta$ を持つホップ超曲面である。ここで α, β は自動的にそれぞれ定数になることに注意されたい。

$\widetilde{M}_n(c)$ 内の型作用素が $A = \alpha I + \beta \eta \otimes \xi$ となる実超曲面 M は、次の実超曲面のどれかと局所的に合同である：

- (P) $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の半径 r ($0 < r < \pi/\sqrt{c}$) の測地球面 $G(r)$, ここで $\alpha = (\sqrt{c}/2) \cot(\sqrt{c}r/2), \beta = -(\sqrt{c}/2) \tan(\sqrt{c}r/2)$;
- (H_i) $\mathbb{C}H^n(c)$ 内のホ口球面, ここで $\alpha = \beta = \sqrt{|c|}/2$;
- (H_{ii}) $\mathbb{C}H^n(c)$ 内の半径 r ($0 < r < \infty$) の測地球面 $G(r)$, ここで $\alpha = (\sqrt{|c|}/2) \coth(\sqrt{|c|}r/2), \beta = (\sqrt{|c|}/2) \tanh(\sqrt{|c|}r/2)$;
- (H_{iii}) 全測地的複素超平面 $\mathbb{C}H^{n-1}(c)$ 上の半径 r ($0 < r < \infty$) のチューブ, ここで $\alpha = (\sqrt{|c|}/2) \tanh(\sqrt{|c|}r/2), \beta = (\sqrt{|c|}/2) \coth(\sqrt{|c|}r/2)$.

Totally η -umbilic 実超曲面は、intrinsic geometry の観点においてもリーマン多様体として面白い例である。そのような実超曲面の length spectrum は詳細に分かっている ([3])。その上、 $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の半径 r ($0 < r < \pi/\sqrt{c}$) が $\tan^2(\sqrt{c}r/2) > 2$ となる測地球面 $G(r)$ は、ベルジェ球面になることが知られている ([9])。

ここで非平坦複素空間形内の (A) 型実超曲面と (B) 型実超曲面の特徴付けを復習する。非平坦複素空間形内の実超曲面 M が (A) 型であるための必要十分条件は、 $\phi A = A\phi$ が M 上成立することである (参照 [8])。次に挙げる (B) 型実超曲面の特徴付けは、文献 [6] に帰する。

補題 2. 非平坦複素空間形 $\widetilde{M}_n(c)$ 内の連結実超曲面 M^{2n-1} ($n \geq 2$) に関する次の 2 条件は、互いに同値である。

- 1) M は (B) 型実超曲面。
- 2) M の正則分布 $T^0M = \{X \in TM | X \perp \xi\}$ は、制限された主分布 $V_{\lambda_i}^0 = \{X \in T^0M | AX = \lambda_i X\}$ に直和分解される。その上任意の制限された主分布 $V_{\lambda_i}^0$ は可積分であり、その全ての極大連結積分多様体は、 M 内の全測地的部分多様体である。

補題 2 に関連して、“非平坦複素空間形内の任意のホップ超曲面 M の正則分布 T^0M は可積分ではない (参照 [6] の命題 2)” という事を思い出す。

本講演では、 $\widetilde{M}_n(c)$ 内の (A) 型、(B) 型、(C) 型、(D) 型 および (E) 型実超曲面を 標準的実超曲面 と呼ぶことにする。これらの実超曲面は $\widetilde{M}_n(c)$ 内の等質実曲面であることが知られている。即ち、任意の標準的実超曲面は $\widetilde{M}_n(c)$ の等長変換群 $I(\widetilde{M}_n(c))$ の適当な部分群の軌道になっている。

4. 結果

定理 1. $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の連結実超曲面 M^{2n-1} ($n \geq 2$) で方程式 (1.1) を満たすものは、次に挙げる等質実超曲面のどれかと局所的に合同である。

- 1) $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の半径 $r = (2/\sqrt{c}) \tan^{-1}(\sqrt{c}/(2k))$, $0 < r < \pi/\sqrt{c}$ の測地球面 $G(r)$,
- 2) $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の複素 2 次超曲面 $\mathbb{C}Q^{n-1}$ 上の半径 $r = (2/\sqrt{c}) \tan^{-1}((\sqrt{c+4k^2} - \sqrt{c})/(2k))$, $0 < r < \pi/(2\sqrt{c})$ のチューブ。

定理 2. $\mathbb{C}H^n(c)$ 内の連結実超曲面 M^{2n-1} ($n \geq 2$) で方程式 (1.1) を満たすものは、次に挙げる等質実超曲面のどれかと局所的に合同である。

- 1) $\mathbb{C}H^n(c)$ ($c = -4k^2$) 内のホ口球面,

- 2) $\mathbb{C}H^n(c)$ ($-4k^2 < c < 0$) 内の半径 $r = (1/\sqrt{|c|})\{\log(2k + \sqrt{|c|}) - \log(2k - \sqrt{|c|})\}$ の測地球面 $G(r)$ 又は, 全実全測地的 $\mathbb{R}H^n(c/4)$ 上の半径 $r = (1/(2\sqrt{|c|}))\{\log(2k + \sqrt{|c|}) - \log(2k - \sqrt{|c|})\}$ のチューブ。
 3) $\mathbb{C}H^n(c)$ ($c < -4k^2$) 内の全測地的 $\mathbb{C}H^{n-1}(c)$ 上の半径 $r = (1/\sqrt{|c|})\{\log(\sqrt{|c|} + 2k) - \log(\sqrt{|c|} - 2k)\}$ のチューブ。

定理 1, 定理 2 の証明の概要. 方程式 (1.1) と (3.4) より次が成り立つ。

$$0 = g(\phi AX, Y) - g(\phi AY, X) \mp 2kg(X, \phi Y) = g((\phi A + A\phi \pm 2k\phi)X, Y)$$

for $\forall X, Y \in TM$. これは $\widetilde{M}_n(c)$ 内の実超曲面 M が方程式 (1.1) を満たすための必要十分条件は, M が次式を満たすことである。

$$(4.1) \quad \phi A + A\phi = \mp 2k\phi.$$

簡単な議論から方程式 (4.1) を満たす実超曲面 M は標準的実超曲面であることが分かる。後は一つ一つの標準的実超曲面に対して方程式 (4.1) を満たすかどうかを確かめればよい。□

定理 2 の 1), 2) よりホ口球面と $\mathbb{C}H^n(c)$ 内の主曲率 2 種の (B) 型実超曲面を特徴付ける次の系を得る。

系 1. M^{2n-1} ($n \geq 2$) を $\mathbb{C}H^n(c)$ 内の実超曲面とすると, 次が成り立つ。

- (1) M が $\mathbb{C}H^n(c)$ 内のホ口球面と局所的に合同であるための必要十分条件は, $k = \sqrt{|c|}/2$ の下で M が方程式 (1.1) を満たすことである。
- (2) M が局所的に半径 $r = (2/\sqrt{|c|}) \log(2 + \sqrt{3})$ の測地球面 $G(r)$ か又は, 全実全測地的 $\mathbb{R}H^n(c/4)$ 上の半径 $r = (1/\sqrt{|c|}) \log(2 + \sqrt{3})$ のチューブであるための必要十分条件は, $k = \sqrt{|c|}/3$ の下で M が方程式 (1.1) を満たすことである。

定理 1, 2 において $k = 1$ とすると非平坦複素空間形内の接触実超曲面の分類定理が得られる。

系 2. $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の連結接触実超曲面 M^{2n-1} ($n \geq 2$) は, 次に挙げる等質実超曲面のどれかと局所的に合同である。

- 1) $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の半径 $r = (2/\sqrt{c}) \tan^{-1}(\sqrt{c}/2)$, $0 < r < \pi/\sqrt{c}$ の測地球面 $G(r)$,
- 2) $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の複素 2 次超曲面 $\mathbb{C}Q^{n-1}$ 上の半径 $r = (2/\sqrt{c}) \tan^{-1}((\sqrt{c+4} - \sqrt{c})/2)$, $0 < r < \pi/(2\sqrt{c})$ のチューブ。

系 3. $\mathbb{C}H^n(c)$ 内の連結接触実超曲面 M^{2n-1} ($n \geq 2$) は, 次に挙げる等質実超曲面のどれかと局所的に合同である。

- 1) $\mathbb{C}H^n(c)$ ($c = -4$) 内のホ口球面,
- 2) $\mathbb{C}H^n(c)$ ($-4 < c < 0$) 内の半径 $r = (1/\sqrt{|c|})\{\log(2 + \sqrt{|c|}) - \log(2 - \sqrt{|c|})\}$ の測地球面 $G(r)$ 又は, 全実全測地的 $\mathbb{R}H^n(c/4)$ 上の半径 $r = (1/(2\sqrt{|c|}))\{\log(2 + \sqrt{|c|}) - \log(2 - \sqrt{|c|})\}$ のチューブ,
- 3) $\mathbb{C}H^n(c)$ ($c < -4$) 内の全測地的 $\mathbb{C}H^{n-1}(c)$ 上の半径 $r = (1/\sqrt{|c|})\{\log(\sqrt{|c|} + 2) - \log(\sqrt{|c|} - 2)\}$ のチューブ。

系 2, 3 より, 非平坦複素空間形内の佐々木実超曲面の分類定理を得る (参照 [4])。

命題 1. 非平坦複素空間形 $\widetilde{M}_n(c)$ 内の連結佐々木実超曲面 M^{2n-1} ($n \geq 2$) は, 次に挙げる等質実超曲面のどれかと局所的に合同である。

- i) $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の半径 $r = (2/\sqrt{c}) \tan^{-1}(\sqrt{c}/2)$ ($0 < r < \pi/\sqrt{c}$) の測地球面 $G(r)$, ここで $\tan(\sqrt{c} r/2) = \sqrt{c}/2$,
- ii) $\mathbb{C}H^n(c)$ ($c = -4$) 内のホ口球面,
- iii) $\mathbb{C}H^n(c)$ ($-4 < c < 0$) 内の半径 $r = (1/\sqrt{|c|}) \{ \log(2 + \sqrt{|c|}) - \log(2 - \sqrt{|c|}) \}$ の測地球面 $G(r)$, ここで $\tanh(\sqrt{|c|} r/2) = \sqrt{|c|}/2$ ($0 < r < \infty$),
- iv) $\mathbb{C}H^n(c)$ ($c < -4$) 内の全測地的 $\mathbb{C}H^{n-1}(c)$ 上の半径 $r = (1/\sqrt{|c|}) \{ \log(\sqrt{|c|} + 2) - \log(\sqrt{|c|} - 2) \}$ のチューブ, ここで $\tanh(\sqrt{|c|} r/2) = 2/\sqrt{|c|}$ ($0 < r < \infty$).

これらの場合, M は必ず定 ϕ -断面曲率 $c+1$ を持つ。即ち, 佐々木空間形になる。

定理 1, 2 は非平坦複素空間形内の実超曲面で方程式 (1.1) を満たすものは, (A) 型又は (B) 型実超曲面に限ることを示している。そこで方程式 (1.1) を満たす (A) 型実超曲面を特徴付けよう。

定理 3. M^{2n-1} ($n \geq 2$) を非平坦複素空間形内の連結実超曲面とする。このとき任意の正数 k に対して, 次の 2 条件 (1), (2) は互いに同値である。

- (1) M は次のどれかと局所的に合同である。
 - (1a) $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の半径 $r = (2/\sqrt{c}) \tan^{-1}(\sqrt{c}/(2k))$, $0 < r < \pi/\sqrt{c}$ の測地球面 $G(r)$,
 - (1b) $\mathbb{C}H^n(c)$ ($c = -4k^2$) 内のホ口球面,
 - (1c) $\mathbb{C}H^n(c)$ ($-4k^2 < c < 0$) 内の半径 $r = (1/\sqrt{|c|}) \{ \log(2k + \sqrt{|c|}) - \log(2k - \sqrt{|c|}) \}$ の測地球面 $G(r)$,
 - (1d) $\mathbb{C}H^n(c)$ ($c < -4k^2$) 内の全測地的 $\mathbb{C}H^{n-1}(c)$ 上の半径 $r = (1/\sqrt{|c|}) \{ \log(\sqrt{|c|} + 2k) - \log(\sqrt{|c|} - 2k) \}$ のチューブ。
- (2) M の任意の点 x において, 特性ベクトル ξ_x と直交する $T_x M$ の正規直交系 $v_1, v_2, \dots, v_{2n-2}$ で次の 2 条件 (2a), (2b) を満たすものが存在する。
 - (2a) 初期条件 $\gamma_i(0) = x$, $\dot{\gamma}_i(0) = v_i$ を満たす M 上の $(2n-2)$ 本の測地線 $\gamma_i = \gamma_i(s)$ ($1 \leq i \leq 2n-2$) は, $\widetilde{M}_n(c)$ 内の同じ曲率 k を持つ円に写る。
 - (2b) 初期条件 $\gamma_{ij}(0) = x$, $\dot{\gamma}_{ij}(0) = (v_i + v_j)/\sqrt{2}$ を満たす M 上の $(n-1)(2n-3)$ 本の測地線 $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(s)$ ($1 \leq i < j \leq 2n-2$) は, $\widetilde{M}_n(c)$ 内の同じ曲率 k を持つ円に写る。

定理 3 を証明する前にリーマン幾何学における円の定義を復習しよう。リーマン多様体 (M, g) 上の弧長径数 s で径数付けられた実曲線 $\gamma = \gamma(s)$ が次の連立線形常微分方程式を満たすとき, 曲率 k の円 という。 $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = k Y_s$, $\nabla_{\dot{\gamma}} Y_s = -k \dot{\gamma}$, ここで ∇ は M のリーマン接続, Y_s は γ の単位主法線ベクトルであり, $k(\geq 0)$ は定数である。曲率零の円は測地線である。円は次の常微分方程式を満たす曲線 $\gamma = \gamma(s)$ と言ってもよい。

$$(4.2) \quad \nabla_{\dot{\gamma}}(\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}) + g(\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}) \dot{\gamma} = 0.$$

定理 3 の証明の概要. 条件 (1) を仮定する。このとき (4.1) と $\phi A = A\phi$ より, M の法線ベクトル $\mathcal{N}$ を次を満たすように取れる。

$$(4.3) \quad AX = kX + \beta \eta(X) \xi \quad \text{for } \forall X \in TM \text{ with some constant } \beta.$$

次に M 上の任意の測地線 $\gamma = \gamma(s)$ で $\langle \dot{\gamma}(0), \xi_{\gamma(0)} \rangle = 0$ を満たすものを考えると, (3.4) と (4.3) より γ 上の構造れい率 $\rho_\gamma(s) := \langle \dot{\gamma}(s), \xi_{\gamma(s)} \rangle$ は定数であることが分かる (参照 [3]). この事と $\langle \dot{\gamma}(0), \xi_{\gamma(0)} \rangle = 0$ を組み合わせると各 s に対して $\dot{\gamma}(s)$ と $\xi_{\gamma(s)}$ は直交する。これは (4.3) より, 任意の s に対して $A\dot{\gamma}(s) = k\dot{\gamma}(s)$ を意味する。故に (3.1) と (3.2) より, 測地線 γ は $\widetilde{M}_n(c)$ 内の曲率 k の円に写ることになり, 条件 (2) を得る。

次に条件 (2) を仮定する。実超曲面 M 上の任意に固定された点 x において, 2 条件 (2_a) と (2_b) を満たす正規直交系 $v_1, v_2, \dots, v_{2n-2}$ を取る。このとき (4.2) と条件 (2_a) より, 測地線 $\gamma_i = \gamma_i(s)$ ($1 \leq i \leq 2n-2$) は次を満たす。

$$(4.4) \quad \widetilde{\nabla}_{\dot{\gamma}_i} \widetilde{\nabla}_{\dot{\gamma}_i} \dot{\gamma}_i = -k^2 \dot{\gamma}_i.$$

他方, (3.1) と (3.2) より, 次を得る。

$$(4.5) \quad \widetilde{\nabla}_{\dot{\gamma}_i} \widetilde{\nabla}_{\dot{\gamma}_i} \dot{\gamma}_i = g((\nabla_{\dot{\gamma}_i} A)\dot{\gamma}_i, \dot{\gamma}_i)\mathcal{N} - g(A\dot{\gamma}_i, \dot{\gamma}_i)A\dot{\gamma}_i.$$

(4.4) と (4.5) の M に接するベクトル方向を比較し, $s = 0$ とおくと

$$g(Av_i, v_i)Av_i = k^2 v_i \quad \text{for } 1 \leq i \leq 2n-2,$$

が成り立つ。そこで, $k \neq 0$ に注意すると

$$(4.6) \quad Av_i = kv_i \quad \text{or} \quad Av_i = -kv_i \quad \text{for } 1 \leq i \leq 2n-2$$

が分かる。

一方, 同じ議論を条件 (2_b) に施せば, 方程式 (4.6) に対応した次式を得る。

$$(4.7) \quad A((v_i + v_j)/\sqrt{2}) = k(v_i + v_j)/\sqrt{2} \quad \text{or} \quad A((v_i + v_j)/\sqrt{2}) = -k(v_i + v_j)/\sqrt{2}$$

for $1 \leq i < j \leq 2n-2$. よって, (4.6) と (4.7) より $Av_i = kv_i$ ($1 \leq i \leq 2n-2$) 又は $Av_i = -kv_i$ ($1 \leq i \leq 2n-2$) でなければならないことになる。このことは実超曲面 M が, $\widetilde{M}_n(c)$ において $\alpha = \pm k$ を満たす totally η -umbilic 超曲面であることを示している。従って, 条件 (1) を得た。□

注意 2. 条件 (2_b) を外すと定理 3 は正しくない。実際, $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の全測地的 $\mathbb{C}P^\ell(c)$ ($1 \leq \ell \leq n-2$) 上の半径 $\pi/(2\sqrt{c})$ のチューブを考えてみよう。これはいわゆる $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の (A₂) 型実超曲面。このときこの実超曲面 M の接バンドル TM は次のように直和分解される。 $TM = \{\xi\}_{\mathbb{R}} \oplus V_{\sqrt{c}/2} \oplus V_{-\sqrt{c}/2}$, ここで $A\xi = 0$ (第 3 章の主曲率の表を参照)。そこで M 上の任意の点 x において, ξ_x と直交する正規直交系 $v_1, \dots, v_{2n-2}$ を $\{v_1, \dots, v_{2n-2\ell-2}\}$ と $\{v_{2n-2\ell-1}, \dots, v_{2n-2}\}$ は, それぞれ $V_{\sqrt{c}/2}$ と $V_{-\sqrt{c}/2}$ の正規直交基底になるように取る。そうすると $\dot{\gamma}_i(0) = v_i$ を満たす M 上の $(2n-2)$ 本の測地線 $\gamma_i = \gamma_i(s)$ ($1 \leq i \leq 2n-2$) は, $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の全実全測地的実射影平面 $\mathbb{R}P^2(c/4)$ 上の同じ曲率 $\sqrt{c}/2$ の円に写る (詳しくは, [7] を参照)。

次は, 方程式 (1.1) を満たす (B) 型実超曲面の特徴付けを与えている。

命題 2. M^{2n-1} ($n \geq 2$) を非平坦複素空間形 $\widetilde{M}_n(c)$ 内の連結実超曲面で, k は正の定数とする。 M が $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の 2 次複素超曲面 $\mathbb{C}Q^{n-1}$ 上の半径 $r = (2/\sqrt{c}) \tan^{-1}((\sqrt{c+4k^2} - \sqrt{c})/(2k))$, $0 < r < \pi/(2\sqrt{c})$ のチューブ又は, $\mathbb{C}H^n(c)$ ($-4k^2 < c < 0$) 内の全実全測地的 $\mathbb{R}H^n(c/4)$ 上の半径 $r = (1/(2\sqrt{|c|})) \{\log(2k + \sqrt{|c|}) - \log(2k - \sqrt{|c|})\}$ のチューブであるための必要十分条件は, M が次の 2 条件を満たすことである。

- i) M の正則分布 $T^0M = \{X \in TM | X \perp \xi\}$ が制限された主分布 $V_{\lambda_i}^0 = \{X \in T^0M | AX = \lambda_i X\}$ に直和分解される。その上, 任意の制限された主分布 $V_{\lambda_i}^0$ は可積分であり, その勝手な極大連結積分多様体は M の全測地的部分多様体である。
- ii) ξ の積分曲線で $\widetilde{M}_n(c)$ 内の正曲率 $|c|/(2k)$ の円に写るものが存在する。

証明の概要. 補題 2 より, (B) 型実超曲面 M が方程式 (4.1) を満たすための必要十分条件は, M が条件 ii) を満たすことを示せばよい。 $c > 0$ のとき, (B) 型実超曲面 M は次の 3 つの主曲率を持つ。

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{c}}{2} \cot\left(\frac{\sqrt{c}}{2}r - \frac{\pi}{4}\right), \lambda_2 = \frac{\sqrt{c}}{2} \cot\left(\frac{\sqrt{c}}{2}r + \frac{\pi}{4}\right), \delta = \sqrt{c} \cot(\sqrt{c}r).$$

一方,

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= \frac{\sqrt{c}}{2} \cot\left(\frac{\sqrt{c}}{2}r - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{c}}{2} \tan\left(\frac{\sqrt{c}}{2}r - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{c} \cot\left(\sqrt{c}r - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sqrt{c} \tan(\sqrt{c}r). \end{aligned}$$

故に (B) 型実超曲面 M が方程式 (1.1) を満たすための必要十分条件は, $A\xi = (c/(2k))\xi$, 即ち, $\delta = c/(2k)$ が成り立つことである。この場合, ξ の任意の積分曲線は $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の曲率 $c/(2k)$ の円に写る ((3.1), (3.2) と (3.4) を参照)。これと主曲率 δ の定数性を組み合わせると (B) 型実超曲面 M が方程式 (1.1) を満たすための必要十分条件は, M が条件 ii) を満たすことであることが分かる。

$c < 0$ の場合も同様である。 □

REFERENCES

- [1] T. Adachi, M. Kameda and S. Maeda, *Geometric meaning of Sasakian space forms from the viewpoint of Submanifold Theory*, to appear in Kodai Math. J. .
- [2] T. Adachi, M. Kameda and S. Maeda, *Real hypersurfaces which are contact in a nonflat complex space form*, to appear in Hokkaido Math. J. .
- [3] T. Adachi, S. Maeda and M. Yamagishi, *Length spectrum of geodesic spheres in a non-flat complex space form*, J. Math. Soc. Japan **54** (2002), 373–408.
- [4] J. Berndt, *Real hypersurfaces with constant principal curvatures in complex hyperbolic space*, J. Reine Angew. Math. **395** (1989), 132–141.
- [5] D. E. Blair, *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, Progress in Math. **203** (2002), Birkhäuser.
- [6] S. Maeda, *A characterization of the homogeneous real hypersurface of type (B) with two distinct constant principal curvatures in a complex hyperbolic space*, Sci. Math. Jpn. **68** (2008), 1–10.
- [7] S. Maeda and K. Ogiue, *Characterizations of geodesic hyperspheres in a complex projective space by observing the extrinsic shape of geodesics*, Math. Z. **225** (1997), 537–542.
- [8] R. Niebergall and P.J. Ryan, *Real hypersurfaces in complex space forms*, in: Tight and Taut submanifolds, T.E. Cecil and S.S. Chern (eds.), Cambridge Univ. Press, 1998, 233–305.
- [9] A. Weinstein, *Distance spheres in complex projective spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **39** (1973), 649–650.