対称空間の曲面論へのグラスマン幾何的アプローチ

Approach of Grassmann geomety to the theory of surfaces on symmetric spaces

内藤博夫（山口大 理） 2010/9/9

Abstract　一般に，グラスマン幾何は，等質部分多様体をモデルとする部分多様体論の１つと考えることができる。最近，この観点から，左不変計量に関する３次元ユニモジュラーリー群の曲面論を考察し，グラスマン幾何的な極小曲面や平均曲率一定曲面の局所的存在に関する結果を得た。この講演では，これらの結果の概要について述べた後，このようなアプローチを対称空間の曲面論に対して行う場合，直面する問題点や課題について解説する。

Introduction　連結等質 Riemann 多様体 (M,g) の等長変換群の単位元連結成分 $I_o(M,g)$ を，M 上の r-次元接部分空間全体のなす Grassmann 束 $G^r(TM)$ に作用させ，その軌道を $\mathcal{O} \subset G^r(TM)$ とする．M の連結部分多様体 S が，$T_pS \in \mathcal{O}$ $(p \in S)$ を満たすとき，$\mathcal{O}$-部分多様体といい，$\mathcal{O}$-部分多様体全体を $\mathcal{O}$-幾何という．Grassmann 幾何はこのような $\mathcal{O}$-幾何の総称である．連結 Riemann 等質部分多様体は，Grassmann 幾何の典型例である．Grassmann 幾何の基本的問題として，次の２つが挙げられる．

(1) $\mathcal{O}$-部分多様体が存在する軌道の決定.
　(軌道 $\mathcal{O}$ の分類と Grassmann 幾何の存在)，さらに，

(2) 典型的（全測地的，極小，平均曲一定，等質等）$\mathcal{O}$-部分多様体の存在の解明.
　(Grassmann 幾何の部分多様体論及び等質部分多様体の分類)

1．3 次元 unimodular Lie 群上の Grassmann 幾何

対称空間における Grassmann 幾何を考える前に，様々な具体的計算が出来る３次元 unimodular Lie 群の左不変計量に関する，曲面についての Grassmann 幾何で様子を調べる.

(M,g) を左不変計量 g を持つ ３次元単連結 unimodular Lie 群 G とする．unimodular Lie 群は，その Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の随伴写像 $\mathrm{ad}(X)$ $(X \in \mathfrak{g})$ のトレースが 0 となるものとして定義され，特に，$\dim\mathfrak{g} = 3$ のとき，$\mathfrak{g}$ 上に向きと内積をとり外積 $\times$ を考えることによって，

$$[X,Y] = L(X \times Y) \quad (X,Y \in \mathfrak{g})$$

を満たす $\mathfrak{g}$ 上一意的な線型変換 L が対称変換であることで特徴付けられる．L の固有値 λ_i とその単位固有ベクトル E_i を用いて，bracket 積 [,] を

$$[E_2,E_3] = \lambda_1 E_1, \quad [E_3,E_1] = \lambda_2 E_2, \quad [E_1,E_2] = \lambda_3 E_3$$

と表示することによって，J. Milnor [1] は次の 3 次元 unimodular Lie 群の分類表を得た.

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ の符号	Unimodular Lie 代数	備考
(+,+,+)	$\mathfrak{su}(2)$	compact, simple
(−,+,+)	$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$	noncompact, simple
(+,+, 0)	$\mathfrak{e}(2)$	solvable
(−,+, 0)	$\mathfrak{e}(1,1)$	solvable
(0, 0,+)	$\mathfrak{h}_3$	nilpotent
(0, 0, 0)	$\mathbb{R}^3$	commutative

(＊) ここで, $\mathfrak{e}(2)$, $\mathfrak{e}(1,1)$ はそれぞれ Euclid 平面, Minkowski 平面の運動群の Lie 代数，$\mathfrak{h}_3$ は Heisenberg 群の Lie 代数を表す.

また，V. Patrangenaru [2] によって，上記６つの単連結 unimodular Lie 群上の左不変計量の等長類とその等長変換群及び isotropy 部分群が次のように決定されている.

$\mathfrak{g}$	g の等長類	等長変換群の次元	$I_o(G,g)$ における isotropy type	対称空間	No.
$\mathfrak{su}(2)$	$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$	$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \Rightarrow 3$	$\{e\}$		(1)
		$\lambda_1 = \lambda_2$ or $\lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow 4$	$SO(2)$		(2)
		$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow 6$	$SO(3)$	$\mathbb{S}^3$	(3)
$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \leq \lambda_3$	$\lambda_2 < \lambda_3 \Rightarrow 3$	$\{e\}$		(4)
		$\lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow 4$	$SO(2)$		(5)
$\mathfrak{e}(2)$	$0 < \lambda_1 < \lambda_2$ or $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$	$\lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow 3$	$\{e\}$		(6)
		$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \Rightarrow 6$	$SO(3)$	$\mathbb{E}^3$	(7)
$\mathfrak{e}(1,1)$	$-\lambda_2 \leq \lambda_1 < 0 < \lambda_2$	3	$\{e\}$		(8)
$\mathfrak{h}_3$	$0 < \lambda_1$	4	$SO(2)$		(9)
$\mathbb{R}^3$	unique	6	$SO(3)$	$\mathbb{E}^3$	(10)

isotropy 群が $\{e\}$ の場合の Grassmann 幾何 (1), (4), (6), (8):
$I_o(G,g) \cong G$ より，Grassmann 束 $G^2(TG)$ の $I_o(G,g)$-軌道は２次元左不変線型分布で, $\mathcal{O}$-幾何 $\neq \emptyset$ であるための必要十分条件は，線型分布が involutive になることである．軌道空間は Grassmann 多様体 $G^2(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{R}P^2(\mathfrak{g})$ と同型になる．Grassmann 幾何の性質は以下のとおり。

Cases	$\mathcal{O}$-幾何の存在	$\mathcal{O}$-surfaces の特徴	全測地的曲面の存在
$\mathfrak{su}(2)$, (1)	非存在	—	—
$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, (4)	$\mathbb{R}P^2$ の２次曲線 $\lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 + \lambda_3 w_3^2 = 0$	正定数 Gauss 曲率 極小曲面	全測地的は $\lambda_1 + \lambda_3 = \lambda_2$ の場合に限り２軌道
$\mathfrak{e}(2)$, (6)	１軌道	平坦極小曲面	非存在
$\mathfrak{e}(1,1)$, (8)	$\mathbb{R}P^2$ の２本の射影直線 $\lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 = 0$	非正定数 Gauss 曲率 極小曲面	全測地的は $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ の場合に限り２軌道

(＊) (w_1, w_2, w_3) は $\{E_1, E_2, E_3\}$ に関する $\mathfrak{g}$ の座標で $w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1$ とする.

isotropy 群が $SO(2)$ の場合の Grassmann 幾何 (2), (5), (9):
$I_o(G,g) \cong SO(2)\cdot G$ となり，軌道空間は $SO(2)\backslash \mathbb{R}P^2(\mathfrak{g})$ と同型になる．$SO(2)$ の $\mathfrak{g}$ への作用は，$\lambda_i = \lambda_j$ となる E_iE_j-平面の回転となり，各軌道は，残りの E_k 方向に垂直な円の集合と同一視される．軌道のパラメータ付けは、E_iE_j-平面から軌道円までの高さ h $(0 \le h \le 1)$ で与えられ，$\mathcal{O}(h)$ と表す．
h を固定するとき，Grassmann 束 $G^2(TG)$ の $\mathcal{O}(h)$-軌道は，G 上の左普遍 S^1-束となり，E_iE_j-平面の回転角を表す G 上の角度関数 θ を与えることにより，S^1-束の局所断面，従って，$\mathcal{O}(h)$ に属する G 上の線型分布 $\mathcal{D}^\theta$ を定義することができる．$\mathcal{O}(h)$**-幾何が空でないための必要十分条件**は，このような線型分布 $\mathcal{D}^\theta$ で involutive なものが存在することである．この条件は，$\mathcal{D}^\theta$ に属する単位直交ベクトル場 X, Y とそれらに直交するベクトル場 N をとれば，$g([X,Y],N)=0$ と表される．未知関数 θ と定数 h を用いて 1 組の正規直交枠 $\{X,Y,N\}$ を構成し，存在条件を偏微分方程式で表せば次のようになる：

$$\text{(A)}\quad h\sqrt{1-h^2}\sin\theta(E_i\theta) - h\sqrt{1-h^2}\cos\theta(E_j\theta) + (1-h^2)(E_k\theta) + \lambda(1-h^2) + \lambda_k h^2 = 0.$$

ここで $\lambda = \lambda_i = \lambda_j$ とおく．$\mathcal{O}(h)$-曲面は, (A) の解 θ から得られる線型分布 $\mathcal{D}^\theta$ の積分曲面として特徴付けられる．また，$\mathcal{O}(h)$-曲面が存在するとき，それが**平均曲率一定曲面になるための必要十分条件**は，さらに，

$$\text{(B)}\qquad \cos\theta(E_i\theta) + \sin\theta(E_j\theta) = -k/2$$

を満たすことである．ここで，k は任意定数で, 平均曲率は $H^\theta = k\sqrt{1-h^2}/4$ となる．例えば，$G = SU(2)$ の場合，さらに，方程式 (A), (B) を対称空間 $SU(2)/SO(2)$ に則した G の標準的な局所座標 $(x; y, z, w)$ を用いて記述すると，

$$\begin{aligned}
\text{(A')}\quad & \{\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda}}h\sqrt{1-h^2}x\sin\theta + \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda}}h\sqrt{1-h^2}w\cos\theta + (1-h^2)z\}\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) \\
& + \{\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda}}h\sqrt{1-h^2}w\sin\theta - \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda}}h\sqrt{1-h^2}x\cos\theta - (1-h^2)y\}\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) \\
& + \{-\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda}}h\sqrt{1-h^2}z\sin\theta - \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda}}h\sqrt{1-h^2}y\cos\theta + (1-h^2)x\}\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right) \\
& + 2(1-h^2) + 2\frac{\lambda_k}{\lambda}h^2 \quad = \quad 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(B')}\quad & (x\cos\theta - w\sin\theta)\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) + (w\cos\theta + x\sin\theta)\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) + \\
& (-z\cos\theta + y\sin\theta)\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right) + \frac{k}{\sqrt{\lambda\lambda_k}} = 0.
\end{aligned}$$

のような準線型方程式になる．$\mathcal{O}(h)$**-曲面の存在問題**は，単独方程式 (A') について, 逆関数定理を用いる準線型方程式の解の存在定理を使う．すなわち，関係式 $x^2+y^2+z^2+w^2=1$ を用いて，(A') の特性線型常微分方程式系を変数 x を含めた線型常微分方程式系に拡張する．この拡大線型常微分方程式系を適切な初期曲面と任意初期関数で解き，解と初期曲面の 3 つ

のパラメータの組 (t,a,b) が，逆関数定理によって，座標 (y,z,w) に変数変換できるような初期関数を選ぶことができるかを判定する．**平均曲率一定曲面の存在問題**は，上記 (A') の拡大線型常微分方程式系の解を (B') へ代入して θ の初期値関数 $\varphi(a,b)$ に関する，パラメータ (t,a,b) を含む非線形偏微分方程式を導き，その解の存在を吟味する．(A') の拡大線型常微分方程式系は**定数係数線型常微分方程式系**に変数変換でき，その係数行列の Jordan 標準形 (h, λ_i に依存）によって $\mathcal{O}(h)$-幾何の状況が異なる．得られた結果は次のとおり．

Cases	$\mathcal{O}$-幾何の存在	$\mathcal{O}$-surfaces の特徴	CMC 曲面の存在
$\mathfrak{su}(2)$, (2); $(h=0)$	存在	平坦曲面で $\mathbb{C}P^1$ 上の Hopf surface	任意平均曲率の CMC が存在
$(0<h<1)$	存在		非存在
$(h=1)$	非存在	—	—
$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, (5); $(h=0)$	存在	平坦曲面で $\mathbb{C}H^1$ 上の Hopf surface	任意平均曲率の CMC が存在
$(0<h<\sqrt{\lambda/(\lambda-\lambda_1)})$	存在		h 依存の平均曲率の非極小 CMC が存在
$(h=\sqrt{\lambda/(\lambda-\lambda_1)})$	存在		常に極小で負一定 Gauss 曲率
$(\sqrt{\lambda/(\lambda-\lambda_1)}<h<1)$	存在		非存在
$(h=1)$	非存在	—	—
$\mathfrak{h}_3$, (9); $(h=0)$	存在	平坦曲面で $\mathbb{C}$ 上の Hopf surface	任意平均曲率の CMC が存在
$(0<h<1)$	存在	負一定 Gauss 曲率	非存在
$(h=1)$	非存在	—	—

（＊）全ての Cases において，全測地的曲面は存在しない．

注意

○ 結果的に, CMC $\mathcal{O}(h)$-曲面の存在・非存在については，存在のための h の条件を Gauss equation から抽出できる．(平均曲率が一定のとき Gauss 曲率も一定となるため）

○ $SL(2,\mathbb{R})$, $0<h<\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_1}}$ の場合の CMC 曲面の存在に関しては，他の場合と異なり，$SL(2,\mathbb{R})$ の岩沢分解 $SL(2,\mathbb{R})=NKA$ に即した座標系を選び，KA 内の曲線の N-軌道 (N-invariant surfaces) の中から，$h=const.$ を満たし平均曲率一定のものを具体的に構成して，その存在を示すことができる．(方程式 (B') よりこちらの方が解の存在を示すのが容易.)

2. 対称空間上の Grassmann 幾何への課題

(M,g) を単連結既約 Riemann 対称空間とし，$M=G/K$ と表す．$G=I_o(M,g)$, K は連結である．$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ を標準分解とし，$T_oM=\mathfrak{p}$ $(o=eK)$ と同一視する．(M,g) の曲面に対する Grassmann 幾何を考察するために必要な課題を以下に列挙する．

[STEP 1] G**-軌道空間の分類**

$G^2(TM)$ の G-軌道空間は Grassmann 多様体 $G^2(\mathfrak{p})$ **の** K**-軌道空間**と１対１に対応する．unimodular の場合と比較すれば，G-軌道 $\mathcal{O}$ を明示するのに適切な (i) K-軌道のパラメータ空間の構成，対称空間の幾何と関連付け易い (ii) K-軌道の 標準的モデル平面（代表元）の構成，また，unimodular の場合の特異軌道に対応する $\mathcal{O}$-幾何が「非存在」であったことを考慮して，(iii) K-特異軌道 に関する情報，などを得ることが課題になる．

[STEP 2] $\mathcal{O}$**-幾何が空である** G**-軌道の決定**

K-軌道の標準的モデル平面 Π が得られていれば，unimodular の場合の未知関数 θ に相当するものは M 上の K に値を持つ局所関数 Θ であるから，Θ と normal coordinates に沿う Π の平行移動を用いて，$o \in M$ のまわりの 局所線型分布 $\mathcal{D}^{\Theta}$ を定義することができる．この $\mathcal{D}^{\Theta}$ が involutive となる Θ が存在するための，Π **に関するオブストラクション**を見つけることが課題になる．unimodular の場合は，M の標準的な局所座標を用いて，準線型単独一階偏微分方程式の解の存在問題に帰着したが，対称空間の場合は余次元が高いので，局所座標に依らないものを見つけることが必要になると考えられる．

以下は全く根拠のない話であるが，雰囲気的に捨てがたいものがある．上記のスキームに適合するかどうかは分からないが，文献 [5] で議論されている “Quadratic Cohomology” は検討する余地がある概念と思われる．この論文は，pseudo-Riemannian symmetric spaces の分類，特に，underlying symmetric Lie algebra が simple ideal を持たないものの分類のスキームを与えたものである．Grassmann 幾何とは直接関係ないが，そのスキームの中で重要な役割を果たしている Quadratic Cohomology は，ある種の非線形 cohomology 理論とみなすことができ，同様の考え方が Grassmann 幾何で扱う偏微分方程式系の解法のスキームに利用できるかも知れないと期待している．

[STEP 3] 空でない $\mathcal{O}$**-幾何の曲面の特徴**

unimodular の場合では，$\mathcal{O}$-幾何の状況が準線型単独１階偏微分方程式 (A’) の特性常微分方程式系を変形した定数係数線型常微分方程式系の係数行列の Jordan 型で異なっていたことに注目すれば，この “Jordan 型” に対応する Π **に関する幾何学的指標**で局所座標の取り方に依らないものを [STEP 2] のオブストラクションと関連付けて見つけることが課題になる．その後，それぞれの指標と 全測地的曲面 や CMC 曲面 などの典型的な曲面の存在問題との関連を考察することが課題になる．unimodular の場合は，結果的に，これらの「非存在」のオブストラクションが Gauss 方程式 から得られているので，それとの関連についての検証も必要になる．また，$SL(2,\mathbb{R})$ の場合の「CMC 曲面の存在」は，岩沢分解 を使うほうが容易なので，(M, g) が noncompact type のとき，それとの関連の検証も必要と思われる．

[STEP 1 に関する現在の進捗状況]

Grassmann geometry は $G^2(\mathfrak{p})$ の K-軌道と対応しているので，$G^2(\mathfrak{p})$ 上の K-不変量で Grassmann 幾何の分類と関連付けられるものを見つける必要がある．

● 最初の候補として，$\mathfrak{p}$ の中の 2 次元平面 P に対する対称空間 G/K の 断面曲率 $\kappa(P)$ が考えられる．$\kappa(P) = 0$ (P が flat) となる K-軌道 $K(P) \subset G^2(\mathfrak{p})$ と，$\kappa(P) = c \neq 0$ となる

K-軌道 $K(P)$ の状況が異なる．$\kappa(P)=0$ の場合は，そのような K-軌道の集合が, $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ 上の Grassmann 多様体 $G^2(\mathfrak{a})$ に $\mathfrak{a}$ の Weyl 群 $W(G,K)$ を作用させたときの $W(G,K)$-軌道の集合と対応している．一方，$\kappa(P)=c\neq 0$ の場合は，有限群が作用する $\mathfrak{a}$ のような $\mathfrak{p}$ の部分空間が見当たらないようにみえるので，この場合の "良い" パラメータ空間を見つけることが課題である．Grassmann 幾何の変化を parametrize する K-不変量としては，断面曲率 $\kappa(P)$ は大雑把すぎるように思われるので，次のような問題を検討してみる必要がある．

問題. $\kappa(P)=0$ のとき，$G^2(\mathfrak{a})$ の各 $W(G,K)$-軌道に付随する Grassmann 幾何的に曲面論の特徴に違いがあるか．特に，平面 P と $\mathfrak{a}$ の Weyl walls との位置関係が Grassmann 幾何の違いに影響を及ぼすか．（この場合の [STEP 2], [STEP 3] の実行）

問題. $\kappa(P)=c\neq 0$ の場合に関連して，G/K が定曲率空間以外の rank 1 対称空間のとき，$G^2(\mathfrak{p})$ の K-軌道空間のパラメータとしてどのようなものを選ぶことができるか．例えば，複素射影空間の Kähler angles との関係はどのようになっているかなど。さらに，それらに付随する Grassmann 幾何の特徴の違いが何に反映されているのか．また，全測地的曲面の存在とどのような関連があるのか.（この場合の [STEP 1], [STEP 2], [STEP 3] の実行）

● 次の候補として考えられるのが <u>$\mathfrak{k}$ に働く Ad(K)-軌道</u> である．$\tilde{G}^2(\mathfrak{p})$ を $\mathfrak{p}$ の中の向き付けられた 2 次元平面全体からなる Grassmann 多様体とする．$G^2(\mathfrak{p})$ の普遍被覆空間である．$\tilde{G}^2(\mathfrak{p})\ni P$ に対して, P の向き付けられた正規直交基 $\{x,y\}$ をとり，$\pi(P)=[x,y]\in\mathfrak{k}$ とすれば, $\pi(P)$ は $\{x,y\}$ の取り方に依存しないで定まり，写像 $\pi:\tilde{G}^2(\mathfrak{p})\to\mathfrak{k}$ は Ad(K)-不変である．従って，$\tilde{G}^2(\mathfrak{p})$ の K-軌道 $K(P)$ は，$\pi(P)=T$ とおくとき，$\mathfrak{k}$ の Ad(K)-軌道 Ad$(K)T$ 上の等質ファイバー束 $\pi:K(P)\to$ Ad$(K)T$ の構造を持っている．従って，$\mathfrak{k}$ の Ad(K)-軌道は，$\tilde{G}^2(\mathfrak{p})$ の K-軌道空間の不変量と見なすことができる．ここで，$\mathfrak{k}$ の極大可換代数 $\mathfrak{h}$ の元 T を代表元として選ぶことによって，Ad$(K)T$ の局所構造は $\mathfrak{k}$ の $\mathfrak{h}$ に関するルート系を使って具体的に表現できる．また，$\kappa(P)=|T|^2$ となっていることから，この不変量は $\kappa(P)$ より詳細な K-軌道の分類を与えることができる．但し，一般に，このような T が $\mathfrak{h}$ 全体を張るとは限らない.

● さらに詳細に K-軌道 $K(P)$ を調べるためには, $T\in\mathfrak{h}$ に対して，$K(P)$ の中の $\pi^{-1}(T)$ の構造を明らかにしなければならない．$K_T=\{k\in K\ |\mathrm{Ad}(k)T=T\}$ とおくとき，このファイバーは，等質空間として K_T/K_* $(\cong\pi^{-1}(T))$ の形をしている．ここで，$K_*=\{k\in K_T\ |\mathrm{Ad}(k)P=P\}=\{k\in K\ |\mathrm{Ad}(k)P=P\}$ と表される．従って，このファイバーの構造を調べるためには，$\pi^{-1}(T)$ に属する "標準的な" P の形を決定しなければならない．これは，$\tilde{G}^2(\mathfrak{p})$ の中で $\pi^{-1}(T)$ を取ったときの K_T-軌道空間の良いパラメータ空間 (存在すれば section のようなもの）を求めることと同じことになる.

注意． $\mathfrak{p}$ の順序付けられた orthnormal frame $\{x,y\}$ で $[x,y]=T$ を満たすような組で K_T-軌道の代表元を探すことを考える．x を固定し, 関係式 $[x,y]=T$ を y を変数とする 1 次方程式とみなすと，解集合 $\{y\}$ の様子を調べることができるが，しかし，このような組 $\{x,y\}$ から定まる平面の全集合における K_T-equivalence が分からないという問題に直面する..

注意． また，P の向き付けられた正規直交基 $\{x, y\}$ を $x+\sqrt{-1}y \in \mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$ と考え，$\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$ を K-表現空間あるいは K_T-表現空間とみなすことも考えられるが，そのときの K-軌道あるいは K_T-軌道の良いパラメータ空間（ section のようなもの）が分からない.

◎以上のような進展状況で，現状では，$G^2(\mathfrak{p})$ の K-軌道空間のパラメータ付けもできていないし，また，どのレベルまでのパラメータ付けが Grassmann 幾何の分類に必要かも明確になっていない。

References

[1] J. Milnor, Curvatures of left invariant metrics on Lie groups, Advances in Math. 21 (1976), 293-329.

[2] V. Patrangenaru, Classifying 3 and 4 dimensional homogeneous Riemannian manifolds by Cartan triples, Pacific J. of Math. 173-2 (1996), 511-532.

[3] J. Inoguchi and H. Naitoh, Grassmann geometry on the 3-dimensional unimodular Lie groups I, Hokkaido Math. J., 38(2009), 427-496.

[4] J. Inoguchi and H. Naitoh, Grassmann geometry on the 3-dimensional unimodular Lie groups II, submitted.

[5] I. Kath and M. Olbrich, On the structure of pseudo-Riemannian symmetric spaces, Transformation Groups, 14-4(2009), 847-885.