

極小光的部分多様体について

榊 真（弘前大学理工学研究科）

セミ・リーマン多様体にはめ込まれた部分多様体は誘導計量が退化しているとき光的部分多様体と言われ、計量が非退化な場合とは異なる状況がいろいろと生ずる．ここでは光的部分多様体の基本的概念と、極小光的部分多様体について得られた結果を紹介する．

1 基本的概念

$(m+n)$ 次元セミ・リーマン多様体 $(\bar{M}, \bar{g})$ にはめ込まれた m 次元部分多様体 M は、誘導計量 $g = \bar{g}|_M$ が退化しているとき、光的部分多様体と言われる (cf. [4]). 光的部分多様体の場合、接ベクトル束 TM と法ベクトル束 $TM^\perp$ は非自明な交わり $\text{Rad}(TM)$ を持ち、それを radical 分布と言う．

$$\text{Rad}(T_x M) = \{\xi \in T_x M \mid g(\xi, X) = 0, X \in T_x M\}.$$

$\text{Rad}(TM)$ が階数 r のとき、 M は r -光的であると言う．

TM の中で $\text{Rad}(TM)$ の直交補空間 $S(TM)$ を（一意的ではないが）取ることができ、screen 分布と言う．

$$TM = S(TM) \perp \text{Rad}(TM).$$

同様に $TM^\perp$ の中で $\text{Rad}(TM)$ の直交補空間 $s(TM^\perp)$ を取ることができ、screen 横断的ベクトル束と言う．

$$TM^\perp = s(TM^\perp) \perp \text{Rad}(TM).$$

M が r -光的のとき、 $S(TM)$ と $s(TM^\perp)$ の階数はそれぞれ $m-r$, $n-r$ である． M は $r = n < m$ のとき coisotropic, $r = m < n$ のとき isotropic, $r = m = n$ のとき totally lightlike であると言う．

$\text{Rad}(TM)$ の局所基底 $\{\xi_1, \dots, \xi_r\}$ に対し、 $S(TM)$ と $s(TM^\perp)$ に直交し、

$$\bar{g}(\xi_i, N_j) = \delta_{ij}, \quad \bar{g}(N_i, N_j) = 0$$

を満たす局所枠 $\{N_1, \dots, N_r\}$ が存在する．局所的にそのような $\{N_1, \dots, N_r\}$ で張られるベクトル束 $\text{ltr}(TM)$ が存在し、光的横断的ベクトル束と言う．

$$\begin{aligned} T\bar{M}|_M &= S(TM) \perp (\text{Rad}(TM) \oplus \text{ltr}(TM)) \perp s(TM^\perp) \\ &= TM \oplus \text{tr}(TM). \end{aligned}$$

不変な性質とは： $\{S(TM), s(TM^\perp), \text{ltr}(TM)\}$ の取り方によらない性質.

一般的課題：不変な性質を探す. できれば不変量も.

$(\bar{M}, \bar{g})$ の Levi-Civita 接続を $\bar{\nabla}$ とすると, 上の分解に従って, ガウスの公式は次のようになる.

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \quad X, Y \in \Gamma(TM).$$

ここで h を第二基本形式と言う. h が恒等的にゼロのとき, M は全測地的であると言う. (不変)

2 極小光的部分多様体

Bejan-Duggal 両氏は [3] で, 次のように極小光的部分多様体の定義を考えた.

定義 1 ([3]). (i) $h = 0$ on $\text{Rad}(TM)$, および, (ii) $\text{trace}_{g|_{S(TM)}} h = 0$ が成り立つとき, M は極小であると定義する.

しかし, これは余次元が 2 以上のとき, $S(TM)$ の取り方に依存し, 不変な性質ではない. そこで,

定義 2 ([16]). (a) $h(\xi, X) = 0$, $\xi \in \Gamma(\text{Rad}(TM))$, $X \in \Gamma(TM)$, および, (b) $\text{trace}_{g|_{S(TM)}} h = 0$ が成り立つとき, M は極小であると定義する.

命題 1 ([16]). 定義 2 は $\{S(TM), s(TM^\perp), \text{ltr}(TM)\}$ の取り方によらない. (不変)

注. 余次元 1 の場合, 定義 1 と 2 の最初の条件は自動的に成り立つので, 同じ定義となる.

全測地的でない極小光的部分多様体について, 余次元 1 で外側の空間が指標 1 の場合, 非存在定理がいろいろと知られている.

定理 1 ([5]). null エネルギー条件を満たすローレンツ多様体の極小光的超曲面は全測地的である.

注. null エネルギー条件: " $\bar{\text{Ric}}(\eta, \eta) \geq 0$, $\eta : \text{null}$ ". アインシュタイン・ローレンツ多様体は null エネルギー条件を満たす.

一方、余次元 1 で外側の空間が指標 2 の場合、

定理 2 ([13]). $(M, g, S(TM))$ を指標 2 の 4 次元セミ・ユークリッド空間 R_2^4 の光的超曲面で可積分な $S(TM)$ を持つものとする. このとき, M が極小であることと, $S(TM)$ の任意の leaf の $\text{tr}(TM)$ 方向の型作用素の固有値が 2 つともゼロであることは同値である.

構成法 1 ([13]). R_2^4 の平坦でないパラ複素曲面から光的法方向に直線を延ばして線織超曲面を作ると, 全測地的でない極小光的超曲面が構成される.

また、余次元 2 の場合、

構成法 2 ([16]). R_3^6 の平坦でないパラ複素曲面に対し, 第 1 法空間の光的法方向と第 1 法空間に直交する光的法方向で張られる平面により 4 次元の線織部分多様体を作ると, 定義 2 の意味で極小であり全測地的でない光的部分多様体が構成される.

注. 構成法 2 の極小光的部分多様体は coisotropic である.

注. Gorkavyy 氏は [11] で, 等長変形の視点から, ミンコフスキー空間の極小光的曲面の定義を与えている.

3 今後の課題

課題 1. coisotropic でない極小光的部分多様体の構成

課題 2. 線織でない極小光的部分多様体の構成 (余次元 2 以上の場合)

課題 3. 光的パラ複素部分多様体の極小性

課題 4. 極小光的部分多様体の特徴付け

その他: 変分法的な扱い (cf. [10]) / 光的不変量 (cf. [9], [15], [19]) / よい性質を持つ screen 分布 (接続, 曲率) / 全臍的光的部分多様体の構成 (cf. [4], [6], [2]) / など

参考文献

- [1] A. Al-Aqeel and A. Bejancu, On the geometry of paracomplex submanifolds, *Demonstratio Math.*, 34 (2001), 919-932.
- [2] C. Atindogbe and L. Berard-Bergery, A note on conformal connections on lightlike hypersurfaces, *Conformal Geom. Dynam.*, 11 (2007), 1-11.
- [3] C. L. Bejan and K. L. Duggal, Global lightlike manifolds and harmonicity, *Kodai Math. J.*, 28 (2005), 131-145.
- [4] K. L. Duggal and A. Bejancu, *Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [5] K. L. Duggal and A. Gimenez, Lightlike hypersurfaces of Lorentzian manifolds with distinguished screen, *J. Geom. Phys.*, 55 (2005), 107-122.
- [6] K. L. Duggal and D. H. Jin, Totally umbilical lightlike submanifolds, *Kodai Math. J.*, 26 (2003), 49-68.
- [7] K. L. Duggal and D. H. Jin, *Null Curves and Hypersurfaces of Semi-Riemannian Manifolds*, World Sci., 2007.
- [8] K. L. Duggal and B. Sahin, *Differential Geometry of Lightlike Submanifolds*, Birkhauser, 2010.
- [9] A. Ferrandez, A. Gimenez and P. Lucas, Null helices in Lorentzian space forms, *Int. J. Mod. Phys. A*, 16 (2001), 4845-4863.
- [10] A. Ferrandez, A. Gimenez and P. Lucas, Relativistic particles and the geometry of 4-D null curves, *J. Geom. Phys.*, 57 (2007), 2124-2135.
- [11] V. Gorkavyy, On minimal lightlike surfaces in Minkowski space-time, *Diff. Geom. Appl.*, 26 (2008), 133-139.
- [12] M. Sakaki, Two classes of Lorentzian stationary surfaces in semi-Riemannian space forms, *Nihonkai Math. J.*, 15 (2004), 15-22.
- [13] M. Sakaki, Minimal lightlike hypersurfaces in R_2^4 with integrable screen distribution, *Balkan J. Geom. Appl.*, 14(1) (2009), 84-90.
- [14] M. Sakaki, Minimal lightlike Monge hypersurfaces in semi-Euclidean spaces, *Int. J. Pure. Appl. Math.*, 54 (2009), 543-549.
- [15] M. Sakaki, Null Cartan curves in R_2^4 , *Toyama Math. J.* 32 (2009), 31-39.
- [16] M. Sakaki, On the definition of minimal lightlike submanifolds, *Int. Electron. J. Geom.*, 3(1) (2010), 16-23.
- [17] M. Sakaki, Notes on null curves in Minkowski spaces, *Turkish J. Math.*, 34 (2010), 417-424.
- [18] M. Sakaki, Lorentzian stationary surfaces in 4-dimensional space forms of index 2, preprint.
- [19] M. Sakaki, Bi-null Cartan curves in semi-Euclidean spaces of index 2, in preparation.