

A GENERALIZED CARTAN DECOMPOSITION FOR THE NON-SYMMETRIC HOMOGENEOUS SPACE

$$SL(2n+1, \mathbb{C})/Sp(n, \mathbb{C})$$

笹木 集夢 (早稲田大学基幹理工学部数学科)

1. 導入と主結果

G を非コンパクトな実簡約リー群とし, H をその閉部分群, K を G の極大コンパクト部分群とする. このとき, 次の幾何的な問題を考える:

問題 1.1 (軌道分解). $G/H = K \cdot S$ を満たす ‘スライス’ S を求めよ.

スライス S が特により幾何構造が存在するとき, G と H の満たすべき条件を研究することに興味をもっている. また, S を (幾何構造を付加せず) 十分小さく選ぶことは次の問題と同等である:

問題 1.2 (両側剰余空間). 両側剰余空間 $K \backslash G/H$ を具体的に記述せよ.

対称空間 G/H に対する研究は古くから行われている. 一方で, G/H が対称空間ではない場合, 問題 1.1 に対する一般論はほとんど知られていない. そこで, 問題 1.1 を次のリー群論的視点から考えたい:

問題 1.3 ((一般化された) カルタン分解). G の部分集合 A で

$$(1.1) \quad G = KAH$$

となるものを記述せよ.

実際に, 上の分解 (1.1) によって, $S := AH/H$ とおけば問題 1.1 に 1 つの答えを与える.

この研究は, 非対称空間 G/H の構造理論の研究を群作用という視点から捉えようという試みだけではなく, G/H 上の関数空間の上の表現に対して, 既約分解を導出や不変式論へ応用も視野に入れており, 微分幾何・表現論の両面において重要であると考えられる.

さて, $H = K$ のときは, 可換群 $A \simeq \mathbb{R}^{\text{rank } G/K}$ によって, カルタン分解 $G = KAK$ が得られる. H が (コンパクトとは限らない) 一般の対称部分群の場合でも, [1, Theorem 4.1] によって非コンパクトな可換群 B を用いて $G = KBH$ と分解されることが知られている (この分解もカル

タン分解とよぶ) . B の次元は対称空間 G/H の実階数 $d = \text{rank}_{\mathbb{R}} G/H$ で与えられる .

一方 , G/H が対称空間ではない場合 , 積写像 $K \times A \times H \rightarrow G$ が全射となるような可換群 A は存在するとは限らない .

対称でない等質空間に対する本研究の第一歩として , [7] では非管状型エルミート対称空間 G/K の複素化 $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ を底空間とする $\mathbb{C}^{\times}$ -束

$$(1.2) \quad K_{\mathbb{C}}/[K_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}}] \rightarrow G_{\mathbb{C}}/L_{\mathbb{C}} := G_{\mathbb{C}}/[K_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}}] \rightarrow G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$$

について研究を行い ,

$$(1.3) \quad G_{\mathbb{C}} = G_u A L_{\mathbb{C}}$$

を満たす $(\text{rank } G/K + 1)$ 次元の可換群 A を構成した [7, Corollary 4.1] .
ただし , G_u は $G_{\mathbb{C}}$ のコンパクトな実型 , $[K_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}}]$ は $K_{\mathbb{C}}$ の交換子群を表し¹ , $L_{\mathbb{C}} := [K_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}}]$ とおいた .

この結果に続く形で , 本講演では次の複素等質空間

$$G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}} := SL(2n+1, \mathbb{C})/Sp(n, \mathbb{C}).$$

を扱い , 次の分解定理が得られたこと報告する .

定理 1.1 (cf. [8, Theorem 1.1]). $(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}}) = (SL(2n+1, \mathbb{C}), Sp(n, \mathbb{C}))$ に対して , 一般化されたカルタン分解

$$(1.4) \quad G_{\mathbb{C}} = G_u A H_{\mathbb{C}}.$$

を満たす A は次で与えられる :

$$(1.5) \quad A \simeq \mathbb{R} \cdot \underbrace{\mathbb{T} \cdots \mathbb{T}}_{n-1} \cdot \mathbb{R}^n.$$

注意 1.2. (1.5) における $n-1$ 個の $\mathbb{T} \simeq SO(2)$ はそれぞれ $SL(2n+1, \mathbb{R})$ の部分群として互いに異なる形で実現される . 隣合う $\mathbb{T}$ は互いに非可換である . よって , A は群ではない (詳細は第 4 章参照) .

2. 準備

本章の前半では , 我々の対象である $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}} = SL(2n+1, \mathbb{C})/Sp(n, \mathbb{C})$ について知られていることを整理する . 後半では , 証明の際に用いる対称空間に対するカルタン分解について復習する .

2.1. 複素等質空間 $SL(2n+1, \mathbb{C})/Sp(n, \mathbb{C})$ のもつ性質. 複素等質空間 $SL(2n+1, \mathbb{C})/Sp(n, \mathbb{C})$ は対称空間ではないが , 幾何的 , 表現論的に次の構造をもつ .

¹ K が半単純ではなく , $[K_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}}]$ は $K_{\mathbb{C}}$ の余次元 1 の部分群となる .

2.1.1. ファイバー束の構造. 複素等質空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ は $G_{\mathbb{C}}$ -同変な正則ファイバー束

$$(2.1) \quad K_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}} \rightarrow G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}} \rightarrow G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$$

の構造をもつ. ここで, 底空間

$$G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}} := SL(2n+1, \mathbb{C})/GL(2n, \mathbb{C})$$

およびファイバー

$$K_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}} = GL(2n, \mathbb{C})/Sp(n, \mathbb{C})$$

はともに対称空間である. 一方で, ファイバー $K_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ の複素次元は $2n^2 + n$ であり, 分解 (1.4) を与える A を具体的に構成することは (1.3) と比べて容易ではない².

2.1.2. *Spherical variety*. 非対称空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ は ($G_{\mathbb{C}}$ の作用によって) spherical であることが知られている [6], つまり, $G_{\mathbb{C}}$ のボレル部分群による $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ の開軌道が存在する. [10] によって, $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ が spherical であるとき, $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ 上の正則関数全体の空間 $\mathcal{O}(G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}})$ が $G_{\mathbb{C}}$ の表現として重複なく分解される³.

この表現論的視点から, spherical という特別なクラスに対しては対称空間におけるカルタン分解の拡張として (1.4) を与えることができると予想している⁴. この意味で, 本記録集では分解 (1.4) を一般化されたカルタン分解とよぶことにする.

2.2. 対称空間におけるカルタン分解. この節では, 一般の (連結な) 実簡約リー群 G として, 対称空間 G/H に対するカルタン分解が次で与えられることを [1, Theorem 4.1] にしたがって紹介する.

H が G の対称部分群であるため, $(G^{\theta})_0 \subset H \subset G^{\theta}$ を満たす G の対合的自己同型 θ が存在する. G のカルタン対合 μ で θ と可換なものを選ぶ. $K := G^{\mu}$ とすると, K は G の極大コンパクト部分群となる.

次に, G, H, K のリー環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ と表し, θ, μ の微分を同じ記号で表す. このとき, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{\theta}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{\mu}$ となる. ここで,

$$\mathfrak{g}^{-\theta, -\mu} := \{X \in \mathfrak{g} : (-\theta)X = (-\mu)X = X\} = \mathfrak{g}^{-\theta} \cap \mathfrak{g}^{-\mu}$$

の極大可換部分空間を $\mathfrak{a}$ とし, $A := \exp \mathfrak{a}$ とする.

事実 2.1 ([1, Theorem 4.1]). $G = KAH$.

²[7] で扱った複素等質空間は, ファイバーが 1 次元の場合と見なせる.

³ $G_{\mathbb{C}}$ の表現として既約分解した際に, 各既約成分が高々 1 度しか現れないときをいう. 複素対称空間や (1.3) で述べた $\mathbb{C}^{\times}$ -束も spherical である [6].

⁴文献 [3, 7, 8, 9] に非対称な等質空間に対する一般化されたカルタン分解の研究結果がある.

定義より, A の次元は G/H の実階数 $\text{rank}_{\mathbb{R}} G/H$ で与えられる.

3. 定理 1.1 の証明の概略

本章では, 定理 1.1 の証明の概略を述べ, 次章でその詳細を解説する.
複素シンプレクティック群 $Sp(n, \mathbb{C})$ を特殊線型群 $SL(2n+1, \mathbb{C}) = \{g \in GL(2n+1, \mathbb{C}) : \det g = 1\}$ の部分群として,

$$Sp(n, \mathbb{C}) = \{g \in SL(2n+1, \mathbb{C}) : {}^t g J'_n g = J'_n\}$$

と実現する. ただし,

(3.1)

$$J'_n = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & J_n \end{array} \right) := \left(\begin{array}{c|cc|cc|cc} 1 & & & & & & & \\ & 0 & -1 & & & & & \\ & 1 & 0 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & 0 & -1 & & \\ & & & & 1 & 0 & & \end{array} \right) \in SL(2n+1, \mathbb{R}).$$

非対称な複素等質空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ は $G_{\mathbb{C}}$ -同変な正則ファイバー束の構造 (2.1) をもつことを思い出そう (第 2.1.1 節参照). 対称空間に対しては, 事実 2.1 によってカルタン分解を与える. カルタン分解を含むいくつかの分解公式を導いた後 (Steps 1–3 参照), 小林氏によって導入された ‘編み上げ’ ることによって (1.4) を構成する ([3], Step 4 参照).

以下に, A を構成する手順を紹介する.

Step 1 (底空間 $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ のカルタン分解).

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}} &= SL(2n+1, \mathbb{C})/S(GL(1, \mathbb{C}) \times GL(2n, \mathbb{C})) \\ &\simeq SL(2n+1, \mathbb{C})/GL(2n, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

は対称空間であるので, 事実 2.1 より,

補題 3.1. $G_u \subset G_{\mathbb{C}} \supset K_{\mathbb{C}}$ に対してカルタン分解

$$(3.2) \quad G_{\mathbb{C}} = G_u A_1 K_{\mathbb{C}}$$

を得る. 特に, $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ の実階数は 1 であり, よって $A_1 \simeq \mathbb{R}$ である.

Step 2 (ファイバー $K_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ のカルタン分解). 次に, $K_{\mathbb{C}}$ の極大コンパクト部分群 $K_u = U(2n)$ をとる. このとき,

$$K_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}} = GL(2n, \mathbb{C})/Sp(n, \mathbb{C})$$

も対称空間なので,

補題 3.2. $K_u \subset K_{\mathbb{C}} \supset H_{\mathbb{C}}$ に対して

$$(3.3) \quad K_{\mathbb{C}} = K_u A_2 H_{\mathbb{C}}$$

を満たす $A_2 \simeq \mathbb{R}^n$ が存在する .

しかし , $A_1 K_u \neq K_u A_1$ なので , さらに K_u の分解を考える必要がある .

Step 3 (K_u の分解). $H_{\mathbb{C}}$ の極大コンパクト部分群 $H_u = Sp(n) = G_u \cap H_{\mathbb{C}}$ をとる . M_1 を K_u における A_1 の中心化群 , M_2 を H_u における A_2 の中心化群とする . このとき , $M_1 \simeq U(2n-1)$, $M_2 \simeq SU(2)^n$ となる (具体的な形は第 4.3 節参照) . そこで , K_u の分解定理

$$(3.4) \quad K_u = M_1 A_3 M_2$$

を満たす A_3 を構成する (詳細は命題 4.3 で説明する) .

Step 4 (編み上げの手法). 最後に , 分解 (3.2)–(3.4) を次のように ‘編み上げ’ ていく .

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{C}} &= G_u A_1 K_{\mathbb{C}} & (\because (3.2)) \\ &= G_u A_1 (K_u A_2 H_{\mathbb{C}}) & (\because (3.3)) \\ &= G_u A_1 (M_1 A_3 M_2) A_2 H_{\mathbb{C}} & (\because (3.4)) \\ &= G_u M_1 A_1 A_3 A_2 M_2 H_{\mathbb{C}} & (\because A_1 M_1 = M_1 A_1, A_2 M_2 = M_2 A_2) \\ &= G_u (A_1 A_3 A_2) H_{\mathbb{C}} & (\because M_1 \subset G_u, M_2 \subset H_u \subset H_{\mathbb{C}}). \end{aligned}$$

したがって , $A := A_1 A_3 A_2$ とおけば $G_{\mathbb{C}}$ の分解定理 $G_{\mathbb{C}} = G_u A H_{\mathbb{C}}$ を得る .

上で用いた各群の包含関係を次の図式 1 にまとめておこう .

$$\begin{array}{ccccc} & & H_{\mathbb{C}} & \supset & H_u \\ & & \curvearrowleft & & \curvearrowright \\ & & K_{\mathbb{C}} & & M_2 \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \curvearrowright \\ G_{\mathbb{C}} & & & & K_u \\ \curvearrowleft & & & & \curvearrowleft \\ G_u & \supset & M_1 & & \end{array}$$

TABLE 1. $G_u \backslash G_{\mathbb{C}} / H_{\mathbb{C}}$ に対する編み上げの手法

4. 定理 1.1 の証明

本章では , 前章で述べた各 step について解説を行う .

4.1. $G_u \backslash G_{\mathbb{C}} / K_{\mathbb{C}}$. この節では, $G_{\mathbb{C}} / K_{\mathbb{C}} = SL(2n+1, \mathbb{C}) / GL(2n, \mathbb{C})$ が対称空間であることを見よう. このとき, 補題 3.1 は事実 2.1 からしたがう.

$G_{\mathbb{C}}$ 上の対合的自己同型 θ_1 を $\theta_1(g) := I_{1,2n} g I_{1,2n}$ で定義する. ただし, $I_{1,2n} = \text{diag}(1, -1, -1, \dots, -1)$ とする. このとき, $G_{\mathbb{C}}^{\theta_1} = K_{\mathbb{C}}$ となる. また, $G_{\mathbb{C}}$ のカルタン対合 μ を $\mu(g) = ({}^t \bar{g})^{-1}$ とすると, μ は θ_1 と可換になる. よって, 事実 2.1 を適用することで補題 3.1 を得る.

実際に,

$$\mathfrak{a}_1 := \mathbb{R}(E_{1,2} + E_{2,1})$$

は $\mathfrak{g}^{-\theta_1, -\mu}$ の極大可換部分空間であり,

$$(4.1) \quad A_1 := \exp \mathfrak{a}_1 = \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} \cosh t & \sinh t & \\ \sinh t & \cosh t & \\ \hline & & I_{2n-1} \end{array} \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

となる.

4.2. $K_u \backslash K_{\mathbb{C}} / H_{\mathbb{C}}$. 前節と同様に, $K_{\mathbb{C}} / H_{\mathbb{C}} = GL(2n, \mathbb{C}) / Sp(n, \mathbb{C})$ も対称空間であるから, 再び事実 2.1 を用いることで補題 3.2 を得る.

実際に, $\theta_2(g) := (J'_n)^{-1} ({}^t g) J'_n$ ($g \in G_{\mathbb{C}}$) とおくと, $K_{\mathbb{C}}$ は θ_2 -安定で $H_{\mathbb{C}} = K_{\mathbb{C}}^{\theta_2}$ で与えられる. また, $G_{\mathbb{C}}$ のカルタン対合 μ の $K_{\mathbb{C}}$ への制限は $K_{\mathbb{C}}$ のカルタン対合を与え, $K_{\mathbb{C}}^{\mu} = S(U(1) \times U(n)) \simeq U(n)$ となる. また, μ は θ_2 と可換である.

ここで,

$$\mathfrak{a}_2 := \sum_{j=1}^n \mathbb{R}(E_{2j,2j} + E_{2j+1,2j+1})$$

とし,

$$(4.2) \quad A_2 := \exp \mathfrak{a}_2 = \{ \text{diag}(1, e^{t_1}, e^{t_1}, e^{t_2}, e^{t_2}, \dots, e^{t_n}, e^{t_n}) : t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R} \}$$

とすれば, 補題 3.2 を満たす.

4.3. $M_1 \backslash K_u / M_2$. 可換群 A_1 ((4.1) 参照) は K_u と可換ではないことに注意しておこう. よって, K_u における A_1 の中心化群 M_1 , さらに $H_u := H_{\mathbb{C}} \cap K_u$ における A_2 の中心化群 M_2 を用意し, 両側剰余空間 $M_1 \backslash K_u / M_2$ を具体的に考える必要がある.

2つの中心化群 M_1, M_2 は次のように表される：

$$M_1 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} aI_2 & \\ \hline & g \end{array} \right) \in K_u : a \in U(1), g \in U(2n-1) \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline & g_1 I_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & g_n I_2 \end{array} \right) \in K_u : g_1, \dots, g_n \in SU(2) \right\}.$$

よって，

$$(4.3) \quad M_1 \backslash K_u / M_2 \simeq U(2n-1) \backslash U(2n) / SU(2)^n =: K_1 \backslash K / K_2.$$

(4.3) の右辺に注目すると， $K/K_1 = U(2n)/U(2n-1)$ は $2n$ 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^{2n}$ 内の単位球面 S^{4n-1} と微分同相である．このことを利用して，まず S^{4n-1} における $K_2 = SU(2)^n$ の作用を考え，この作用による各軌道と交叉する部分多様体 T を構成しよう．

$\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{2n}\}$ を $\mathbb{C}^{2n}$ の標準正規直交基底とする．この基底による座標表示を用いると， $SU(2)^n$ の $\mathbb{C}^{2n}$ への作用は，

$$(g_1, \dots, g_n) \cdot {}^t(v_1, \dots, v_{2n}) = \begin{pmatrix} g_1 {}^t(v_1, v_2) \\ g_2 {}^t(v_3, v_4) \\ \vdots \\ g_n {}^t(v_{2n-1}, v_{2n}) \end{pmatrix}$$

で与えられる．特殊ユニタリ群の閉部分群 $SU(2)^n$ は $\mathbb{C}^{2n}$ の標準正規直交基底に関するエルミート内積を保存するので， $S^{4n-1} = \{v \in \mathbb{C}^{2n} : \|v\| = 1\}$ に作用する．

補題 4.1. S^{4n-1} の部分多様体 T_0 を

$$T_0 = \left\{ \sum_{j=1}^n r_j \vec{e}_{2j-1} \in S^{4n-1} : r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R} \right\} \simeq S^{n-1}.$$

このとき， $S^{4n-1} = K_2 \cdot T$.

Proof. $SU(2)$ の $\mathbb{C}^2$ による作用によって， $\mathbb{C}^2 = SU(2) \cdot \mathbb{R} {}^t(1, 0)$ と分解されることより，

$$T := \sum_{j=1}^n \mathbb{R} \vec{e}_{2j-1}$$

とおくと $\mathbb{C}^{2n} = K_2 \cdot T$ と分解される．よって，

$$S^{4n-1} = (K_2 \cdot T) \cap S^{4n-1} = K_2 \cdot (T \cap S^{4n-1}) = K_2 \cdot T_0.$$

□

次に、微分同相 $K/K_1 \simeq S^{4n-1}$, $gK_1 \mapsto g\vec{e}_1$ を通して、 K の部分群 B で $B/(B \cap K_1)$ が T_0 と微分同相となるものは次のように表される：

各 $j = 1, 2, \dots, n-1$ に対して、 K の 1 次元部分群 B_j を

$$B_j := \exp \mathbb{R}(E_{2j+1, 2j-1} - E_{2j-1, 2j+1}).$$

で定義する．これらを用いて、

$$B := B_{n-1}B_{n-2} \cdots B_2B_1$$

とおくと、 $B/(B \cap K_1) \simeq T_0$ となる．よって、補題 4.1 から、

$$K/K_1 = K_2 \cdot (B/(B \cap K_1)).$$

したがって、 $K = K_2BK_1$ という分解が得られた． K, K_1, K_2 は群であるから、次に命題を得る．

命題 4.2. $K = K_1B^{-1}K_2$. ただし、 $B^{-1} = B_1B_2 \cdots B_{n-1}$.

最後に、 $M_1 \backslash K_u / M_2 \simeq K_1 \backslash K / K_2$ から、次の命題が示された．

命題 4.3. $K_u = S(U(1) \times U(n))$ の部分集合 A_3 を次で定義する：

$$(4.4) \quad A_3 := 1 \times B^{-1}.$$

このとき、 $K_u = M_1A_3M_2$.

注意 4.4. B_j の定義より、 $B_jB_{j+1} \neq B_{j+1}B_j$ ($j = 1, 2, \dots, n-2$) であるため、 B は群ではない．よって、 A_3 は群ではない．

4.4. 定理 1.1 の証明. 以上の準備をもって、定理 1.1 の証明を与えよう．

Proof of 定理 1.1. $A := A_1A_3A_2$ とすると、(4.1), (4.2), (4.4) から A が (1.5) の形をしていることが分かる．また、この A に対して $G_{\mathbb{C}} = G_uAH_{\mathbb{C}}$ と分解されることは既に step 4 で見た．よって、定理 1.1 が示された． $\square$

注意 4.5. 第 4.2 節で定義した $G_{\mathbb{C}}$ の自己同型 θ_2 は、 $K_{\mathbb{C}}$ 上では対合的だが $G_{\mathbb{C}}$ 上では対合的ではない．ここで、 $\theta_2^2 = \theta_2 \circ \theta_2$ は第 4.1 節で定義した対合的自己同型 θ_1 に一致することが分かる．特に、 $\theta_2^4 = \text{id}$ を満たし、よって θ_2 は $G_{\mathbb{C}}$ 上の位数 4 の自己同型である．

さらに、 $H_{\mathbb{C}} = K_{\mathbb{C}}^{\theta_2} = (G_{\mathbb{C}}^{\theta_1})^{\theta_2} = G_{\mathbb{C}}^{\theta_2^2, \theta_2} = G_{\mathbb{C}}^{\theta_2}$ となる．つまり、 $H_{\mathbb{C}}$ は位数 4 の自己同型 θ_2 による固定点集合として表される．ゆえに、等質空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ は 4-対称空間である．

この視点による研究は現在進展中である．

5. APPLICATION TO VISIBLE ACTIONS ON $SL(2n+1, \mathbb{C})/Sp(n, \mathbb{C})$

最後に, 定理 1.1 の応用として非対称な複素等質空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}} = SL(2n+1, \mathbb{C})/Sp(n, \mathbb{C})$ における可視的作用を考えよう.

まず, 強可視的作用の定義を復習しよう. 連結な複素多様体 D にリー群 G が正則に作用しているとする. このとき, 次を満たす D の実部分多様体 S と D 上の反正則微分同相 σ が存在するとき, この作用を強可視的であるという ([2, Definition 3.3.1]):

$$(V.1) \quad D = G \cdot S,$$

$$(S.1) \quad \sigma|_S = \text{id}_S,$$

$$(S.2) \quad \sigma(x) \in G \cdot x \quad (\forall x \in D).$$

定理 1.1 によって $D = SL(2n+1, \mathbb{C})/Sp(n, \mathbb{C})$ は強可視的作用をもつ.

定理 5.1. $G_{\mathbb{C}}$ のコンパクトな実型 $G_u = SU(2n+1)$ は複素等質空間 $D = SL(2n+1, \mathbb{C})/Sp(n, \mathbb{C})$ に強可視的に作用する.

Proof. (V.1)–(S.2) を満たす S と σ が存在することを示せばよい.

(1.5) で述べた A に対して

$$(5.1) \quad S := AH_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$$

とおけば, 定理 1.1 によって

$$(5.2) \quad G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}} = G_u \cdot S$$

と分解される. よって, 上の S は (V.1) を満たす.

次に, $G_{\mathbb{C}}$ 上の反正則対合 σ を

$$\sigma(g) := \bar{g} \quad (g \in G_{\mathbb{C}})$$

とする. このとき, $H_{\mathbb{C}}$ は σ -安定なので, $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ 上の反正則微分同相を誘導する (同じ記号 σ を用いる):

$$\sigma(gH_{\mathbb{C}}) = \sigma(g)H_{\mathbb{C}} \quad (g \in G_{\mathbb{C}}).$$

$\sigma|_A = \text{id}_A$ であることが A の定義より確かめられる. よって, $\sigma|_S = \text{id}_S$ が得られる.

また, 任意の $x \in G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ に対して, (5.2) より $g \in G_u$ と $s \in S$ が存在して $x = g \cdot s$ と表される. このとき,

$$\sigma(x) = \sigma(g) \cdot \sigma(s) = \sigma(g) \cdot s = \sigma(g)g^{-1} \cdot x.$$

$\sigma(g)g^{-1} \in G_u$ より, $\sigma(x) \in G_u \cdot x$.

以上より, $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ における G_u の作用は強可視的である. $\square$

注意 5.2. $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ 上の正則関数のなす空間を $\mathcal{O}(G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}})$ と表すとき, この空間は $G_{\mathbb{C}}$ の表現として無重複に既約分解されることが知られている ([6]).

一方で, 定理 5.1 は $\mathcal{O}(G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}})$ が $G_{\mathbb{C}}$ の表現として無重複であることの別証明を与える ([2, 5] 参照).

注意 5.3. (5.1) で与えた S の次元は A の次元に等しく $2n$ である. これは, 等質空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ の階数 (および実階数) に等しい.

注意 5.4. $G_{\mathbb{C}}$ の反正則対合 σ について, $G_{\mathbb{C}}^{\sigma} = SL(2n+1, \mathbb{R})$ となる. $SL(2n+1, \mathbb{R})$ は $SL(2n+1, \mathbb{C})$ の正規実型であり, よって $G_u = G_{\mathbb{C}}^{\mu}$ を満たすカルタン対合 μ と σ は可換である.

一般の複素等質空間に対するコンパクト実型の作用による強可視性の証明についても, 正規実型を実現する反正則対合と, それと可換なカルタン対合によって, スライスの取り方について一般的な解釈が与えられるのではないかと予想している.

REFERENCES

- [1] M. Flensted-Jensen, Spherical functions of a real semisimple Lie group. A method of reduction to the complex case, *J. Funct. Anal.* **30** (1978), 106–146.
- [2] T. Kobayashi, Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **41** (2005), 497–549, special issue commemorating the fortieth anniversary of the founding of RIMS.
- [3] T. Kobayashi, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $(U(n_1) \times U(n_2) \times U(n_3)) \backslash U(n) / (U(p) \times U(q))$, *J. Math. Soc. Japan* **59** (2007), 669–691.
- [4] T. Kobayashi, Visible actions on symmetric spaces, *Transform. Groups* **12** (2007), 671–694.
- [5] T. Kobayashi, Propagation of multiplicity-free property for holomorphic vector bundles, *preprint*, arXiv: math.RT/0607004.
- [6] M. Krämer, Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen, *Composito Math.* **38** (1979), 129–153.
- [7] A. Sasaki, A characterization of non-tube type Hermitian symmetric spaces by visible actions, *Geom. Dedicata* **145** (2010), 151–158, doi: 10.1007/s10711-009-9412-z.

- [8] A. Sasaki, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $SU(2n+1)\backslash SL(2n+1, \mathbb{C})/Sp(n, \mathbb{C})$, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **17** (2010), 201–205.
- [9] A. Sasaki, Visible actions on the non-symmetric homogeneous space $SO(8, \mathbb{C})/G_2(\mathbb{C})$, *accepted for publication*.
- [10] É. B. Vinberg, B. N. Kimelfeld, Homogeneous domains on flag manifolds and spherical subgroups of semisimple Lie groups, *Funct. Anal. Appl.*, **12** (1978), 168–174.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE AND ENGINEERING,
WASEDA UNIVERSITY, OKUBO, SHINJUKU-KU, TOKYO, 169-8555 JAPAN.

E-mail address: atsumu@aoni.waseda.jp