Damek-Ricci 空間内のホロ球面の主曲率について

佐藤 弘康
(東京電機大学 情報環境学部)

1 はじめに

Damek-Ricci 空間とは一般化 Heisenberg 群（または H-type 群）とよばれる 2-step 冪零 Lie 群 N を 1 次元拡大した単連結可解 Lie 群 $S = AN$ にある左不変計量を入れた Riemann 多様体である．Damek-Ricci 空間は Hadamard 多様体（単連結，完備，非正曲率）であり，階数 1 非コンパクト型対称空間は負曲率 Damek-Ricci 空間と特徴付けられる [6]．また，調和多様体[*1]であり，Lichnerowicz 予想 [10] [*2]の反例となる空間である [5].

n 次元 Hadamard 多様体 M には理想境界とよばれる $(n-1)$ 次元多様体 ∂M が定まる．$\xi \in \partial M$ に対し，Busemann 関数とよばれる M 上の関数 $p \mapsto B(p,\xi)$ が定まる．この関数 $B(\,\cdot\,,\xi)$ の等位超曲面を $\xi \in \partial M$ を中心とするホロ球面とよぶ.

問題と主定理

Damek-Ricci 空間 $S = AN$ に対し，一般化 Heisenberg 群 N の Lie 環を $\mathfrak{n}$ とし，$\mathfrak{n}$ の中心を $\mathfrak{z}$，その直交補空間を $\mathfrak{v}$ とする．階数 1 非コンパクト型対称空間の場合，どのホロ球面も至るところ主曲率が $\frac{1}{2}, 1$ で，その重複度はそれぞれ $\dim \mathfrak{v}, \dim \mathfrak{z}$ である[*3]．では，対称空間ではない **Damek-Ricci 空間内のホロ球面の主曲率（Busemann 関数のヘッシアンの固有値）はどのような性質をもつのであろうか．** Damek-Ricci 空間 S はその構成の仕方から $S \simeq \mathfrak{v} \times \mathfrak{z} \times \mathbb{R}_+$ と同一視することができる．このとき，理想境界 ∂S は，$N\,(\simeq \mathfrak{n})$ に無限遠点を加えた集合 $N \cup \{\infty\}$ と同一視できる．この同一視のもとで，S のホロ球面の主曲率（つまり，Busemann 関数 B のヘッシアン ∇dB の固有値）が以下の性質を満たすことを明らかにした；

定理 1. $S = AN$ を Damek-Ricci 空間とし，その理想境界を $\partial S \simeq N \cup \{\infty\}$ と同一視する．このとき，無限遠点 $\infty \in \partial S$ を中心とするホロ球面の主曲率は $\frac{1}{2}, 1$ で，その重複度はそれぞれ

本研究は伊藤光弘 氏（筑波大学名誉教授）との共同研究に基づく.

[*1] 調和多様体とは，Riemann 体積要素 dv_g を任意の点 q を中心とする極座標で表すと $dv_g(p) = f(r)\,dr\,d\mu$ となる Riemann 多様体のことである．ただし $r = d(p,q)$ で $d\mu$ は $(n-1)$ 次元球面の標準体積要素．この定義の他にも同値な主張がいくつかある．詳細は [2] を参照.

[*2] 「調和多様体は階数 1 対称空間か Euclid 空間に限る」．次元が 4 の場合 [10] と空間がコンパクトの場合 [11] は予想が正しいことが証明されている．さらに，等質な調和多様体は Euclid 空間，階数 1 対称空間，Damek-Ricci 空間のいずれかであることがわかっている [7]．最近の進展については [9] を参照.

[*3] これは $\dim \mathfrak{z} \geq 1$ の場合．実双曲空間 $\mathbb{R}H^n$ の場合，$\dim \mathfrak{z} = 0$ であり，ホロ球面の主曲率は $\frac{1}{2}$ である.

$\dim \mathfrak{v}, \dim \mathfrak{z}$ である ($cf.$ [1, Proposition, p.88]).

定理 2. Damek-Ricci 空間 S 上の点 $p=(X,Z,a)\in S\simeq \mathfrak{v}\times\mathfrak{z}\times\mathbb{R}_+$ と，無限遠点でない理想境界上の点 $\xi=(x,z)\in N$ に対し，$\mathcal{X}=X-x, \mathcal{Z}=z-Z-\frac{1}{2}[X,x]$ とおく．このとき，

(1) $\mathcal{X}=0$ または $\mathcal{Z}=0$ のとき，$\nabla dB(p,\xi)$ の固有値は $0,\frac{1}{2},1$ でその重複度はそれぞれ 1, $\dim\mathfrak{v}$, $\dim\mathfrak{z}$ である．

(2) $\mathcal{X}\neq 0$ かつ $\mathcal{Z}\neq 0$ のとき，$\nabla dB(p,\xi)$ を接空間 T_pS の線形変換とみなすと $\nabla dB(p,\xi)$ の固有値は次の性質を満たす；
- $\mathrm{span}\{A,\mathcal{X},J_{\mathcal{Z}}\mathcal{X},\mathcal{Z}\}\subset\mathfrak{s}$ を左不変に拡張した T_pS の部分空間を V_1 とおく*4．このとき，V_1 は $\nabla dB(p,\xi)$ の不変部分空間で $\nabla dB(p,\xi)|_{V_1}$ の固有値は $0,\frac{1}{2},1$，重複度はそれぞれ $1,2,1$ である．
- V_1 の直交補空間 V_2 も $\nabla dB(p,\xi)$ の不変部分空間である．さらに，$\nabla dB(p,\xi)|_{V_2}$ の固有値が $\frac{1}{2},1$ で重複度がそれぞれ $(\dim\mathfrak{v}-2)$, $(\dim\mathfrak{z}-1)$ であることと，S は階数 1 非コンパクト型対称空間のいずれかであることは同値である．

研究の動機（**Hadamard** 多様体の **Poisson** 核）

Hadmard 多様体 M 上では古典的 Dirichlet 問題の類推として無限遠 Dirichlet 問題を考えることができる．つまり，境界条件 $f\in C^0(\partial M)$ に対して

$$\Delta_M u=0,\qquad u|_{\partial M}=f \tag{1.1}$$

を満たす関数 u を求める問題である（Δ_M は M 上の Laplace-Beltrami 作用素）．この方程式の基本解 $P(p,\xi)$ を Poisson 核とよぶ*5．つまり，

$$u(p)=\int_{\partial M} f(\xi)\,P(p,\xi)\,d\xi$$

が (1.1) の解となるような関数である．

階数 1 非コンパクト型対称空間の Poisson 核は Busemann 関数と M の体積エントロピー ρ *6を用いて

$$P(p,\xi)=\exp\left(-\rho\,B(p,\xi)\right) \tag{1.2}$$

と表される [3]．Damek-Ricci 空間上の Poisson 核については Damek[4] により具体的表示が得られている．一方，Itoh–S[8] は Damek-Ricci 空間の Busemann 関数を具体的に計算し，$\exp\left(-\rho\,B(p,\xi)\right)$ が Dirichlet 問題の基本解となることを示した（さらに，これは Damek の得た表記と一致する）．つまり，Damek-Ricci 空間の Poisson 核は対称空間であろうとなかろうと

*4 $X(\neq 0)\in\mathfrak{v}, Z(\neq 0)\in\mathfrak{z}$ を選び，$\mathfrak{s}_1=\mathrm{span}\{A,X,J_ZX,Z\}$ とおく．このとき，$\exp_{\mathbf{1}_S}(\mathfrak{s}_1)$ は複素双曲平面 $\mathbb{C}H^2$ に等長な全測地的部分多様体となる．

*5 いつでも存在するとは限らない．

*6 $\rho=\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{1}{r}\log \mathrm{vol}B(p;r)$．ただし，$B(p;r)$ は $p\in M$ を中心とする半径 r の測地球．体積エントロピーは基点 p の選び方には依らずに決まる定数である．

Busemann 関数の指数関数として表される．では，**Busemann** 関数の性質として，階数 **1** 非コンパクト型対称空間と非対称 **Damek-Ricci** 空間の違いはどの辺に現れるのであろうか，というのが本研究の動機である．

2 Hadamard 多様体，Busemann 関数，ホロ球面

(M,g) を n 次元 Hadamard 多様体，つまり完備，単連結，非正曲率 Riemann 多様体とする．M の 2 つの半開測地線 $\gamma_i : [0,\infty) \to M$ $(i=1,2)$ は，任意の t に対して $d(\gamma_1(t),\gamma_2(t)) < c$ を満たす正の数 c が存在するとき，漸近的であるという．これは M の半開測地線全体の集合に同値関係を定める．この同値関係による商空間を M の理想境界とよび，∂M と書く．

半開測地線 γ と $p \in M$ に対し，p を始点とし，γ に漸近的な半開測地線はただひとつ存在する．したがって，理想境界 ∂M は単位球面 $S^{n-1}(1) \subset T_pM$ と同一視できる．さらに $M \cup \partial M$ には n 次元閉円板と同相となるような自然な位相が定まる [12, p.300].

$p_0 \in M$ を固定し，$\xi \in \partial M$ に対して定まる M 上の関数

$$M \ni p \longmapsto B(p,\xi) = \lim_{t\to\infty} (d(\gamma_\xi(t),p) - t) \in \mathbb{R}$$

を $\boldsymbol{p_0}$ を基点とする **Busemann** 関数とよぶ[*7]．ただし，$\gamma_\xi(t)$ は基点 p_0 を始点とし，$\xi \in \partial M$ に漸近収束する半開測地線である Busemann 関数は C^1 級凸関数で勾配ベクトル $\mathrm{grad}B(\,\cdot\,,\xi)$ が至るところ $|\mathrm{grad}B| = 1$ を満たす関数と特徴づけられる [12, 補題 4.12, p.301].

Busemann 関数の等位超曲面

$$H_{(p,\xi)} := \{q \in M \mid B(q,\xi) = B(p,\xi)\}$$

を $\boldsymbol{p \in M}$ を通り，$\boldsymbol{\xi \in \partial M}$ を中心とするホロ球面とよぶ．

3 Damek-Ricci 空間

$\mathfrak{n} = (\mathfrak{n}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,], \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ を 2-step 冪零 Lie 環，$\mathfrak{z}$ を $\mathfrak{n}$ の中心，$\mathfrak{v}$ をその直交補空間とする．線形写像 $J : \mathfrak{z} \to \mathrm{End}(\mathfrak{v})$ を

$$\langle J_Z X, Y\rangle = \langle Z, [X,Y]\rangle \qquad (X, Y \in \mathfrak{v},\ Z \in \mathfrak{z}) \tag{3.1}$$

と定義する．任意の $Z \in \mathfrak{z}$ に対し，

$$J_Z \circ J_Z = -|Z|^2\,\mathrm{id}_{\mathfrak{v}}$$

が成り立つとき，$\mathfrak{n}$ を一般化 **Heisenberg** 環（または **H-type** 環）とよび，$\mathfrak{n}$ を Lie 環とする単連結 Lie 群 N を一般化 **Heisenberg** 群（または **H-type** 群）とよぶ．

[*7] 点 $q_0(\neq p_0) \in M$ を基点とする Busemann 関数を $B'(p,\xi)$ とする．このとき B と B' は定数の違いしか持たない．つまり，各 $\xi \in \partial M$ に対し，$B'(p,\xi) = B(p,\xi) + c_\xi$ となる定数 c_ξ が存在する (特に $c_\xi = B'(p_0,\xi) = -B(q_0,\xi)$).

補題 3. $\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}$ を一般化 Heisenberg 環とする．このとき，任意の $X, Y \in \mathfrak{v}$，$Z, W \in \mathfrak{z}$ に対し，以下が成り立つ；

(1) $J_Z \circ J_W + J_W \circ J_Z = -2\langle Z, W\rangle \mathrm{id}_{\mathfrak{v}}$
(2) $\langle J_Z X, Y\rangle = -\langle X, J_Z Y\rangle$
(3) $\langle J_Z X, J_Z Y\rangle = |Z|^2\langle X, Y\rangle$
(4) $\langle J_Z X, J_W Y\rangle + \langle J_W X, J_Z Y\rangle = 2\langle X, Y\rangle\langle Z, W\rangle$
(5) $\langle J_Z X, J_W X\rangle = |X|^2\langle Z, W\rangle$
(6) $[J_Z X, Y] - [X, J_Z Y] = -2\langle X, Y\rangle Z$
(7) $[J_Z X, J_W X] = [X, J_Z \circ J_W X]$
(8) $[J_Z X, J_Z Y] = -|Z|^2[X, Y] - 2\langle X, J_Z Y\rangle Z$
(9) $[X, J_Z X] = |X|^2 Z$

$\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}$ を一般化 Heisenberg 環とする．任意の $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{z}$（ただし，$\langle Z_1, Z_2\rangle = 0$）と任意の $X \in \mathfrak{v}$ に対して，

$$J_{Z_1}(J_{Z_2}X) = J_{Z_3}X$$

となる $Z_3 \in \mathfrak{z}$ が存在するとき，$\mathfrak{n}$ は $\boldsymbol{J^2}$ **条件を満たす**という．

一般化 Heisenberg 環 $\mathfrak{n}$ の 1 次元拡大 $\mathfrak{s} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z} \oplus \mathbb{R}A$ にブラケット積 $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{s}}$ と内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{s}}$ を

$$[X + Z + lA, X' + Z' + l'A]_{\mathfrak{s}} = \left(\frac{l}{2}X' - \frac{l'}{2}X\right) + (lZ' - l'Z + [X, X']),$$

$$\langle X + Z + lA, X' + Z' + l'A\rangle_{\mathfrak{s}} = \langle X, X'\rangle + \langle Z, Z'\rangle + ll'$$

と定義する．$(\mathfrak{s}, [\,\cdot\,,\cdot\,]_{\mathfrak{s}})$ を Lie 環とし，$\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_{\mathfrak{s}}$ を左不変に拡張した計量を備えた単連結 Lie 群 S を **Damek-Ricci** 空間とよぶ．$S \simeq \mathfrak{v} \times \mathfrak{z} \times \mathbb{R}_+$ と同一視すると S の群構造は

$$(X, Z, a) \cdot (X', Z', a') = \left(X + \sqrt{a}X',\, Z + aZ' + \frac{\sqrt{a}}{2}[X, X'],\, aa'\right).$$

で与えられる．Damek-Ricci 空間 S は Hadamard 多様体であり，S の断面曲率が至るところ負になるための必要十分条件は，S の一般化 Heisenberg 環 $\mathfrak{n}$ が J^2 条件を満たすことである．さらに $\mathfrak{n}$ が J^2 条件を満たすとき，S は階数 1 非コンパクト型対称空間（$\mathbb{R}H^n$，$\mathbb{C}H^n$，$\mathbb{H}H^n$，$\mathrm{Cay}H^2$）のいずれかである．つまり，階数 1 非コンパクト型対称空間は負曲率 Damek-Ricci 空間と特徴付けることができる（詳細は [1] を参照）．

次の命題から，Damek-Ricci 空間 $S = AN$ の理想境界 ∂S は S の一般化 Heisenberg 群 N に無限遠点 ∞ を加えた集合 $N \cup \{\infty\}$ と同一視できることがわかる；

命題 4. S の単位元 $e = (0, 0, 1)$ を始点とし，$\gamma'(0) = V + Y + sA \in \mathfrak{s}$ （ただし，$V \in \mathfrak{v}$, $Y \in \mathfrak{z}$, $|V|^2 + |Y|^2 + s^2 = 1$）となる測地線 $\gamma : \mathbb{R} \to S$ は

$$\gamma(t) = \left(\frac{2\theta(1 - s\theta)}{\chi}V + \frac{2\theta^2}{\chi}J_Y V,\, \frac{2\theta}{\chi}Y,\, \frac{1 - \theta^2}{\chi}\right) \tag{3.2}$$

で与えられる（[1, Theorem 1, p.93]）．ここで，θ, χ は t の関数で

$$\theta = \tanh\left(\frac{t}{2}\right), \qquad \chi = (1 - s\,\theta)^2 + |Y|^2\theta^2.$$

特に，この測地線 γ の極限は

$$\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{2}{\chi_\infty}((1-s)V + J_Y V),\ \dfrac{2}{\chi_\infty}Y,\ 0\right) & (s \neq 1) \\ (0, 0, \infty) & (s = 1) \end{cases} \tag{3.3}$$

となる．ただし，$\chi_\infty = \lim_{t\to\infty} \chi = (1-s)^2 + |Y|^2 = 2(1-s) - |V|^2$.

4 Damek-Ricci 空間上の Busemann 関数

Damek-Ricci 空間 S を $\mathfrak{v} \times \mathfrak{z} \times \mathbb{R}_+$，その理想境界 ∂S を $N \cup \{\infty\}$ と同一視するとき，S の Busemann 関数は以下の式で表される；

定理 5 ([8])**.** Damek-Ricci 空間 S の単位元 $e = (0, 0, 1)$ を基点とする Busemann 関数は

(i) $\xi = \infty$ のとき，

$$B(p, \infty) = -\log a, \tag{4.1}$$

(ii) $\xi = (x, z) \in N$ のとき，

$$B(p, \xi) = \log\left(\frac{\left(a + \frac{1}{4}|x - X|^2\right)^2 + \left|z - Z - \frac{1}{2}[X, x]\right|^2}{a\left(\left(1 + \frac{1}{4}|x|^2\right)^2 + |z|^2\right)}\right) \tag{4.2}$$

で与えられる．ただし $p = (X, Z, a) \in S \simeq \mathfrak{v} \times \mathfrak{z} \times \mathbb{R}_+$.

Proof. $\gamma(t)$ を $\gamma(0) = e$，$\gamma'(0) = V + Y + sA$ （ただし，$|V|^2 + |Y|^2 + s^2 = 1$）を満たす測地線とする．Busemann 関数の定義より，

$$\begin{aligned} B(p, \xi) &= \lim_{t\to\infty} (d(p, \gamma(t)) - t) \\ &= \lim_{t\to\infty} \left(d(e, p^{-1} \cdot \gamma(t)) - t\right) \end{aligned}$$

となる．ここで，距離関数 $d(e, \cdot\,)$ は以下の式で表される；

補題 6 ([1, Section 4.4])**.**

$$d(e, p) = \log\left(\frac{\lambda - 2 + \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}{2}\right). \tag{4.3}$$

ただし，λ は $p = (X, Z, a)$ の関数で

$$\lambda = \lambda(p) = \frac{1}{a}\left\{\left(1 + a + \frac{1}{4}|X|^2\right)^2 + |Z|^2\right\}. \tag{4.4}$$

このことから，

$$B(p,\xi)=\lim_{t\to\infty}\log\left(\frac{\lambda-2}{2e^t}+\sqrt{\left(\frac{\lambda-2}{2e^t}\right)^2-\frac{1}{e^{2t}}}\right),\qquad \lambda=\lambda(p^{-1}\cdot\gamma(t)) \tag{4.5}$$

と書ける．したがって，$\lim_{t\to\infty}(\lambda-2)/e^t$ の値がわかればよい．

$p^{-1}\cdot\gamma(t)=(X(t),Z(t),a(t))$ とおく．つまり，

$$\begin{cases} X(t)=\dfrac{1}{\sqrt{a}}\left(-X+\dfrac{2\theta(1-s\theta)}{\chi}V+\dfrac{2\theta^2}{\chi}J_YV\right),\\ Z(t)=\dfrac{1}{a}\left(-Z+\dfrac{2\theta}{\chi}Y-\dfrac{1}{2}\left[X,\dfrac{2\theta(1-s\theta)}{\chi}V+\dfrac{2\theta^2}{\chi}J_YV\right]\right),\\ a(t)=\dfrac{1-\theta^2}{a\chi}. \end{cases} \tag{4.6}$$

このとき，

$$\begin{aligned} \frac{\lambda-2}{e^t}&=\frac{1}{e^t}\left\{\frac{1}{a(t)}\left(\left(a(t)+1+\frac{1}{4}|X(t)|^2\right)^2+|Z(t)|^2\right)-2\right\}\\ &=\frac{a(t)}{e^t}+\frac{|X(t)|^2}{2e^t}+\frac{1}{a(t)e^t}\left\{\left(1+\frac{1}{4}|X(t)|^2\right)^2+|Z(t)|^2\right\} \end{aligned} \tag{4.7}$$

となる．

(i) $s=1$ の場合：このとき，$V=0,Y=0$ であるから，$\chi=(1-\theta)^2$ となり，(4.6) は

$$\begin{cases} X(t)=-\dfrac{1}{\sqrt{a}}X,\\ Z(t)=-\dfrac{1}{a}Z,\\ a(t)=\dfrac{1+\theta}{a(1-\theta)}=\dfrac{e^t}{a} \end{cases} \tag{4.8}$$

となる．(4.7), (4.8) より $\lim_{t\to\infty}(\lambda-2)/e^t=1/a$．したがって (4.1) を得る．

(ii) $s\neq 1$ の場合： 任意の $t\geq 0$ に対し，χ は有界であるから，$|X(t)|^2,|Z(t)|^2$ も共に有界である．さらに

$$a(t)=\frac{4}{a\chi}\cdot\frac{1}{e^t+e^{-t}+2}, \tag{4.9}$$

と書けるので，$X_\infty=\lim_{t\to\infty}X(t)$，$Z_\infty=\lim_{t\to\infty}Z(t)$ とおくと，(4.7), (4.9) より

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\lambda-2}{e^t}=a\cdot\frac{\chi_\infty}{4}\cdot\left\{\left(1+\frac{1}{4}|X_\infty|^2\right)^2+|Z_\infty|^2\right\} \tag{4.10}$$

を得る．ここで，$\xi=\lim_{t\to\infty}\gamma(t)=(x,z,0)$ とおくと，(3.3) より

$$X_\infty=\frac{1}{\sqrt{a}}(x-X),\qquad Z_\infty=\frac{1}{a}\left(z-Z-\frac{1}{2}[X,x]\right)$$

となる．したがって，

$$\left(1+\frac{1}{4}|X_\infty|^2\right)^2+|Z_\infty|^2=\frac{1}{a^2}\left\{\left(a+\frac{1}{4}|x-X|^2\right)^2+\left|z-Z-\frac{1}{2}[X,x]\right|^2\right\}. \tag{4.11}$$

一方，

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{4}|x|^2\right)^2+|z|^2&=\left\{1+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{(\chi_\infty)^2}\left((1-s)^2|V|^2+|Y|^2|V|^2\right)\right\}^2+\frac{4}{(\chi_\infty)^2}|Y|^2\\&=\left\{1+\frac{|V|^2}{(\chi_\infty)^2}\left((1-s)^2+|Y|^2\right)\right\}^2+\frac{4}{(\chi_\infty)^2}|Y|^2\\&=\left(1+\frac{|V|^2}{\chi_\infty}\right)^2+\frac{4}{\chi_\infty^2}|Y|^2\\&=\frac{4(1-s)^2}{\chi_\infty^2}+\frac{4}{\chi_\infty^2}|Y|^2=\frac{4}{\chi_\infty}\end{aligned} \tag{4.12}$$

であるから，(4.5), (4.10), (4.11), (4.12) より，(4.2) を得る． □

5　定理 2 の証明の概略

ホロ球面の主曲率は Busemann 関数のヘッシアン ∇dB の固有値である．定理 5 で得られた Busemann 関数のヘッシアンを計算し，固有値について考察する．

step1：ヘッシアンの成分

$\mathfrak{v}$，$\mathfrak{z}$ の正規直交基底 $\{e_i\}_{i=1,\dots,k},\{f_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,m}$ を適当に選び，$\mathfrak{s}$ の正規直交基底 $\{A,e_i,f_\alpha\}$ を左不変に拡張した正規直交枠 $\{A_0,E_i,F_\alpha\}$ を構成する．この正規直交枠に関して S の Levi-Civita 接続は以下の式で表される（[1, p.84]）；

$$\nabla_{E_i}A_0=-\frac{1}{2}E_i,\quad \nabla_{E_i}E_j=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{m}\langle f_\alpha,[e_i,e_j]\rangle F_\alpha+\frac{1}{2}\delta_{ij}A_0,$$

$$\nabla_{F_\alpha}A_0=-F_\alpha,\quad \nabla_{E_i}F_\alpha=\nabla_{F_\alpha}E_i=-\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{k}\langle f_\alpha,[e_i,e_h]\rangle E_h,$$

$$\nabla_{F_\alpha}F_\beta=\delta_{\alpha\beta}A_0,\quad \nabla_{A_0}A_0=\nabla_{A_0}E_i=\nabla_{A_0}F_\alpha=0.$$

これを用いて，$\nabla dB_{(p,\xi)}$ の成分を計算すると

$$\begin{aligned}\nabla dB(A_0,A_0)=&\frac{2a}{F}\left(f+a-\frac{2af^2}{F}\right),\\ \nabla dB(A_0,E_i)=&\frac{a\sqrt{a}}{F}\langle\mathcal{X},e_i\rangle+\frac{\sqrt{a}}{F}\left(\frac{1}{2}-\frac{2af}{F}\right)\langle f\mathcal{X}-J_{\mathcal{Z}}\mathcal{X},e_i\rangle,\\ \nabla dB(A_0,F_\alpha)=&\frac{2a}{F}\left(\frac{2af}{F}-1\right)\langle\mathcal{Z},f_\alpha\rangle,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla dB(E_i,E_j) =& \frac{a}{2F}\left\{\langle \mathcal{X}, e_i\rangle \cdot \langle \mathcal{X}, e_j\rangle + \langle [e_i,\mathcal{X}],[e_j,\mathcal{X}]\rangle \right.\\
&\left. -\frac{2}{F}\langle f\mathcal{X} - J_{\mathcal{Z}}\mathcal{X}, e_i\rangle\langle f\mathcal{X} - J_{\mathcal{Z}}\mathcal{X}, e_j\rangle\right\} + \frac{1}{2}\delta_{ij},\\
\nabla dB(E_i,F_\alpha) =& \frac{2a\sqrt{a}}{F^2}\langle f\mathcal{X} - J_{\mathcal{Z}}\mathcal{X}, e_i\rangle\langle \mathcal{Z}, f_\alpha\rangle + \frac{\sqrt{a}}{2F}\langle [e_i,(f-2a)\mathcal{X} - J_{\mathcal{Z}}\mathcal{X}], f_j\rangle,\\
\nabla dB(F_\alpha,F_\beta), =& -\frac{4a^2}{F^2}\langle \mathcal{Z}, f_\alpha\rangle\langle \mathcal{Z}, f_\beta\rangle + \frac{1}{F}\left\{F - 2a(f-a)\right\}\delta_{\alpha\beta}
\end{aligned}
$$

となる．ただし，$\mathcal{X} = X - x,\ \mathcal{Z} = z - Z - \frac{1}{2}[X,x],\ f = a + \frac{1}{4}|\mathcal{X}|^2,\ F = f^2 + |\mathcal{Z}|^2$.

step2：$\mathfrak{v}$ の分解

2-step 冪零 Lie 環 $\mathfrak{n}$ の中心の直交補空間 $\mathfrak{v}$ は $\mathcal{X} \in \mathfrak{v}$ をひとつ選ぶことにより

$$
\mathfrak{v} = \ker(\mathrm{ad}(\mathcal{X})) \oplus J_{\mathfrak{z}}\mathcal{X}
$$

と直和分解される．そこで，$\mathcal{X} \neq 0$ かつ $\mathcal{Z} \neq 0$ のとき，正規直交基底 $\{e_i\}$, $\{f_j\}$ を改めて以下のように選ぶ；

- $\mathcal{X} = |\mathcal{X}|\, e_1,\ \mathcal{Z} = |\mathcal{Z}|\, f_1$.
- $\ker(\mathrm{ad}(\mathcal{X})) = \mathrm{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_{k-m}\}$.
- $J_{\mathfrak{z}}\mathcal{X} = \mathrm{span}\{e_{k-m+\alpha} = J_{f_\alpha}e_1 \,|\, \alpha = 2,\ldots,m\}$.
- $\mathcal{Z}^\perp = \mathrm{span}\{f_2,\ldots,f_m\}$.

これらを左不変に拡張した正規直交枠に関する $\nabla dB(p,\xi)$ の成分は

$$
\begin{aligned}
\nabla dB(A_0,E_1) &= \frac{\sqrt{a(f-a)}}{F}\left(f + 2a + \frac{4af}{F}\right),\\
\nabla dB(A_0,F_1) &= \frac{2a}{F}\left(\frac{2af}{F} - 1\right)\sqrt{F - f^2},\\
\nabla dB(E_1,E_1) &= -\frac{4a(f-a)}{F}\left(\frac{f^2}{F} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2},\\
\nabla dB(E_1,F_1) = \nabla dB(A_0,E_{(k-m)+1}) &= \frac{\sqrt{a(f-a)(F-f^2)}}{F}\left(\frac{4af}{F} - 1\right),\\
\nabla dB(E_1,E_{(k-m)+1}) &= \frac{4af}{F^2}(f-a)\sqrt{F-f^2},\\
\nabla dB(E_{(k-m)+1},E_{(k-m)+1}) &= \frac{4a(f-a)}{F^2}\left(\frac{f^2}{F} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2},\\
\nabla dB(E_{(k-m)+1},F_1) &= \frac{\sqrt{a(f-a)}}{F}\left(\frac{4af^2}{F} - (f+2a)\right),\\
\nabla dB(F_1,F_1) &= \frac{4a^2f^2}{F^2} + 1 - \frac{2a(f+a)}{F},
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla dB(E_i,E_j)=\frac{1}{2}\delta_{ij},\quad \nabla dB(E_i,F_\alpha)=-\frac{\sqrt{a}}{2F}\langle[e_i,J_{\mathcal{Z}}\mathcal{X}],f_\alpha\rangle,\\
\nabla dB(E_{(k-m)+\alpha},E_{(k-m)+\beta})=\left(\frac{2a(f-a)}{F}+\frac{1}{2}\right)\delta_{\alpha\beta},\\
\nabla dB(E_{(k-m)+\alpha},F_\beta),=-\frac{(f-2a)\sqrt{a(f-a)}}{F}\delta_{\alpha\beta}-\frac{1}{4F}\sqrt{\frac{a}{f-a}}\langle[J_{f_\alpha}\mathcal{X},J_{\mathcal{Z}}\mathcal{X}],f_\beta\rangle,\\
\nabla dB(F_\alpha,F_\beta)=\left(1-\frac{2a(f-a)}{F}\right)\delta_{\alpha\beta}
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

となる（$\nabla dB(A_0,A_0)$ 以外のその他の成分は消える）．以上のことから，$\nabla dB(p,\xi)$ は

$$
\nabla dB(p,\xi)=\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix}
$$

と 2 つの行列のブロックに分割される．

step3：B_1 について

$B_1=\nabla dB_{(p,\xi)}|_{V_1}$ とおく（成分は (5.1)）．V_1 は grad$B$ を含む部分空間であるから，B_1 は固有値 0 を持つ．さらに，

$$
\text{(i) } \det(B_1-I_4)=0,\quad \text{(ii) } \det(B_1-\tfrac{1}{2}I_4)=0,\quad \text{(iii) } \mathrm{trace}(B_1)^2=\frac{3}{2}
$$

が成り立つ（I_n は n 次単位行列）．これは，4 次正方行列 B_1 が (i) 固有値 1 と (ii) 固有値 $\frac{1}{2}$ をもち，(ii) 固有値の 2 乗和が $\frac{3}{2}$ に等しいことを意味する．したがって，B_1 の固有値は $0, \frac{1}{2}, 1$ で，重複度はそれぞれ 1, 2, 1 である．

step4：B_2 について

$B_2=\nabla dB_{(p,\xi)}|_{V_2}$ とおくと

$$
B_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}I_{k-m-1} & O & A \\ O & c_1I_{m-1} & c_3I_{m-1}+C \\ {}^tA & c_3I_{m-1}-C & c_2I_{m-1} \end{pmatrix}
\tag{5.3}
$$

と表すことができる（成分は (5.2)）．ここで，C は歪対称行列で

$$
C^2=c_4I_{m-1}+\ {}^tA\cdot A,\quad c_4=-\frac{a(f-a)(F-f^2)}{F^2}
$$

を満たす．一方，c_1,c_2,c_3 は S 上の関数で

$$
c_1+c_2=\frac{3}{2},\quad c_1c_2-(c_3)^2+c_4=\frac{1}{2}
$$

を満たす．また，${}^tA\cdot A$ は次のような意味を持つ；$\mathfrak{v}$ の分解 $\mathfrak{v}=\ker(\mathrm{ad}(\mathcal{X}))\oplus J_{\mathfrak{z}}\mathcal{X}$ より，各 $\alpha=2,\dots,m$ に対し，

$$
J_{f_\alpha}(J_{\mathcal{Z}}\mathcal{X})=\mathcal{Y}_\alpha+J_{\mathcal{Z}_\alpha}\mathcal{X}
$$

を満たす $\mathcal{Y}_\alpha\in\ker(\mathrm{ad}(\mathcal{X}))$，$\mathcal{Z}_\alpha\in\mathfrak{z}$ が存在する．${}^tA\cdot A$ は $\frac{a}{4F^2}\langle\mathcal{Y}_\alpha,\mathcal{Y}_\beta\rangle$ を成分に持つ行列である．つまり，$\mathfrak{n}$ が J^2 条件を満たすための必要十分条件は ${}^tA\cdot A=O$ となることである．

以上を踏まえて B_2 の固有多項式を計算すると

$$\det(tI-B_2)=(t-1)^{m-1-r}\left(t-\frac{1}{2}\right)^{k-2-2r}\det\left((t-1)\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 I_r+A'\right) \tag{5.4}$$

を得る．ここで，A' は $r\,(=\mathrm{rank}(A))$ 次対角行列で，対称行列 ${}^tA\cdot A$ を直交行列で対角化した行列（から非零固有値のブロックだけをとりだした行列）である．したがって (5.4) より，B_2 は $\frac{1}{2}, 1$ を固有値として持つ（重複度はそれぞれ $(k-2r-2), (m-r-1)$）．また，

$$\begin{aligned}
&B_2 \text{ の固有値が } \tfrac{1}{2},\ 1 \text{ で重複度がそれぞれ } (k-2),\ (m-1).\\
&\iff A'=O\ (\iff {}^tA\cdot A=O)\\
&\iff \mathfrak{n} \text{ は } J^2\text{-条件を満たす.}\\
&\iff S \text{ は階数 1 非コンパクト型対称空間.}
\end{aligned}$$

となる．

注意 7. $\dim\mathfrak{v}=4, \dim\mathfrak{z}=2$ のとき, S は対称空間ではない最小次元 $(\dim S=7)$ の Damek-Ricci 空間となる．この場合，(5.3) の歪対称行列 C の部分は消え，B_2 の固有多項式は

$$\det(tI-B_2)=(t-1)\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2a^2(f-a)^2(F-f^2)}{F^3}$$

となる．$\mathcal{X}\neq 0, \mathcal{Z}\neq 0$ のとき，上式の第 2 項が消えることはない．したがって，固有値は必ず $\frac{1}{2}, 1$ 以外の値となる．

注意 8. Damek-Ricci 空間 S は調和多様体である．このとこから，以下のことがわかる．

(1) S は漸近的調和多様体である．つまり，任意のホロ球面は平均曲率が一定で，さらにどれも共通一定値をとる．したがって，ホロ球面の主曲率の和は常に $\frac{1}{2}\dim\mathfrak{v}+\dim\mathfrak{z}$ に等しい．さらに

(2) S は Einstein 多様体で，$\mathrm{Ric}=-\left(\frac{1}{4}\dim\mathfrak{v}+\dim\mathfrak{z}\right)g$ となる．$|\mathrm{grad}B|^2\,(=1)$ に Bochner の公式を適用することにより

$$|\nabla dB|^2=-\mathrm{Ric}(\mathrm{grad}B,\mathrm{grad}B)$$

を得る．つまり，ホロ球面の主曲率の **2** 乗和は常に $\frac{1}{4}\dim\mathfrak{v}+\dim\mathfrak{z}$ に等しい．

参考文献

[1] J. Berndt, F. Tricerri and L. Vanhecke, Generalized Heisenberg groups and Damek-Ricci harmonic spaces, Lecture Notes in Math. **1598**, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[2] A.L. Besse, Manifolds all of whose geodesics are closed, Ergeb. Math. Grenzgeb. **93**, Springer Verlag, Berlin-New York, 1978.

[3] G. Besson, G. Courtois and S. Gallot, *Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative*, Geom. Funct. Anal. **5** (1995), 731-799.

[4] E. Damek, *A Poisson kernel on Heisenberg type nilpotent groups*, Colloq. Math. **53** (1987), 239—247.

[5] E. Damek, F. Ricci, *A class of nonsymmetric harmonic Riemannian spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **27** (1992), 139-142.

[6] M.J. Druetta, *Homogeneous Riemannian manifolds and the visibility axiom*, Geom. Dedicata **17** (1985), 239-251.

[7] J. Heber, *On harmonic and asymptotically harmonic homogeneous spaces*, Geom. Funct. Anal. **16** (2006), 869-890.

[8] M. Itoh and H. Satoh, *Information geometry of Poisson kernels on Damek-Ricci spaces*, Tokyo J. Math. **33**, (2010), 129-144.

[9] G. Knieper, *New results on noncompact harmonic manifolds*, arXiv:0910.3872v1.

[10] A. Lichnerowicz, *Sur les espaces riemanniens complèment harmoniques*, Bull. Soc. Math. France **72** (1944), 146-168.

[11] Z. I. Szabó, *The Lichnerowicz conjecture on harmonic manifolds*, J. Differential Geom. **31** (1990), 1-28.

[12] 酒井 隆, リーマン幾何学, 数学選書 11, 裳華房, 1992.