双曲空間内の完備実超曲面

塩濱勝博・福大理学部

October 1, 2010

1 Introduction

定曲率 $c > 0$ の標準的 n-球面 $\mathbf{S}^n(c)$ 内の完備全臍超曲面は距離球面である事はよく知られている．球面以外の階数 1 のコンパクト対称空間内の完備実超曲面が距離球面となる為に主曲率と shape operator の固有空間が満たすべき条件は [6], [5] で調べた．ここでは正則断面曲率が一定 $-4c$ の双曲空間内の完備実超曲面について考察する．この話題に関連する斉次超曲面及び主曲率一定の実超曲面のローカルな結果は例えば J.Berndt [1], J.Berndt-田丸博士 [2], Berndt-Ramoz-Carlos [3], [4] 等がある．完備性を仮定して全体像を決める事に意味があるだろう．我々は係数体の選択に無関係且つ射影空間、双曲空間の選択にも影響されない議論を展開したいのだが，射影空間の場合のみ完成し，双曲空間の場合は不完全である．本稿は途中経過である事をあらかじめお断りしたい．ここでは matrix Jacobi tensor を使う．

$\widetilde{M}^n = \mathbb{K}\mathrm{H}^k(-4c)$, $\mathbb{K}\mathrm{P}^k(c)$ は正則断面曲率 $-4c$, c の実 n 次元双曲 (射影) 空間で，$n = (\lambda+1)k$, $\lambda = 1, 3, 7$, $k \geq 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $(\lambda = 1)$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ $(\lambda = 3)$，$\mathbb{K} = \mathbb{C}a$ ($\lambda = 7$ 且つ $k = 2$) である．

$\widetilde{M}^n$ の各点 $\tilde{p}$ における接空間 $T_{\tilde{p}}\widetilde{M}^n$ は単位ベクトル $\xi \in T_{\tilde{p}}\widetilde{M}^n$ を任意に与えると以下の直交分解を許容する：

$$T_{\tilde{p}}\widetilde{M}^n = \mathrm{span}\{\xi\} \oplus \mathcal{H}_\xi \oplus \mathcal{A}\mathcal{H}_\xi.$$

ここに $\mathrm{span}\{u_1, \ldots, u_m\}$ はベクトル $u_1, \ldots, u_m$ の張る線形空間で，

$$\mathcal{H}_\xi := \{u \in T_{\tilde{p}}\widetilde{M}^n \,|\, (\xi, u) \text{ は正則断面 }\}, \quad \dim \mathcal{H}_\xi = \lambda$$

$$\mathcal{A}\mathcal{H}_\xi := \{v \in T_{\tilde{p}}\widetilde{M}^n \,|\, (\xi, u) \text{ は反正則断面 }\}, \quad \dim \mathcal{A}\mathcal{H}_\xi = (\lambda+1)(k-1).$$

双曲空間 $\widetilde{M}^n$ の $(1,1)$-型構造テンソルを $\phi_1,\ldots,\phi_\lambda$ とすると，$\mathcal{H}_\xi$ は $\mathcal{H}_\xi = \mathrm{span}\{\phi_1\xi,\cdots,\phi_\lambda\xi\}$ を満たし，ベクトル ξ が定める曲率変換 $u \mapsto \widetilde{R}(u,\xi)\xi,\ u \in T_{\tilde{p}}\widetilde{M}^n$ の正則断面曲率に対応する固有空間で，$\mathcal{AH}_\xi$ は反正則断面曲率に対応する固有空間である．$\lambda = 1$ のとき、ϕ_1 は複素構造 J に他ならない.

以下に記す 3 種類の部分多様体はこの研究で極めて重要である．ξ に接する測地線を $\gamma : \mathbf{R} \to \widetilde{M}^n,\ \dot\gamma(0) := \xi$ とする．後で，ξ は実超曲面の単位法ベクトルとする.

ξ が定める $\mathbb{K}$-直線 $\mathfrak{L}_\xi^{\lambda+1}$ はその断面曲率が正則断面曲率に等しい実 $(\lambda+1)$-次元双曲 (射影) 空間に等長的な全測地的部分多様体で $\gamma(\mathbf{R})$ を含む．指数写像で表すと：

$$\mathfrak{L}_\xi^{\lambda+1} := \exp_{\tilde{p}} \mathrm{span}\{\xi\} \oplus \mathcal{H}_\xi = \exp_{\gamma(t)} \mathrm{span}\{\dot\gamma(t)\} \oplus \mathcal{H}_{\dot\gamma(t)}, \quad t \in \mathbf{R}$$
$$T_{\gamma(t)}\mathfrak{L}_\xi^{\lambda+1} = \mathrm{span}\{\dot\gamma(t)\} \oplus \mathcal{H}_{\dot\gamma(t)}, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

ξ が定める $\widetilde{M}^n$ の $\mathbb{K}$-超平面 $\mathbb{K}\mathrm{H}_\xi^{k-1}(-4c)$, $\mathbb{K}\mathrm{P}_\xi^{k-1}(c)$ は $\mathbb{K}\mathrm{H}^{k-1}(-4c)$, $\mathbb{K}\mathrm{P}^{k-1}(c)$ に等長的な全測地的部分多様体である．指数写像で表せば

$$\exp_{\tilde{p}} \mathcal{AH}_\xi = \mathbb{K}\mathrm{H}_\xi^{k-1}(-4c), \quad \text{又は} \quad \exp_{\tilde{p}} \mathcal{AH}_\xi = \mathbb{K}\mathrm{P}_\xi^{k-1}(c).$$

ξ が定めるもう一つの部分多様体 $\mathfrak{M}_\xi^{n-\lambda}$ は $\gamma(\mathbf{R})$ を含む実 $(n-\lambda)$-次双曲 (射影) 空間である．ξ が定める $\mathbb{K}$-超平面の一点 $\tilde{p}$ に於いて $\gamma(\mathbf{R})$ は単位法線である．ξ が生成する単位法ベクトル場を Ξ とすると

$$\mathfrak{M}_\xi^{n-\lambda} := \{\exp_{\tilde{q}} t\Xi(\tilde{q}) \,|\, t \in \mathbf{R},\ \tilde{q} \in \exp_{\tilde{p}} \mathcal{AH}_\xi\}$$
$$T_{\gamma(t)}\mathfrak{M}_\xi^{n-\lambda} = \langle\dot\gamma(t)\rangle \oplus \mathcal{AH}_{\dot\gamma(t)}, \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

これらの共通部分は $\mathfrak{L}_\xi^\lambda \cap \mathfrak{M}_\xi^{n-\lambda} = \gamma(\mathbf{R})$ を満たす.

M は $(n-1)$-次元完備リーマン多様体で、$\iota : M \to \widetilde{M}^n$ を等長はめ込みとする．任意に固定した点 $p \in M$ の近傍 $W(p) \subset M$ において ι に沿う単位法ベクトル場 N が定義され, N の選び方に依存しない直交分解を得る：

$$T_pM = \mathcal{H}_{N(p)} \oplus \mathcal{AH}_{N(p)}.$$

等長はめ込みの shape operator $A : TM \to TM$ は，ι に沿う Levi-Civita 接続を ∇ として以下の式で与えられる：

$$Au = -\nabla_u N, \quad u \in TM$$

ここでは以下を仮定する： M は連結完備 $(n-1)$-次元リーマン多様体で、$\iota : M \to \widetilde{M}^n$ は等長はめ込みとする．更に ι の *shape operator* A は以下を満たすと仮定する：

$$A|_{\mathcal{H}_{N(p)}} = \kappa_1(p)\mathrm{I}_\lambda, \quad A|_{\mathcal{A}\mathcal{H}_{N(p)}} = \kappa_2(p)\mathrm{I}_{n-\lambda-1}, \quad p \in M \tag{1.0.1}$$

ここに，I_λ は λ-次単位行列，主曲率 κ_1, κ_2 は M 上の滑らかな関数とする．$\widetilde{M}^n = \mathbb{K}\mathrm{P}^k(c)$ については以下の定理 [5] で解決済みである．

Teorem IMS. 射影空間 $\widetilde{M}^n$ への等長はめ込み $\iota : M \to \widetilde{M}^n$ の shape operator が (1.0.1) を満たすとき，

(i) κ_1, κ_2 はともに定数で以下の関係式を満たす：

$$c = 4k_2^2 - 4\kappa_2\kappa_1. \tag{1.0.2}$$

(ii) $\iota(M)$ は $\widetilde{M}^n$ 内の距離球面である.

(iii) ι は埋め込みである.

しかし，双曲空間 $\widetilde{M}^n$ への等長はめ込みで (1.0.1) を満たすものに関しては満足すべき結果は得られていない．現時点で解る事は以下の命題 A, B である．我々に不明な点は既に計算の専門家の間では既に明らかと思われる事柄：『正則断面曲率一定の双曲空間内に全測地的長曲面は存在しない』である．この事実は夫々の係数体に対して個別的に証明されているだろう．我々は係数体の選択に無関係な統一的証明を探しているので，この意味に於いて未解決である．従ってここで述べる結果は全て途中経過である事をお断りしたい，

命題 A. 以下の 2 つの不等式のいずれか一方を満たす M の点が存在するとき，次の主張が成り立つ：

$$|\kappa_1(q)| \geq 2\sqrt{c}, \quad \text{for some } q_1 \in M, \tag{1.0.3}$$

$$|\kappa_2(q)| \geq \sqrt{c}, \quad \text{for some } q_2 \in M. \tag{1.0.4}$$

(i) κ_1, κ_2 はともに定数で，以下の関係式を満たす：

$$-c = \kappa_2^2 - \kappa_2\kappa_1. \tag{1.0.5}$$

(ii) (1.0.3),(1.0.4) の一方が strict ならば，他方も strict である.

(iii) (ii) のとき、$\kappa_1 = 2\sqrt{c}\coth 2\sqrt{c}\alpha_1$, $\kappa_2 = \sqrt{c}\coth\sqrt{c}\alpha_2$ と置けば $\alpha := \alpha_1 = \alpha_2$ で $\iota(M)$ は距離球面となる：

$$\iota(M) = S^{n-1}(\gamma(\alpha);\alpha) := \{\tilde{x} \in \widetilde{M}^n \mid d_{\widetilde{M}^n}(\gamma(\alpha),\tilde{x}) = \alpha\}. \quad (1.0.6)$$

(iv) ２つの不等式 (1.0.3) と (1.0.4) が同時に成り立ち，且つ一方の等式がある点で成り立てば, 同時に両方の等式及び (1.0.5) がすべての点で成り立ち，$\iota(M)$ はホロ球面となる:

$$\iota(M) = b_\gamma^{-1}(\{0\}). \quad (1.0.7)$$

(v) ι は等長埋め込みである.

注意 1.1 半直線 $\gamma : [0,\infty) \to \widetilde{M}^n$ に関する Busemann 関数を b_γ と置く. 実双曲空間 $\mathbb{R}\mathrm{H}^m(-4c)$ 内の全臍的超曲面は局所的に距離球面，ホロ球面もしくは $\mathbb{R}\mathrm{H}^m(-4c)$ 内の全測地的部分多様体の等距離超曲面である ([7]:114 ページ，定理). 従って前の２つの場合、主曲率は (1.0.3)，(1.0.4) を満たす. 第 3 の場合は $|\kappa_1| > 2\sqrt{c}$, $|\kappa_2| < \sqrt{c}$ の場合で，以下の命題 B で明らかになるだろう.

命題 B. $\iota : M \to \widetilde{M}^n$ の shape operator は (1.0.1) を満たすとせよ.

(i) 以下の不等式を満たす M の 2 点 q_1, q_2 は存在しない：

$$|\kappa_1(q_1)| < 2\sqrt{c} \quad \text{and} \quad |\kappa_2(q_2)| > \sqrt{c} \quad \text{for some } q_1,\, q_2 \in M \quad (1.0.8)$$

(ii) 以下の不等式を満たす 2 点 q_1, q_2 が存在するとき，

$$|\kappa_1(q_1)| > 2\sqrt{c} \quad \text{and} \quad |\kappa_2(q_2)| < \sqrt{c} \quad \text{for some } q_1,\, q_2 \in M \quad (1.0.9)$$

κ_1, κ_2 は定数で，$\kappa_2 = \sqrt{c}\tanh\sqrt{c}\beta_2$, $\kappa_1 = 2\sqrt{c}\coth 2\sqrt{c}\alpha_1$ と置くと $\alpha_1 = \beta_2$ で, (1.0.5) を満たし，$\iota(M)$ は $\dot{\gamma}(\beta_2)$ の定める $\mathbb{K}$-超平面 $\exp_{\gamma(\beta_2)}\mathcal{AH}_{\dot{\gamma}(\beta_2)}$ の周りの β_2-平行超曲面である.

(iii) $\iota : M \to \widetilde{M}^n$ は等長埋め込みである.

注意 1.2 (i) は $\mathbb{K}$-直線内の全測地的超曲面の周りの ρ-平行超曲面は存在しないことを示す．(ii) の条件式 (1.0.9) より (1.0.5) と $\alpha_1 = \beta_2$ が従う．このとき $\iota(M)$ の焦点集合は $\dot{\gamma}(\beta_2)$ の定める $\mathbb{K}$-超平面 $\exp_{\gamma(\beta_2)} \mathcal{AH}_{\dot{\gamma}(\beta_2)}$ であり，その重複度は λ である．

注意 1.3 $\kappa_1 < 2\sqrt{c}$ 及び $\kappa_2 < \sqrt{c}$ を満たす $\widetilde{M}$ の完備実超曲面は存在するだろうか？係数体の選択に無関係な方法でこれを示したい．

2 The matrix N-Jacobi tensor

M は $(n-1)$-次元完備リーマン多様体とし，$\iota : M \to \widetilde{M}$ は等長はめ込みとする．M の一点 $p \in M$ を任意に固定し $W(p) \subset M$ は p の周りの近傍で ι に沿う単位法ベクトル場が well defined とする．任意の固定された点 $q \in W(p)$ に対して $\gamma := \gamma_{N(q)} : [0, \infty) \to \widetilde{M}$ は $\dot{\gamma}(0) := N(q)$ を満たす測地線とする．ここで，γ に沿う orthonormal parallel frame field $\{E_1, \cdots, E_n := \dot{\gamma}\}$ を以下の様に選ぶ：

$$\mathrm{span}\{E_1, \cdots, E_\lambda\} = \mathcal{H}_{\dot{\gamma}}, \quad \mathrm{span}\{E_{\lambda+1}, \cdots, E_{n-1}\} = \mathcal{AH}_{\dot{\gamma}}. \tag{2.0.1}$$

このとき，N が定める曲率変換 $R(\cdot, \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t)$ の $\{E_1, \cdots, E_n := \dot{\gamma}\}$ に関する表現行列を $R(t)$ とすると，γ に沿う matrix Jacobi tensor $D(t)$ は以下で与えられる：

$$D(t)'' + R(t)D(t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{2.0.2}$$

更に D の基本解行列 D_0, D_1 を以下の様に定める：

$$D_0(0) = 0, \quad D_0'(0) = \mathrm{I}_{n-1}, \quad D_1(0) = \mathrm{I}_{n-\lambda-1}, \quad D_1'(0) = 0.$$

このとき，γ に沿う matrix N-Jacobi tensor $D(q,t)$ は以下で与えられるだろう：

$$D(q,t) = -D_0(t)A_q + D_1(t), \quad t \geq 0,$$

ここに，A_q は q に於ける ι の shape operator．もしも A_q が (1.0.1) を満たせば γ に沿う matrix N-Jacobi tensor は $E_1(t), \cdots, E_{n-1}(t)$ に関して:

$$D(q,t) = \begin{bmatrix} D_{\mathcal{H}}(q,t) & \\ & D_{\mathcal{AH}}(q,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t)\mathrm{I}_\lambda & \\ & g(t)\mathrm{I}_{n-\lambda-1} \end{bmatrix}, \tag{2.0.3}$$

と書ける．ここに、$D_{\mathcal{H}}(q,t)$, $D_{\mathcal{AH}}(q,t)$ は $D(q,t)$ の分解で，関数 f,g は以下で与えられる：

$$f(t) := \cosh 2\sqrt{c}t - \frac{\kappa_1(q)}{2\sqrt{c}} \sinh 2\sqrt{c}t$$
$$g(t) := \cosh \sqrt{c}t - \frac{\kappa_2(q)}{\sqrt{c}} \sinh \sqrt{c}t$$

3 Parallel hypersurfaces

等長はめ込みに沿う法指数写像によって ι に沿う平行超曲面を考える．法指数写像 $\Phi : M \times [0,\infty) \to \widetilde{M}$ を以下で定義する：

$$\Phi(q,t) := \exp_q tN(q), \quad q \in M, \quad t \in \mathbf{R},$$

このとき， ι に沿う t-平行超曲面 $\widetilde{M}(t) \subset \widetilde{M}$ は以下で与えられる：

$$\widetilde{M}(t) := \{\Phi(q,t) \mid q \in M\}.$$

もしも A_q, $q \in W(p)$ が (1.0.1) を満たすならば $\widetilde{M}(t)$ の点 $\gamma(t)$ における shape operator A_{qt} は

$$A_{qt} = \begin{bmatrix} A_{qt;\mathcal{H}} & \\ & A_{qt;\mathcal{AH}} \end{bmatrix}.$$

となる．ここに,

$$A_{qt;\mathcal{H}} = \frac{f(t)'}{f(t)} \mathrm{I}_\lambda, \quad A_{qt;\mathcal{AH}} = \frac{g(t)'}{g(t)} \mathrm{I}_{n-\lambda-1}$$

双曲三角関数の基本性質から以下の補題を得る:

補題 3.1 点 q に於ける主曲率と γ に沿う matrix N-Jacobi tensor の零点及び平行超曲面の shape operator の間には以下の関係式が成り立つ：

(i) If $|\kappa_1(q)| > 2\sqrt{c}$, then $D_{\mathcal{H}}(q,\alpha_1) = 0$ and $|\kappa_1(q)| = 2\sqrt{c}\coth 2\sqrt{c}\,\alpha_1$.

(ii) If $|\kappa_2(q)| > \sqrt{c}$, then $D_{\mathcal{AH}}(q,\alpha_2) = 0$ and $|\kappa_2(q)| = \sqrt{c}\coth \sqrt{c}\,\alpha_2$.

(iii) If $|\kappa_1(q)| < 2\sqrt{c}$, then $A_{q\beta_1;1} = 0$ and $|\kappa_1(q)| = 2\sqrt{c}\tanh 2\sqrt{c}\,\beta_1$.

(iv) If $|k_2(q)| < \sqrt{c}$, then $A_{q\beta_2;2} = 0$ and $|\kappa_2(q)| = \sqrt{c}\tanh\sqrt{c}\,\beta_2$.

補題 3.2 $\widetilde{M}$ の任意の点 $\tilde{p}$ と任意の単位ベクトル $\xi \in T_{\tilde{p}}\widetilde{M}$ を固定する．ξ の定める $\mathbb{K}$-直線 $\mathbb{K}\mathrm{H}^1_\xi(-4c)$ 内の全測地的実超曲面 $\mathcal{F}_\xi$ は $\tilde{p} \in \mathcal{F}_\xi$ かつ $\tilde{p}$ に於ける単位法ベクトルが ξ であるものとせよ．このとき以下が成り立つ:

(i) $\mathcal{F}_\xi$ の周りの ρ-距離球面を $S^{n-1}(\mathcal{F}_\xi;\rho) \subset \widetilde{M}$ とすると，$S^{n-1}(\mathcal{F}_\xi;\rho) \subset \widetilde{M}$ の shape operator は (1.0.1) を満たさない.

(ii) $\mathbb{K}$-超平面 $\mathbb{K}^{k-1}_\xi(-4c)$ の周りの ρ-距離球面を $M \subset \widetilde{M}$ とすると， M の shape operator は (1.0.1) を満たす.

4 The integrability of $\mathcal{H}_N$ and $\mathcal{AH}_N$.

Ambient space が射影空間の場合 [5] において $\mathcal{H}_N$ と $\mathcal{AH}_N$ の積分可能性は matrix N-Jacobi tensor along γ が必ず零点を持つ事から証明された. 補題 2.1 の直前に示した様に Ambient space が双曲空間の場合は matrix N-Jacobi tensor along γ が必ずしも零点を持たない．ここは色々な計算を試みると以下の結果を得る事が出来る．

補題 4.1 積分多様体上で主曲率は以下の性質を持つ：

(i) 滑らかな関数 κ_1, κ_2 に対して ι の shape operator が条件 (1.0.1) を満たすならば distributions $D_{\mathcal{H}}$ 及び $D_{\mathcal{AH}}$ は積分可能である．

(ii) 各点 $q \in W(p)$ を通る積分多様体を $\Omega_{\mathcal{H}}(q) \subset M$, $\Omega_{\mathcal{AH}}(q) \subset M$ と置くと、κ_1, κ_2 は夫々 $\Omega_{\mathcal{H}}(q)$ と $\Omega_{\mathcal{AH}}(q)$ 上で定数である．

注意 4.2 $\lambda = 1$ のとき，点 q を通る積分曲線 $\Omega_{\mathcal{H}}(q)$ は J を複素構造として $\mathcal{H}_N = JN$ の積分曲線であって，M の測地線である．この場合だけ証明方法が異なる．

補題 4.3 滑らかな関数 κ_1, κ_2 は M 上で一定である．更に,

(i) $\Omega_{\mathcal{H}}(q)$ は $\mathbb{K}$-直線 $\mathbb{K}^1_{N(q)}(-4c)$ 内の距離球面である．

(ii) $\Omega_{\mathcal{AH}}(q)$ は $\mathcal{M}^{n-\lambda}_{N(q)}$ 内の $\mathbb{K}$-超平面 $\mathbb{K}^{k-1}_{N(q)}(-4c)$ の周りの距離球面である．

5 The Idea of the Proof

命題 A の証明のアイデアについて述べる．もしもある点 $q \in W(p)$ で $\kappa_1(q) > 2\sqrt{c}$ ならば，M の完備性から

$$\iota(\Omega_{\mathcal{H}}(q)) = S^{n-1}(\gamma(r_1), r_1) \cap \mathfrak{L}^{\lambda+1}_{N(q)}$$

となる．ここに，r_1 は $D(q, r_1) = 0$ より

$$\kappa_1(q) = 2\sqrt{c}\coth 2\sqrt{c}\, r_1$$

によって定まる $\iota(\Omega_{\mathcal{H}}(q))$ の半径である．焦点集合 $\widetilde{M}(r_1) \subset M$ は一点 $\{\gamma(r_1)\}$ に退化すれば $\iota(M) = S^{n-1}(\gamma(r_1), r_1)$ となり、退化しなければ

$$d\Phi_{(q,r_1)}\mathcal{AH}_{N(q)} = T_{\gamma(r_1)}\widetilde{M}(r_1) = \mathcal{AH}_{\dot\gamma(r_1)}$$

だから $\widetilde{M}(r_1)$ は $(n-\lambda-1)$-次元の全測地的部分多様体であって，これは $\mathbb{K}$-超平面 $\mathbb{K}^{k-1}_{\dot\gamma(r_1)}$ に他ならぬ．このとき，$A_{q\,r_1,\,2} = 0$ より $\kappa_2 = \sqrt{c}\tanh\sqrt{c}\, r_1$ となって (1.0.5) を得る．$\iota(M)$ は $\mathbb{K}$-超平面 $\mathbb{K}^{k-1}_{\dot\gamma(r_1)}$ の周りの r_1-距離球面である．

補題 3.1 を用いると命題 A の後半についても同じ方法で証明出来るだろう．命題 B も同様である．

参考文献

[1] J.Berndt, *Real hypersurfaces in quaternionic space forms*, J. reine u. angew. Math. **419**, 9–26(1991).

[2] J.Berndt and H.Tamaru, *Cohomogeniety one actions on noncompact symmetric spaces of rank one*, TRANSAMS, **359**, 3425–3483(2007).

[3] J.Berndt and D.Ramoz and J.Carlos, *Real hypersurfaces with constant principal curvatures in the complex hyperbolic plane*,

[4] J.Berndt and D.Ramoz and J.Carlos, *Real hypoersurfaces with principl curvatures in the complex hyperbolic space*,

[5] N.Innami and Y.Mashiko and K.Shiohama, *Metric spheres in the projective spaces of constant holomorphic sectional curvature*, Preprint 2010.

[6] T.Hamada and K.Shiohama, *Complete real hypersurfaces in compact rank one symmetric spaces*, Notices Amer. Math. Soc. **137**, 3905–3910(2009).

[7] M.Spivak, A comprehensive introduction to differential geometry, Volume 4, Publish or Perish. Inc. 1975