非コンパクト対称空間への良い作用の構成法*

田丸 博士‡ (広島大学 大学院理学研究科)

概要

本稿では, 非コンパクト対称空間への等長的作用を構成する方法を 3 つ紹介する. これらの構成法は, 放物型部分群と深く関わり, 特に, 半単純ではない群による良い作用を数多く構成することができる. 本稿では, これらの構成法により, cohomogeneity one 作用, hyperpolar 作用, polar 作用などの良い等長的作用が構成されることを紹介する. これらはすなわち, 良い等質部分多様体が構成されることと同等である. 本稿で紹介する研究結果のほとんどは, Jürgen Berndt (King's College London) および José Carlos Díaz-Ramos (Santiago de Compostela) との共同研究で得られたものである.

1　導入

本稿の目的は, 非コンパクト型対称空間への "良い" 等長的作用を構成する方法を紹介することである. 良い等長的作用を構成することは, 例えば, その作用の軌道は等質部分多様体であるので, 部分多様体論から見ても興味深い問題である. また, その作用を用いて不変な幾何構造 (例えば cohomogeneity one 計量) を構成するという結果も多くあり, 幾何構造の研究から見ても興味深い問題である. 本稿では, 良い群作用として, 以下のものを考える.

定義 1.1. M を連結なリーマン多様体とし, H を等長変換群の連結な閉部分群とする. このとき, H の M への作用が

(1) **polar** とは, 次が成り立つこと: $\exists\Sigma$ (M の連結閉部分多様体) s.t. Σ は全ての H-軌道と直交して交わる (このような Σ を **section** と呼ぶ).
(2) **hyperpolar** とは, polar であり, かつ section Σ が平坦であること.
(3) **cohomogeneity one** とは, 余次元 1 の軌道を持つこと,

定義から明らかに, 作用が hyperpolar ならば polar である. また, M が対称空間の場合には, 作用が cohomogeneity one ならば hyperpolar となる ([13], Corollary 2.13). これらの作用の軌道は, 興味深い等質部分多様体である. 例えば, cohomogeneity one 作用の主軌道は, 定義から明らかに等質超曲面である. また, polar 作用の主軌道は "isoparametric" である ([12]).

* 研究集会「部分多様体幾何とリー群作用」(東京理科大学森戸記念館, 2010/09/08–10) 報告集原稿

† 本研究の一部は, 科研費 (若手研究 (B) 20740040, 可解群の幾何学と部分多様体) の支援を受けて行われた

‡ e-mail: `tamaru@math.sci.hiroshima-u.ac.jp`

例 1.2. 以下の 3 つは, 上半平面 $M = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ への cohomogeneity one 作用である:

(1) $\mathrm{SO}(2)$ の作用 (原点を固定点として持つ),

(2) $A := \{\mathrm{diag}(a, a^{-1}) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid a > 0\}$ の作用 (原点を通る軌道は測地線である),

(3) $N := \{I_2 + xE_{12} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid x \in \mathbb{R}\}$ の作用 (各軌道は horocycle である).

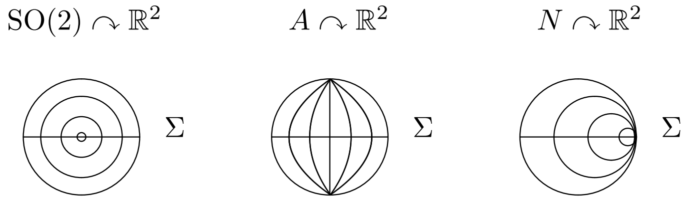

図 1　$\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ への cohomogeneity one 作用

非コンパクト型対称空間 M への良い作用を構成するために, 我々は, 群論的なアプローチをする. 良い作用を構成するためには, M の等長変換群の単位元を含む連結成分を G として, G 内の良い部分群を構成すれば良い. そのためには, G のリー代数 $\mathfrak{g}$ 内の良い部分リー代数を構成すれば良い. そして, 良い部分リー代数を構成するためのキーとなるのが, $\mathfrak{g}$ およびその放物型部分リー代数の様々な分解定理である.

本稿の構成は以下の通りである. 第 2 章では, 準備として, $\mathfrak{g}$ およびその放物型部分リー代数の様々な分解定理を紹介する. 紹介する分解は,

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$: 岩沢分解,
- $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{q}_\Phi = \mathfrak{l}_\Phi \oplus \mathfrak{n}_\Phi$: Chevalley 分解,
- $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{q}_\Phi = \mathfrak{m}_\Phi \oplus \mathfrak{a}_\Phi \oplus \mathfrak{n}_\Phi$: Langlands 分解

である. 例 1.2 で紹介した作用のうち, (2) と (3) のものは, 岩沢分解を考えると自然に得られる作用であることに注意する.

第 3 章では, 特異軌道を持たない cohomogeneity one 作用を構成する方法を紹介する. この構成には, 岩沢分解を本質的に用いる. 構成された作用は, 大きく分けると 2 つのタイプに分けることができるが, それらは例 1.2 の (2) と (3) にそれぞれ対応するものである. 大雑把に言うと, (2) タイプは「法ベクトルが $\mathfrak{n}$ に入るもの」であり, (3) タイプは「法ベクトルが $\mathfrak{a}$ に入るもの」である.

第 4 章では, nilpotent construction と呼ばれる構成方法を紹介する. この構成には, Chevalley 分解の巾零部分 $\mathfrak{n}_\Phi$ が本質的な役割を果たす. 構成された作用は, 第 3 章で構成された「法ベクトルが $\mathfrak{n}$ に入るタイプ」の作用の一般化と思うことができる.

第 5 章では, canonical extension と呼ばれる構成方法を紹介する. この構成には, Langlands 分解の $\mathfrak{m}_\Phi$ が本質的な役割を果たす. 構成された作用は, 第 3 章で構成された「法ベクトルが $\mathfrak{a}$ に入るタイプ」の作用の一般化と思うことができる.

2　放物型部分群の準備

本節では, 放物型部分群について, 後に必要となる事項を解説する. 等長変換群の単位元を含む連結成分 を $G := \mathrm{Isom}(M)_0$ で表すと, 放物型部分群は, G 内の "素性の良い" 部分群である. 特に, 放物型部分群が良い分解を持つことが, 重要なポイントである. 詳細は [8] , [11] を参照. ここでは全てリー代数レベルで議論をすることとする. 等質空間表示 $M = G/K$ を考え, 対応するリー代数のカルタン分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ で表す.

2.1　岩沢分解

事実 2.1. リー代数 $\mathfrak{g}$ は, 岩沢分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ を持つ. ただしここで, 分解は線型空間としての直和分解であり, $\mathfrak{a}$ は可換部分代数, $\mathfrak{n}$ は巾零部分代数.

岩沢分解を構成するためには, $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分代数, Δ を $\mathfrak{a}$ に関する制限ルート, Λ を単純ルート系として, $\mathfrak{n}$ を正ルートのルート空間の直和とすれば良い. 感覚を掴むためには, 以下のような具体例を念頭に置いておくと良い.

例 2.2. 非コンパクト型対称空間 $SL_3(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$ に対応する岩沢分解は, 次で与えられる:

$$\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) = \mathfrak{so}(3) \oplus \left[\begin{array}{c|c|c} * & 0 & 0 \\ \hline 0 & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & * \end{array}\right] \oplus \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & * & * \\ \hline 0 & 0 & * \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

2.2　リー代数の gradation

定義 2.3. リー代数 $\mathfrak{g}$ に対して, 以下のような線型部分空間への直和分解が <u>**gradation**</u> であるとは, $[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] \subset \mathfrak{g}^{i+j}$ $(\forall i, j)$ が成り立つこと:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k.$$

半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ 上の gradation は, 全て制限ルート系の言葉で記述することができる. 単純ルート系の部分集合 $\Phi(\subset \Lambda)$ に対して (すなわち, Dynkin 図形の部分図形に対して), 以下の方法で gradation を構成することができる:

$$\mathfrak{g}^k := \bigoplus_{c_{i_1} + \cdots + c_{i_j} = k} \mathfrak{g}_{c_1\alpha_1 + \cdots c_r\alpha_r} \quad (\text{ただし}\ \ \Lambda \setminus \Phi = \{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_j}\}).$$

感覚的に言うと,「Φ で張られるルートのルート空間を $\mathfrak{g}^0$ に入れる」ような構成をしている. ここで $\mathfrak{g}_\alpha$ がルート α のルート空間. また逆に, 全ての gradation は本質的にこの方法で得られることが知られている (厳密に言うと, type α_0 と呼ばれるクラスのみを考えている. 詳細は [9], [14] などを参照). 岩沢分解の場合と同様に, 感覚を掴むためには, 以下のような具体例を念頭に置いておくと良い.

例 2.4. リー代数 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ の任意の block 分割から gradation が得られる. 例えば,

$$\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) = \bigoplus_{k=-1}^{1} \mathfrak{g}^k = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline * & * & 0 \end{array}\right] \oplus \left[\begin{array}{cc|c} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & * \end{array}\right] \oplus \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

2.3 放物型部分代数

定義 2.5. リー代数の gradation $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}^k$ に対して, 次を **放物型部分代数** と呼ぶ:

$$\mathfrak{q} := \bigoplus_{k \geq 0} \mathfrak{g}^k.$$

特に, $\Phi \subset \Lambda$ に対応する gradation から得られる放物型部分代数を $\mathfrak{q}_\Phi$ で表す. 放物型部分代数も当然ながら制限ルートの言葉で記述することができ, その記述を定義とする場合が多い. 個人的には, gradation を通して定義するやり方が, 感覚を掴むためには良いと感じている.

例 2.6. 次で定義される $\mathfrak{q}$ は, $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ の放物型部分代数である:

$$\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) \supset \mathfrak{q} := \left[\begin{array}{cc|c} * & * & * \\ * & * & * \\ \hline 0 & 0 & * \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & * \end{array}\right] \oplus \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

2.4 放物型部分代数の分解

事実 2.7. 放物型部分リー代数 $\mathfrak{q}_\Phi$ は, 次をみたす:

(1) $\mathfrak{q}_\Phi$ は **Chevalley 分解** $\mathfrak{q}_\Phi = \mathfrak{l}_\Phi \oplus \mathfrak{n}_\Phi$ を持つ. ここで, $\mathfrak{l}_\Phi$ は reductive, $\mathfrak{n}_\Phi$ は巾零であり, $[\mathfrak{l}_\Phi, \mathfrak{n}_\Phi] \subset \mathfrak{n}_\Phi$ をみたす.

(2) $\mathfrak{l}_\Phi$ は分解 $\mathfrak{l}_\Phi = \mathfrak{m}_\Phi \oplus \mathfrak{a}_\Phi$ を持つ. ここで, $\mathfrak{m}_\Phi$ は reductive, $\mathfrak{a}_\Phi$ は可換であり, $[\mathfrak{m}_\Phi, \mathfrak{a}_\Phi] = 0$ をみたす ($\mathfrak{q}_\Phi = \mathfrak{m}_\Phi \oplus \mathfrak{a}_\Phi \oplus \mathfrak{n}_\Phi$ を **Langlands 分解** と呼ぶ).

(3) $\mathfrak{n}_\Phi$ は **自然な gradation** $\mathfrak{n}_\Phi = \mathfrak{n}_\Phi^1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{n}_\Phi^\nu$ を持つ. ここで, $[\mathfrak{n}_\Phi^i, \mathfrak{n}_\Phi^j] \subset \mathfrak{n}_\Phi^{i+j}$ $(\forall i, j)$, $\mathfrak{m}_\Phi \oplus \mathfrak{a}_\Phi$ は各 $\mathfrak{n}_\Phi^k$ を保ち, $\mathfrak{n}_\Phi^1$ は $\mathfrak{n}_\Phi$ を生成する.

この事実の証明は, gradation から話を始めていると, 実は非常に簡単になる. 実際, 部分集合 $\Phi(\subset \Lambda)$ から決まる gradation を $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}^k$ で表すと, 上記の分解は

$$\mathfrak{l}_\Phi := \mathfrak{g}^0, \quad \mathfrak{a}_\Phi := \mathfrak{a} \cap Z(\mathfrak{l}_\Phi), \quad \mathfrak{m}_\Phi := \mathfrak{g}^0 \ominus \mathfrak{a}_\Phi, \quad \mathfrak{n}_\Phi^k := \mathfrak{g}^k$$

とおくことによって得られる. 今までと同様に, 感覚を掴むためには, 以下のような例を念頭に置いておくのが良いと思われる.

例 2.8. 次の $\mathfrak{q}_\Phi$ は, $\mathfrak{sl}_4(\mathbb{R})$ の放物型部分代数である:

$$\mathfrak{q}_\Phi := \left\{ \left[\begin{array}{cc|c|c} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right] \mid \mathrm{tr} = 0 \right\}.$$

この $\mathfrak{q}_\Phi$ の Chevalley 分解は次で与えられる:

$$\mathfrak{l}_\Phi = \left\{ \left[\begin{array}{cc|c|c} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & * \end{array} \right] \mid \mathrm{tr} = 0 \right\}, \quad \mathfrak{n}_\Phi = \left\{ \left[\begin{array}{cc|c|c} 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \right\}.$$

この $\mathfrak{q}_\Phi$ の Langlands 分解は次で与えられる:

$$\mathfrak{m}_\Phi = \left\{ \left[\begin{array}{cc|c|c} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \mid \mathrm{tr} = 0 \right\}, \quad \mathfrak{a}_\Phi = \left\{ \left[\begin{array}{cc|c|c} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & c \end{array} \right] \mid \mathrm{tr} = 0 \right\}.$$

最後に, $\mathfrak{n}_\Phi$ の自然な gradation は次で与えられる:

$$\mathfrak{n}_\Phi^1 = \left\{ \left[\begin{array}{cc|c|c} 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \right\}, \quad \mathfrak{n}_\Phi^2 = \left\{ \left[\begin{array}{cc|c|c} 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \right\}.$$

3 構成法 1: codimension one foliation

M を非コンパクト型対称空間とする. ここでは, 全ての軌道が余次元 1 であるような M への等長的作用の構成法 ([4]) を紹介する. 得られた作用は当然ながら cohomogeneity one 作用である. 部分多様体の立場から言うと, 焦多様体を持たない等質超曲面が構成されたことになる. なお, ここで述べる構成法は, 階数 1 の場合に [1] で与えられた構成法の一般化である.

事実 3.1. $M = G/K$ を非コンパクト型対称空間, $G = KAN$ を岩沢分解とする. このとき, AN の $M = G/K$ への作用は単純推移的である. すなわち, $M \cong AN$ と同一視できる.

この事実より, AN 内の余次元 1 部分群があれば, その M への作用を考えると, 全ての軌道が余次元 1 になることが分かる. AN 内の余次元 1 部分群を構成するためには, リー代数 $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ 内の余次元 1 部分代数を構成すれば良い.

定理 3.2 (Berndt & Tamaru ([4])). ベクトル $\xi \neq 0$ が, $\xi \in \mathfrak{a}$ または $\xi \in \mathfrak{g}_\alpha$ $(\alpha \in \Lambda)$ をみたすとする. このとき, $\mathfrak{s}_\xi := (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}) \ominus \mathbb{R}\xi$ は余次元 1 部分代数であり, 対応する $S_\xi \curvearrowright M$ を考えると, 全ての軌道が余次元 1 になる.

実は逆に, 全ての軌道が余次元 1 になるような M への作用は, この方法で全て構成される ([4]). ここで, この方法で構成される作用の個数について補足しておく. まず $r := \mathrm{rank}(M) = \dim(\mathfrak{a})$ とおく. すると, $\xi \in \mathfrak{g}_\alpha$ $(\alpha \in \Lambda)$ の取り方は r 個ある (正確に言うと Dynkin 図形の自己同型の分だけ重複がある). また, $r > 1$ のとき, $\xi \in \mathfrak{a}$ の取り方は無限にある (こちらも Dynkin 図形の自己同型の分だけ重複がある). これらにより, $r > 1$ のときには, 軌道同値でない非可算無限個の C1 作用が存在することが分かる.

例 3.3. $M = \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ のとき (すなわち $\dim \mathfrak{a} = \dim \mathfrak{n} = 1$ のとき), 次が成り立つ:

(1) $\xi \in \mathfrak{a}$ のとき, $\mathfrak{s}_\xi = \mathfrak{n}$ に対応する群の作用を考えると, その軌道は horocycle である,

(2) $\xi \in \mathfrak{g}_\alpha$ のとき, $\mathfrak{s}_\xi = \mathfrak{a}$ に対応する群の作用を考えると, その原点を通る軌道は測地線である.

上記のものは, 例 1.2 の (2), (3) で述べたものに他ならない.

例 3.4. $M = \mathbb{C}\mathrm{H}^n$ のとき (このとき $\dim \mathfrak{a} = 1$), 次が成り立つ:

(1) $\xi \in \mathfrak{a}$ のとき, $\mathfrak{s}_\xi = \mathfrak{n}$ に対応する群の作用を考えると, その軌道は horosphere である,

(2) $\xi \in \mathfrak{g}_\alpha$ のとき, $\mathfrak{s}_\xi = \mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{n} \ominus \mathbb{R}\xi)$ に対応する群の作用を考えると, その原点を通る軌道は等質 ruled minimal 超曲面である.

4 構成法 2: nilpotent construction

M を非コンパクト型対称空間とする. ここでは, [7] で導入された "nilpotent construction" と呼ばれる構成法を紹介する. これにより, M への cohomogeneity one 作用で, 特異軌道を持つものを構成することができる. 構成には, Chevalley 分解 $\mathfrak{q}_\Phi = \mathfrak{l}_\Phi \oplus \mathfrak{n}_\Phi$ の巾零部分 $\mathfrak{n}_\Phi$ が重要な役割を果たす. まず, Chevalley 分解および自然な gradation $\mathfrak{n}_\Phi = \mathfrak{n}_\Phi^1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{n}_\Phi^\nu$ の性質から, 次が分かる:

補題 4.1. 任意の部分空間 $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{n}_\Phi^1$ に対して, $N_{\mathfrak{l}_\Phi}(\mathfrak{n}_\Phi \ominus \mathfrak{v}) \oplus (\mathfrak{n}_\Phi \ominus \mathfrak{v})$ は部分リー代数である. ただしここで, $N_{\mathfrak{l}_\Phi}$ は $\mathfrak{l}_\Phi$ 内での normalizer を表す.

我々の構成法は, $\mathfrak{v}$ が良い部分空間ならば, 構成される部分リー代数に対応する群作用は良い作用である, ということを主張している.

4.1 階数 1 の場合

まずは階数 1 の場合に nilpotent construction を記述する. 階数 1 の場合には, 放物型部分リー代数は $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_\emptyset$ の一つしかない. またこのとき, 次が成立する:

$$\mathfrak{l}_\emptyset = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{n}_\emptyset^1 = \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{n}_\emptyset^2 = \mathfrak{g}_{2\alpha}.$$

定理 4.2 (Berndt & Brück ([2])). M の階数を 1 とする. 部分空間 $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{n}_\emptyset^1 = \mathfrak{g}_\alpha$ (ただし $\dim \mathfrak{v} \geq 2$) が次の条件 $(*)$ をみたすならば, $N_{\mathfrak{l}_\Phi}(\mathfrak{n}_\Phi \ominus \mathfrak{v}) \oplus (\mathfrak{n}_\Phi \ominus \mathfrak{v})$ に対応する群作用は cohomogeneity one である:

$(*)$ $K_0 \supset \exists K'$ は $\mathfrak{v}$ の単位球に推移的に作用する.

ちなみに, $\mathfrak{v}$ と $\mathfrak{v}'$ が K_0-共役であるならば, 構成された作用は軌道同値となる. よって, 条件 $(*)$ をみたす部分空間 $\mathfrak{v}$ は, その共役類を考えれば良い.

例 4.3. $M = \mathbb{R}\mathrm{H}^n$ のとき, $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{so}(n-1)$, $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{R}^{n-1}$ である. このとき, 任意の部分空間 $\mathfrak{v}$ $(\dim \mathfrak{v} \geq 2)$ は条件 $(*)$ をみたす. また, その共役類は各次元に一つである. この方法で得られる cohomogeneity one 作用は, $\dim \mathfrak{v} = k$ とすると, 全測地的軌道 $\mathbb{R}\mathrm{H}^{n-k}$ を持つ.

共役類が各次元に一つしかないことは, $\mathrm{SO}(n-1)$ のグラスマン多様体 $G_k(\mathbb{R}^{n-1})$ への作用が推移的であることから分かる.

例 4.4. $M = \mathbb{C}\mathrm{H}^n$ のとき, $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{u}(n-1)$, $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}^{n-1} \cong \mathbb{R}^{2n-2}$ である. このとき, 部分空間 $\mathfrak{v}$ $(\dim \mathfrak{v} \geq 2)$ が条件 $(*)$ をみたすための必要十分条件は, $\mathfrak{v}$ が一定の Kähler 角度を持つことである. 得られる cohomogeneity one 作用は, 全測地的でない特異軌道 (W_φ と表記される) を持つ.

証明には, $\mathrm{U}(n-1)$ の $G_k(\mathbb{R}^{2n-2})$ への作用が hyperpolar であることが, 実は効いている. 作用が hyperpolar であるので, その軌道空間を表示することが容易になる. また, このように条件 $(*)$ をみたす部分空間を分類することができたことが, $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ 内の等質超曲面の分類 ([6]) のキーポイントであった.

例 4.5. $M = \mathbb{H}\mathrm{H}^n$ のとき, $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{sp}(n-1) \oplus \mathfrak{sp}(1)$, $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{H}^{n-1} \cong \mathbb{R}^{4n-4}$ である. このとき部分空間 $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{g}_\alpha$ が一定の "quaternion Kähler 角度" を持つならば, 条件 $(*)$ をみたす. しかし, そのような部分空間の分類は未解決である.

ここで, quaternion Kähler 角度については, [2] を参照 (非常に大雑把に言うと, Kähler 角度の三つ組みである). 上記の問題が未解決である原因は, 結局のところ, $\mathrm{Sp}(n-1)\mathrm{Sp}(1)$ の $G_k(\mathbb{R}^{4n-4})$ への作用が hyperpolar でないことに起因する思われる. もし, この作用の軌道空間を表示することができるか, あるいはこの作用で不変な適切な不変量を構成することができれば, $\mathbb{H}\mathrm{H}^n$ 内の等質超曲面の分類が得られる可能性がある.

4.2 階数 > 1 の場合

ここでは一般の階数の場合の nilpotent construction を記述する.

定理 4.6 (Berndt & Tamaru ([7])). 部分空間 $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{n}^1_\emptyset$ (ただし $\dim \mathfrak{v} \geq 2$) が次の条件 (i), (ii) をみたすならば, $N_{\mathfrak{l}_\Phi}(\mathfrak{n}_\Phi \ominus \mathfrak{v}) \oplus (\mathfrak{n}_\Phi \ominus \mathfrak{v})$ に対応する群作用は cohomogeneity one である:

(i) $K \cap L_\Phi \supset \exists K'$ は $\mathfrak{v}$ の単位球に推移的に作用する,

(ii) $N_{L_\Phi}(\mathfrak{n} \ominus \mathfrak{v})$ は $(L_\Phi).o$ に推移的に作用する.

この定理は, 定理 4.2 の一般化である. 実際, 階数 1 の場合には, $K \cap L_\Phi = K_0$ が成り立ち, また, 条件 (ii) は自動的にみたされる.

上記の定理を用いて, 新しい cohomogeity one 作用を構成することができる. しかしながら, 現時点ではそのような作用の数は少く, 上手くいっているのは $\dim \mathfrak{n}^1_\emptyset$ が小さい場合のみである. 定理の仮定が複雑であるため, $\dim \mathfrak{n}^1_\emptyset$ が大きい場合には, 仮定をみたしているかどうかの check がそもそも困難である.

5 構成法 3: canonical extension

ここでは, [7] で導入された “canonical extension” と呼ばれる構成法を紹介する．これは, M 内のある種の全測地的部分多様体への作用を, M への作用に (所定の性質を保ったまま) 拡張する, という方法である．これにより, M への cohomogeneity one 作用, hyperpolar 作用, polar 作用を構成することができる．この構成法では, Langlands 分解 $\mathfrak{q}_\Phi = \mathfrak{m}_\Phi \oplus \mathfrak{a}_\Phi \oplus \mathfrak{n}_\Phi$ が重要な役割を果たす．ちなみに, ある種の全測地的部分多様体は, どのような作用を構成したいかによって多少異なる．

5.1 Cohomogeneity one 作用の canonical extension

まずは cohomogeneity one 作用に対する canonical extension を紹介する．この場合に拡張の元となる全測地的部分多様体は, 次のものである．

事実 5.1. $(M_\Phi).o$ は M 内の全測地的部分多様体であり, $\mathrm{rank}((M_\Phi).o) = |\Phi|$ が成り立つ．

よって特に $\mathrm{rank}((M_\Phi).o) < \mathrm{rank}(M)$ であることに注意する．

定理 5.2 (Berndt & Tamaru ([7])). H の $(M_\Phi).o$ への作用が cohomogeneity one であるとする．このとき, $H^\Phi := H \ltimes (A_\Phi N_\Phi)$ は群であり, その M への作用は cohomogeneity one である．また, 各 $p \in M$ に対して, $\mathrm{codim}(H.p) = \mathrm{codim}(H^\Phi.p)$ が成り立つ．

最後の性質から, 特に, 特異軌道を持つ cohomogeneity one 作用から出発すると, それを拡張して得られた作用も特異軌道を持つ, ということが分かる．ちなみに, 全測地的な特異軌道を持つ cohomogeneity one 作用から出発したとしても, それを拡張して得られた作用が全測地的軌道を持つとは限らない．

例 5.3. $H(\subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ の $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ への作用が cohomogeneity one であるとする．このとき, 次のリー代数に対応する群の $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$ への作用は cohomogeneity one である:

$$\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) \supset \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_\Phi \oplus \mathfrak{n}_\Phi = \mathfrak{h} \oplus \{ \left[\begin{array}{cc|c} a & 0 & * \\ 0 & a & * \\ \hline 0 & 0 & -2a \end{array}\right] \mid a \in \mathbb{R} \}.$$

このようにして, canonical extension を用いることにより, 無数の cohomogeneity one 作用を構成することができる．

ただしここで, この構成法を考えときに, $(M_\Phi).o$ が既約とは限らないことに注意する必要がある．すなわち, 我々は主に既約な場合を考えることが多いが, それだけでは不十分で, 可約な場合も考える必要があると思われる．実際, 例えば M が階数 3 で既約の場合に, そこへの cohomogeneity one 作用を構成する問題を考えると, 上記の定理により, 「しかるべき階数 2 の可約な空間への cohomogeneity one 作用」を知る必要がある．

5.2 Hyperpolar 作用の canonical extension

ここでは hyperpolar 作用に対する canonical extension を紹介する．この場合に拡張の元となる全測地的部分多様体は, 次のものである．

事実 5.4. $(L_\Phi).o$ は M 内の全測地的部分多様体である．特に $\Phi(\subset \Lambda)$ が離散的な場合には, $(L_\Phi).o$ はユークリッド空間と階数 1 対称空間の直積と同型になる．

ここで Φ が離散的とは, Φ の任意の元は直交する (すなわち Dynkin 図式で書いた時に離散的である) ことと定義する．

補題 5.5. 離散的な Φ に対して, $(L_\Phi).o = M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_s$ と表す．ここで, $M_0 = \mathbb{R}^k$ であり, $M_1, \ldots, M_s$ は階数 1 対称空間．このとき, 各 H_i の M_i への作用が特異軌道を持たない hypoerpolar 作用であるとすると, $H = H_0 \times \cdots \times H_s$ の $(L_\Phi).o$ への作用も, 特異軌道を持たない hyperpolar 作用である．

この補題の証明そのものは容易である．ちなみに, ユークリッド空間 $\mathbb{R}^k$ および階数 1 対称空間に対しては, 特異軌道を持たない hyperpolar 作用は完全に分類されている．これらの作用を拡張して, 外の空間 M への hyperpolar 作用を構成することができる．

定理 5.6 (Berndt & Díaz-Ramos & Tamaru ([3]), Koike ([10])). M は $\mathrm{rank}(M) > 1$ をみたすとし, Φ を離散的とする．また, 補題 5.5 で構成された群 H を考える．このとき, $H \rtimes N_\Phi$ は群であり, その M への作用も, 特異軌道を持たない hyperpolar 作用である．

このような例は, 定式化は異なるが, Koike ([10]) により本質的に先に与えられていた．我々の論文 ([3]) では, 上記のような定式化を与えると共に, 特異軌道を持たない hyperpolar 作用はこの方法で全て得られることまで示している．特異軌道を持つ hyperpolar 作用の分類は, 完成まではまだまだ遠い状況である．

5.3 Polar 作用の例

ここでは polar 作用に対する canonical extension を紹介する．この場合に拡張の元となる全測地的部分多様体は $(M_\Phi).o$ である．単位元だけからなる群 $\{e\}$ の $(M_\Phi).o$ への作用を polar 作用であると思い, この作用を今までと同様のアイデアで拡張すると, 次の例が得られる．

定理 5.7 (Berndt & Díaz-Ramos & Tamaru ([3])). 群 $A_\Phi N_\Phi$ の M への作用は, 特異軌道を持たない polar 作用である．特に, $\mathrm{rank}(M) > 1$ の場合には, この作用は hyperpolar でない．

ちなみにコンパクト対称空間で $\mathrm{rank}(M) > 1$ の場合には, hyperpolar でない polar 作用の例は知られていない (polar ならば hyperpolar であると予想されている)．我々の例が示すように, 非コ

ンパクトの場合には, 様相が全く異なることが分かる. また, polar 作用の分類については, 上記のような小さな例が見付かったばかりであり, 今後に研究すべき問題が数多く残されている.

参考文献

[1] Berndt, J.: Homogeneous hypersurfaces in hyperbolic spaces, *Math. Z.* **229** (1998), 589–600.

[2] Berndt, J., Brück, M.: Cohomogeneity one actions on hyperbolic spaces, *J. Reine Angew. Math.* **541** (2001), 209–235.

[3] Berndt, J., Díaz-Ramos, J. C., Tamaru, H.: Hyperpolar homogeneous foliations on symmetric spaces of noncompact type, *J. Differential Geom.*, to appear.

[4] Berndt, J., Tamaru, H.: Homogeneous codimension one foliations on noncompact symmetric spaces, *J. Differential Geom.* **63** (2003), no. 1, 1–40.

[5] Berndt, J., Tamaru, H.: Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces with a totally geodesic singular orbit, *Tohoku Math. J.* (2) **56** (2004), no. 2, 163–177.

[6] Berndt, J., Tamaru, H.: Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces of rank one, *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), no. 7, 3425–3438.

[7] Berndt, J., Tamaru, H.: Cohomogeneity one actions on symmetric spaces of noncompact type, preprint (2010), arXiv:1006.1980.

[8] Eberlein, P. B.: *Geometry of nonpositively curved manifolds.* University of Chicago Press, Chicago, London, 1996.

[9] Kaneyuki, S., Asano, H.: Graded Lie algebras and generalized Jordan Lie triple systems, *Nagoya Math. J.* **112** (1988), 81–115.

[10] Koike, N.: Examples of a complex hyperpolar action without singular orbit, *Cubo* **12** (2010) 131–147.

[11] Knapp, A. W.: *Lie groups beyond an introduction. Second edition.* Progress in Mathematics, 140. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2002.

[12] Heintze, E., Liu, X., Olmos, C.: Isoparametric submanifolds and a Chevalley-type restriction theorem, in: *Integrable systems, geometry, and topology*, 151–190, AMS/IP Stud. Adv. Math., 36, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[13] Heintze, E., Palais, R., Terng, C.-L., Thorbergsson, G.: Hyperpolar actions on symmetric spaces, *Geometry, topology, & physics*, 214–245, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, IV, Int. Press, Cambridge, MA, 1995.

[14] Tamaru, H.: On certain subalgebras of graded Lie algebras, *Yokohama Math. J.* **46** (1999), 127–138.

[15] Tamaru, H.: Parabolic subgroups of semisimple Lie groups and Einstein solvmanifolds, *Math. Ann.*, to appear, arXiv:0711.1022.

[16] Tamaru, H.: Homogeneous submanifolds in noncompact symmetric spaces, in: *Proceedings of The Fourteenth International Workshop on Diff. Geom.*, **14** (2010), 111–144.