外部型コンパクト 3-対称空間の全実全測地的部分多様体と $D_4{}^{(3)}$ 型のアフィンリー環

東條晃次　千葉工業大学

1. Introduction.

G を Lie 群、H をその閉部分群で、$\mathrm{Ad}(H)$ がコンパクトなものとする。$<,>$ を G の左不変計量から誘導された等質空間 G/H の G-不変リーマン計量とする。

G の位数 3 の自己同型写像 σ が存在して以下を満たすとき、$(G/H,<,>)$（もしくは、$(G/H,\sigma,<,>)$）をリーマン 3-対称空間とよぶ。

(1) $(G^\sigma)_0 \subset H \subset G^\sigma$, ($G^\sigma$ は σ の固定点全体、$G^\sigma{}_0$ はその単位元を含む連結成分)

(2) s を $\pi \circ \sigma = s \circ \pi$ で定まる $(G/H,<,>)$ の微分同相写像とするとき、s は等長的

$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ をそれぞれ G, H のリー環とし、$\mathfrak{g}$ の $\mathrm{Ad}(H)$-不変かつ σ-不変分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ をとり、$\mathfrak{m}$ と G/H の $\{H\}$ における接空間と $\mathfrak{m}$ を同一視しておく。このとき、$(\mathfrak{m}, \langle,\rangle)$ の等長変換 J を

$$\sigma|_{\mathfrak{m}} = -\frac{1}{2}\mathrm{Id}_{\mathfrak{m}} + \frac{\sqrt{3}}{2}J$$

によって定める。σ と $\mathrm{Ad}(H)$ は可換であることから J から G/H 上に G-不変概複素構造が誘導されることがわかる (同じ記号 J で表す)。この G-不変概複素構造 J を、G/H の標準概複素構造と呼ぶ ([G])。

今、G をコンパクト (単純) リー群、$<,>$ を G の両側不変計量から誘導された G/H のリーマン計量、σ を G の位数 3 の外部型自己同型写像とする。ここでは、J に関する $(G/H,<,>,\sigma)$ の半分次元、全実全測地的部分多様体の分類について述べる。

2. 内部型の場合.

σ が内部型のときは、第 2 種、または第 3 種の単純階別リー環から以下のようにしてコンパクトリーマン 3-対称空間 $(G/H,<,>,\sigma)$ の J に関する半分次元、全実全測地的部分多様体は構成・分類される ([To1], [To2]): $\mathfrak{g}^*$ を noncompact 単純 Lie 環でその複素化も単純であるものとし、

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^*{}_{-\nu} + \cdots + \mathfrak{g}^*{}_0 + \cdots + \mathfrak{g}^*{}_\nu$$

を第 ν 種 ($\nu = 2$ または 3) の単純階別 Lie 環で $\mathfrak{g}^*$ の複素化も単純であるものとする。また、Z をこの階別 Lie 環の characteristic element とし、τ を grade-reversing Cartan involution とする。$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を τ に対応する Cartan decomposition ($\tau|_{\mathfrak{k}} = 1$, $\tau|_{\mathfrak{p}} = -1$) とすると、

$$\sigma := \mathrm{Ad}(\exp\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}Z)$$

によってコンパクト単純リー環 $\mathfrak{g} := \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{p}$ の位数 3 の内部型自己同型写像が定まる。G を $\mathfrak{g}$ を Lie 環とするコンパクト単純 Lie 群とし、H を $\mathfrak{h} := \mathfrak{g}^\sigma$ に対応する G の analytic Lie 部分群とする。さらに、K を $\mathfrak{k}$ に対応する G の analytic Lie 部分群とする。このとき、$o := \{H\} \in G/H$ の K-軌道 $K \cdot o$ は内部型のコンパクトリーマン 3-対称空間 $(G/H,<,>,\sigma)$ の標準概複素構造 J に関して、半分次元、全実全

測地的部分多様体となり。逆に、任意のこのような部分多様体はこのようにして得られたものに共役である。

τ に対応する $\mathfrak{g}$ の対合も τ で表すと, $Z \in \mathfrak{p}$ であることから $\tau(\sqrt{-1}Z) = -\sqrt{-1}Z$ が成り立っている。したがって

$$\tau \circ \sigma = \sigma^{-1} \circ \tau \quad (\tau \circ \sigma = \sigma^2 \circ \tau) \tag{2.1}$$

となることがわかる。

実は一般に次が成り立つ：

補題 2.1 $(G/H, \langle , \rangle, \sigma)$ をコンパクトリーマン 3-対称空間とする (内部型とは限らない)。 G の対合 τ で, (2.1) をみたすものが存在するとき, $G^\tau \cdot o$ は $(G/H, \langle , \rangle, \sigma)$ の J に関する半分次元, 全実全測地的部分多様体となる。逆も成り立つ。

3. $D_4{}^{(3)}$ 型のアフィンリー環.

$\mathfrak{g}_c$, $\mathfrak{t}_c$ をそれぞれ D_4 型の複素単純 Lie 環, $\mathfrak{g}_c$ の Cartan 部分環とし, $\Pi := \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ を $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{t}_c)$ の基本ルート系とする。さらに, $\delta := \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ を $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{t}_c)$ の最高ルートとする。

ν を次で定義される D_4 の Dynkin 図形の自己同型写像 $\bar{\nu}$ から誘導される $\mathfrak{g}_c$ の位数 3 の自己同型写像とする:

$$\bar{\nu}(\alpha_1) = \alpha_4, \quad \bar{\nu}(\alpha_2) = \alpha_2, \quad \bar{\nu}(\alpha_3) = \alpha_1, \quad \bar{\nu}(\alpha_4) = \alpha_3.$$

$\mathfrak{g}_c = \mathfrak{g}_{-\bar{1}} + \mathfrak{g}_{\bar{0}} + \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ を ν の固有空間による直和分解とする。 ここで $\mathfrak{g}_{\bar{i}}$ ($\bar{i} \in \boldsymbol{Z}_3$) は固有値 ξ^i $(\xi^3 = 1)$ に対する固有空間。

今,

$$\mathcal{L}(\mathfrak{g}_c) := \bigoplus_{i \in \boldsymbol{Z}} \mathcal{L}(\mathfrak{g}_c, i), \qquad \mathcal{L}(\mathfrak{g}_c, i) := t^i \otimes \mathfrak{g}_{\bar{i}} \subset \boldsymbol{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{g}_c$$

とおき, さらに

$$\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}_c) := \mathcal{L}(\mathfrak{g}_c) \oplus \boldsymbol{C}K \oplus \boldsymbol{C}d$$

とおく. $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}_c)$ のブラケット積を

$$\begin{aligned}
&[t^i \otimes X, t^j \otimes Y] = t^{i+j} \otimes [X, Y] + \frac{i}{3}\delta_{i+j,0}(X, Y)K, \\
&[K, \hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}_c)] = \{0\}, \\
&[d, t^i \otimes X] = it^i \otimes X.
\end{aligned}$$

で定める。$\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}_c)$ を $D_4{}^{(3)}$ 型の**アフィン Lie 環**と呼ぶ。 また, $\hat{\mathfrak{t}} := t^0 \otimes (\mathfrak{t}_c \cap \mathfrak{g}_{\bar{0}}) + \boldsymbol{C}K + \boldsymbol{C}d$ とおいて, これを $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}_c)$ の **Cartan 部分環**と呼ぶ。

次に $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}_c)$ の Chevalley generators を構成しよう。

$$\begin{aligned}
&\theta := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\
&E_2 := e_{\alpha_1} + e_{\alpha_3} + e_{\alpha_4}, \quad E_3 := e_{\alpha_2}, \\
&F_2 := e_{-\alpha_1} + e_{-\alpha_3} + e_{-\alpha_4}, \quad F_3 := e_{-\alpha_2}, \\
&E_1 := e_{-\theta} + \xi^2 e_{-\bar{\nu}(\theta)} + \xi e_{-\bar{\nu}^2(\theta)}, \quad F_1 := -e_\theta - \xi e_{\bar{\nu}(\theta)} - \xi^2 e_{\bar{\nu}^2(\theta)},
\end{aligned}$$

とおく。ここで, e_α 達は $\mathfrak{g}_c$ の $\mathfrak{t}_c$ に関するルート α に対するルートベクトルで

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = \alpha, \quad [e_\alpha, e_\beta] = \pm e_{\alpha+\beta}$$

をみたすものとする。 このとき,

$$\hat{E}_1 := t \otimes E_1, \quad \hat{E}_i := t^0 \otimes E_i \quad (i = 2, 3),$$
$$\hat{F}_1 := t^{-1} \otimes F_1, \quad \hat{F}_i := t^0 \otimes F_i \quad (i = 2, 3),$$

は $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}_c)$ の Chevalley generators となる。

$a \in \mathrm{C}^\times$ に対して, 準同型写像 $\phi_a : \mathcal{L}(\mathfrak{g}_c) \longrightarrow \mathfrak{g}_c$ を $\phi_a(t^i \otimes X) := a^i X$ で定める。

補題 3.1 $\mathcal{L}(\mathfrak{g}_c)$ の任意の proper な極大イデアルは, ある $a \in \mathrm{C}^\times$ 用いて $\mathrm{Ker}\phi_a = (1 - (a^{-1}t)^3)\mathcal{L}(\mathfrak{g}_c)$ と表される。

4. 主結果.

補題 2.1 より, コンパクトリーマン 3-対称空間 $(G/H, <,>, \sigma)$ の標準概複素構造 J に関する半分次元、全実全測地的部分多様体は, (2.1) を満たす G の対合 τ を用いて $K \cdot o$ $(K = G^\tau)$ と表された。

主定理. 外部型のコンパクトリーマン 3-対称空間 $(G/H, <,>, \sigma)$ の標準概複素構造 J に関する半分次元、全実全測地的部分多様体は次の Table 1. のうちのいずれかに共役である。

Table 1.

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^\sigma$	$\mathfrak{k} = \mathfrak{g}^\tau$	τ
$\mathfrak{so}(8)$	$\mathfrak{g}_2 (= \mathfrak{g}^{\sigma_1})$	$\mathfrak{so}(7)$	τ_1
$\mathfrak{so}(8)$	$\mathfrak{g}_2 (= \mathfrak{g}^{\sigma_1})$	$\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(5)$	τ_2
$\mathfrak{so}(8)$	$\mathfrak{su}(3) (= \mathfrak{g}^{\sigma_2})$	$\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(5)$	τ_3

ここで,

$$\sigma_1 = \nu,$$
$$\sigma_2(E_k) = E_k, \quad \sigma_2(F_k) = F_k \quad \sigma_2(E_3) = \xi E_3, \quad \sigma_2(F_3) = \xi^2 F_3, \quad (k = 1, 2),$$
$$\tau_1(e_{\pm\alpha_1}) = e_{\pm\alpha_1}, \quad \tau_1(e_{\pm\alpha_2}) = e_{\pm\alpha_2}, \quad \tau_1(e_{\pm\alpha_3}) = e_{\pm\alpha_4}$$
$$\tau_2(e_{\pm\alpha_1}) = e_{\pm\alpha_1}, \quad \tau_2(e_{\pm\alpha_2}) = -e_{\pm\alpha_2}, \quad \tau_2(e_{\pm\alpha_3}) = e_{\pm\alpha_4},$$
$$\tau_3 = \nu_0 \circ \omega_0, \quad \nu_0(e_{\alpha_i}) = e_{\alpha_i} \ (i = 2, 4), \ \nu_0(e_{\alpha_1}) = e_{\alpha_3}, \quad \omega_0(e_{\alpha_j}) = -e_{\alpha_j}.$$

5. 主定理の証明.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(8)$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(3) (= \mathfrak{g}^{\sigma_2})$ の場合の証明を述べる。

まず, $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}_c)$ の自己同型写像 $\hat{\sigma}_2$ を次で定める：

$$\hat{\sigma}_2(\hat{E}_k) = \hat{E}_k, \quad \hat{\sigma}_2(\hat{F}_k) = \hat{F}_k, \ k = 1, 2,$$
$$\hat{\sigma}_2(\hat{E}_3) = \xi \hat{E}_3, \quad \hat{\sigma}_2(\hat{F}_3) = \xi^2 \hat{F}_3, \ \hat{\sigma}_2(h) = h, \ h \in \hat{\mathfrak{t}}.$$

$\{\hat{E}_i,\ \hat{F}_i; i=1,2,3\}$ が $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}_c)$ の Chevalley generators であることから, $\hat{\sigma}_2$ が well-defined であることがわかる。このとき, $\phi_1 \circ \hat{\sigma}_2 = \sigma_2 \circ \phi_1$ によって, G の位数 3 の自己同型写像 σ_2 がで定まることもわかる。Table 1. における ν_0 は, $\mathfrak{g}_c$ の Dynkin 図形の対合から誘導された $\mathfrak{g}_c$ の対合で, ω_0 は $\mathfrak{g}_c$ の Chevalley involution と呼ばれるもの。 このとき (実際には, $e_{\alpha_j}, e_{-\alpha_j}$ 達を上手くとる必要があるが),

$$\tau_3(E_1) = F_1,\ \tau_3(E_i) = -F_i, \quad i=2,3$$

となり, $\sigma_2 \circ \tau_3 = \tau_3 \circ {\sigma_2}^2$ が成り立つ。

次に, τ を $\sigma_2 \circ \tau = \tau \circ {\sigma_2}^2$ をみたす $\mathfrak{g}$ の任意の対合とする。$\mathfrak{h} := \mathfrak{g}^{\sigma_2} \cong \mathfrak{su}(3)$ であり, $\mathfrak{h}_c$ は $\{E_i, F_i; i=1,2\}$ で生成される. さらに対称空間の分類と次元の考察をすることから

$$\mathfrak{h}^\tau \cong \mathfrak{so}(3)$$

でなくてはならないことがわかる。$\mathrm{Int}(\mathfrak{h})$ の共役の下で

$$\mathfrak{h}^\tau = \boldsymbol{R}(E_1+F_1) + \boldsymbol{R}(E_2-F_2) + \boldsymbol{R}[E_1+F_1, E_2-F_2]$$

としてよので, $\tau(E_1+F_1) = E_1+F_1$, $\tau(E_1-F_1) = -(E_1-F_1)$ などから, 次がわかる：

$$\tau(E_1) = F_1, \quad \tau(F_1) = E_1, \quad \tau(E_2) = -F_2, \quad \tau(F_2) = -E_2. \tag{5.1}$$

補題 5.1 $\tau(E_3) \in \boldsymbol{C}F_3$.

補題 5.1 の証明： $\sigma_2(E_3) = \xi E_3, \quad \sigma_2(F_3) = \xi^2 F_3, \quad \sigma_2 \circ \tau = \tau \circ {\sigma_2}^2$ であったから

$$\sigma_2(\tau(E_3)) = \xi^2 \tau(E_3),\ \text{すなわち}\ \tau(E_3) \in \mathfrak{g}(\sigma_2, \xi^2). \tag{5.2}$$

ここで, $\mathfrak{g}(\sigma_2,\xi^2)$ は σ_2 の固有値 ξ^2 に対する固有空間。今、$\mathcal{L}_\gamma$ を $\mathcal{L}(\mathfrak{g}_c)$ のルート γ に対するルート空間とすると, $\mathfrak{g}(\sigma_2, \xi^{\pm 1})$ は次の部分空間を ϕ_1 で $\mathfrak{g}_c$ に落としたものに一致する：

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{\pm\gamma_3} + \mathcal{L}_{\pm(\gamma_2+\gamma_3)} + \mathcal{L}_{\pm(2\gamma_2+\gamma_3)} + \mathcal{L}_{\pm(3\gamma_2+\gamma_3)} + \mathcal{L}_{\pm(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)} \\
&+\mathcal{L}_{\pm(\gamma_1+2\gamma_2+\gamma_3)} + \mathcal{L}_{\pm(\gamma_1+3\gamma_2+\gamma_2)} + \mathcal{L}_{\pm(2\gamma_1+2\gamma_2+\gamma_3)} \\
&+\mathcal{L}_{\pm(2\gamma_1+3\gamma_2+\gamma_3)} + \mathcal{L}_{\pm(3\gamma_1+3\gamma_2+\gamma_3)}.
\end{aligned}$$

$\mathfrak{g}(\sigma_2, \xi^{\pm 1})$ を $\mathfrak{k} := \mathfrak{g}(\sigma_2, 1)$-加群とみたとき, 上記のことより, E_3 が $\mathfrak{g}(\sigma_2, \xi)$ の lowest weight vector であり, さらに (5.1), (5.2) より $\tau(E_3)$ は $\mathfrak{g}(\sigma_2, \xi^2)$ の highest weight vector となる。 したがって,

$$\tau(E_3) \in \phi_1(\mathcal{L}_{-\gamma_3}) = \boldsymbol{C}F_3$$

となり, 補題 5.1 が示される。

補題 5.1 より

$$\tau(E_3) = cF_3,\ \tau(F_3) = c^{-1}E_3, \quad c \in \boldsymbol{C}\ (|c| = 1)$$

とおける。

注意 5.2 $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ としているので, $|c| = 1$ としている。また, $\tau = \tau_3$ の場合, $c = -1$ となっており, 実はこのことから任意の τ い対して $c^3 = -1$ でなくてはならないことがわかる。

任意の $q \in \boldsymbol{C}$ $(|q| = 1)$ に対して,

$$\hat{\mu}(\hat{E}_1) = \hat{E}_1, \quad \hat{\mu}(\hat{E}_2) = \hat{E}_2, \quad \hat{\mu}(\hat{E}_3) = q\hat{E}_3,$$
$$\hat{\mu}(\hat{F}_1) = \hat{F}_1, \quad \hat{\mu}(\hat{F}_2) = \hat{F}_2, \quad \hat{\mu}(\hat{F}_3) = q^{-1}\hat{F}_3,$$

により $\mathcal{L}(\mathfrak{g}_c)$ の自己同型 $\hat{\mu}$ が定まる。このとき, 直接計算してみると

$$\hat{\mu}((1-t^3)\hat{E}_2) = (1-q^3t^3)\hat{E}_2, \text{したがって } \hat{\mu}((1-t^3)\mathcal{L}(\mathfrak{g}_c) = (1-q^3t^3)\mathcal{L}(\mathfrak{g}_c)$$

が成り立つことがわかる。したがって, 補題 3.1 から $\mu \circ \phi_1 = \phi_{s^{-1}} \circ \hat{\mu}$ により, $\mathfrak{g}_c$ の ($\mathfrak{k}_c$ を不変にする) 自己同型 μ が定義されることがわかる。ここで, s は $s^3 = q^3$ を満たす複素数。

$\tau \circ \mu$ と $\mu \circ \tau_3$ を計算してみると次が簡単に確かめられる：

$$\begin{aligned} &\tau \circ \mu(E_1) = s^{-1}F_1, \quad && \mu \circ \tau_3(E_1) = sF_1, \\ &\tau \circ \mu(E_2) = -F_2, && \mu \circ \tau_3(E_2) = -F_2, \\ &\tau \circ \mu(E_3) = cqF_3, && \mu \circ \tau_3(E_3) = -q^{-1}F_3. \end{aligned}$$

したがって, $s^2 = 1$, $cq^2 = -1$ とすれば ($s = -1$, $q = c$), $\mu^{-1}\tau\mu = \tau_3$ が成り立つ。 以上から, $\sigma = \sigma_2$ の場合に主定理が証明された。

注意 5.3 $\sigma = \sigma_1$ の場合, $\mathfrak{k} := \mathfrak{g}^{\sigma_1} \cong \mathfrak{g}_2$ は

$$E_2, \ E_3, \ F_2, \ F_3,$$

で生成される。この場合, (2.1) を満たす $\mathfrak{g}$ の対合 τ は, $\mathrm{Int}(\mathfrak{h})$ の共役の下で次のいずれかをみたすことが分かる (対称空間の分類より)：

$$\begin{aligned} &(1) \quad \tau|_{\mathfrak{k}}(E_2) = E_2, \ \tau|_{\mathfrak{k}}(F_2) = F_2, \ \tau|_{\mathfrak{k}}(E_3) = -E_3, \ \tau|_{\mathfrak{k}}(F_3) = -F_3, \\ &(2) \quad \tau|_{\mathfrak{k}} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{k}}. \end{aligned}$$

$\sigma = \sigma_2$ の場合と同様の議論により, τ は, (1) の場合は τ_1 と, (2) の場合は τ_2 と共役になることが示される。

参考文献

[G] A. Gray. *Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3,* J. Differetial Geom. **7** (1972) 343–369

[To1] K. Tojo, *Totally real totally geodesic submanifolds of compact* 3*-symmetric spaces,* Tôhoku Math. J., **53** (2001) 131–143

[To2] K. Tojo, *Classification of totally real and totally geodesic submanifolds of compact 3-symmetric spaces,* J. Math. Soc. Japan, **58** (2006) 17–53