境界付き多様体のモースホモロジー
Morse homology of manifolds with boundary

赤穂まなぶ
首都大学東京 大学院理工学研究科 数理情報科学専攻

1. はじめに

本稿では [1] で導入した境界付き多様体のモースホモロジーについて解説を行う. そもそもモースホモロジーが明確に意識されたのはE. ウィッテンによる超対称性とモース理論との関係を述べた論文 [5] に始まる. 次節で詳しく述べるがモースホモロジーとはおおよそ次のようなものである. M をリーマン多様体とし, $f: M \to \mathbb{R}$ を M 上のモース関数とする. そのとき f の臨界点を生成元としモース指数を次数とする次数付き加群を考え, さらにモース指数の差が 1 の臨界点の間を結ぶ勾配ベクトル場の積分曲線の本数を結合係数とする準同型写像を定義する. するとこの次数付き加群と準同型写像はチェイン複体となり, これを**モース複体**とよぶ. またそのホモロジー群を**モースホモロジー**とよび, 実はこのようにして定義したモースホモロジーは M の特異ホモロジーと同型になるということがわかる.

本稿では次の第 2 節で発見的に閉多様体のモースホモロジーを導入し, それを踏まえ第 3 節では境界付き多様体のモースホモロジーについて述べる.

2. 閉多様体のモースホモロジー

M を n 次元の向き付けられた閉多様体, g を M 上のリーマン計量とする. 次に $f: M \to \mathbb{R}$ を M 上のモース関数とする. すると次の式により M 上のベクトル場 X_f が定まる.

$$df = g(X_f, \cdot).$$

この X_f を勾配ベクトル場とよぶ. また $\varphi_t : M \to M$ を次の式で定まるイソトピーとする.

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_t}{dt} &= -X_f \circ \varphi_t, \\ \varphi_0 &= \mathrm{id}_M. \end{cases}$$

ただし id_M は M 上の恒等写像である. そこで f の臨界点 p に対し, p の安定多様体 S_p を次で定義する.

$$S_p := \left\{ x \in M : \lim_{t \to +\infty} \varphi_t(x) = p \right\}.$$

また同様に f の臨界点 p に対して p の不安定多様体 U_p を次で定義する.

$$U_p := \left\{ x \in M : \lim_{t \to -\infty} \varphi_t(x) = p \right\}.$$

このとき臨界点 p のモース指数を $\mu(p)$ と書くことにすると S_p は $n - \mu(p)$ 次元の開球に微分同相であり, U_p は $\mu(p)$ 次元の開球に微分同相である. また S_p と U_p は p において横断的に交わり, S_p と U_p にはその交点数が $+1$ となるようにそれぞれ向きを与えておく.

ここで注意点が一つ. 異なる臨界点の不安定多様体は交わらないので M は不安定多様体の直和になる. しかし一般に不安定多様体による多様体 M の分割は CW 複体にはならない. これはある不安定多様体が同じ次元の不安定多様体に貼り付く可能性があり, その場合 CW 複体の条件を満たさないからである. しかし実はどんなモース関数もほんの少し摂動すればそのようなことはなくなり, 不安定多様体が CW 複体を与えることが知られている. したがって以下では不安定多様多による M の分割が CW 複体を与えていると仮定する.

ひとたび CW 複体が与えられると, そこから M の特異ホモロジーを計算することができる. まず M^k を以下のように定義する.

$$M^k := \bigcup_{\mu(p) \leq k} U_p.$$

また連結準同型

$$\delta_k : H_k(M^k, M^{k-1}; \mathbb{Z}) \to H_{k-1}(M^{k-1}, M^{k-2}; \mathbb{Z})$$

は

$$\delta_{k-1} \circ \delta_k = 0$$

を満たす. これは連結準同型の幾何学的な意味が相対サイクルの境界を取るということからも直ちに分かる (つまり境界の境界は空集合なので $\delta_{k-1} \circ \delta_k = 0$). したがってチェイン複体 $(H_*(M^*, M^{*-1}; \mathbb{Z}), \delta_*)$ が得られたが, このチェイン複体のホモロジー群は M の特異ホモロジー $H_*(M; \mathbb{Z})$ と同型になる. これが CW 複体から特異ホモロジーを計算する方法であった.

一方, 自然な同一視

$$H_k(M^k, M^{k-1}; \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{\mu(p)=k} \mathbb{Z} U_p$$

の下では連結準同型は次の様に書き下せる

$$\delta_k U_p = \sum_{\mu(q)=k-1} \sharp(\partial W_p \cap S_q) U_q.$$

ただし W_p は十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して

$$W_p := \{x \in U_p : f(x) \geq f(p) - \varepsilon\}$$

で定義され, $\sharp(\partial W_p \cap S_q)$ は ∂W_p と S_q の交点数である (摂動されたモース関数では ∂W_p と S_q は横断的に交わることに注意する). 実は連結準同型のこの表し方は本質的に J. ミルナーの本 [4] に登場している. そしてこの表し方は我々にモースホモロジーの定義を教えてくれる. まずモース関数 f の臨界点を生成元とする次数付き加群 $C_k(f)$ を次で定義する.

$$C_k(f) := \bigoplus_{\mu(p)=k} \mathbb{Z}p.$$

ただし p は f の臨界点である. これは p と U_p の同一視の下 $H_k(M^k, M^{k-1}; \mathbb{Z})$ と同型である. 次に ∂W_p と S_q の交点 x は, p と q を結ぶ $-X_f$ の積分曲線で x を通過するものと一対一の対応が付けられる. したがって臨界点 p, q に対して

$$\widetilde{\mathcal{M}}(p,q) := \left\{ l : \mathbb{R} \to M : \frac{dl}{dt} = -X_f \circ l(t), \lim_{t\to-\infty} l(t) = p, \lim_{t\to+\infty} l(t) = q \right\}$$

と定義し, また $\widetilde{\mathcal{M}}(p,q)$ の元 l, l' に対してある $c \in \mathbb{R}$ が存在して $l(t) = l'(t+c)$ となるとき同値と定め, その同値類の集合を $\mathcal{M}(p,q)$ と定義する. このとき $\mathcal{M}(p,q)$ には $\partial W_p \cap S_q$ との同一視を通じて向きを与える. そこで準同型写像 $\partial_k : C_k(f) \to C_{k-1}(f)$ を

$$\partial_k p := \sum_{\mu(q)=k-1} \sharp\mathcal{M}(p,q) q$$

と定義する. ただし $\sharp\mathcal{M}(p,q)$ は $\mathcal{M}(p,q)$ の正の向きの点を $+1$, 負の向きの点を -1 としたときのそれらの和である. この ∂_k は $C_k(f) \cong H_k(M^k, M^{k-1}; \mathbb{Z})$, $\mathcal{M}(p,q) \cong \partial W_p \cap S_q$ の同一視の下 δ_k に一致する. したがってわれわれはチェイン複体 $(C_*(f), \partial_*)$ を得た. これを**モース複体**, そのホモロジー群を**モースホモロジー**とよぶ. また導入の仕方よりモースホモロジーが M の特異ホモロジーと同型になることも明らかである.

3. 境界付き多様体のモースホモロジー

本節では [1] で導入された境界付き多様体のモースホモロジーの解説を行う.

M をコンパクトで向き付けられた境界付き n 次元多様体, ∂M をその境界とする. また ∂M のカラー近傍を $[0,1) \times \partial M$ とし, $[0,1)$ 成分の座標

を r と書くことにする．次に g を $M \setminus \partial M$ 上のリーマン計量でカラー近傍に制限すると

$$g|_{(0,1)\times\partial M} = \frac{1}{r} dr \otimes dr + r g_{\partial M}$$

の形をしているものとする．ただし $g_{\partial M}$ は ∂M 上のリーマン計量である．そして $f : M \setminus \partial M \to \mathbb{R}$ を $M \setminus \partial M$ 上のモース関数で次の条件 (1)(2) を満たすものとする．

(1) $f|_{(0,1)\times\partial M} = r f_{\partial M}$, ただし $f_{\partial M}$ は ∂M 上のモース関数.

(2) $\gamma \in \partial M$ が $f_{\partial M}$ の臨界点ならば $f_{\partial M}(\gamma) \neq 0$.

$\gamma \in \partial M$ が $f_{\partial M}$ の臨界点で $f_{\partial M}(\gamma) > 0$ となるとき γ を**正の境界臨界点**とよび, 同様に $\delta \in \partial M$ が $f_{\partial M}$ の臨界点で $f_{\partial M}(\delta) < 0$ となるとき δ を**負の境界臨界点**とよぶ．またここでは f の臨界点を**内部臨界点**とよぶことにする．なお本節では p, p' と書いたら内部臨界点, γ, γ' と書いたら正の境界臨界点, δ, δ' と書いたら負の境界臨界点を表すものとする．

カラー近傍 $(0,1) \times \partial M$ 上での勾配ベクトル場 X_f は

$$X_f|_{(0,1)\times\partial M} = r f_{\partial M} \frac{\partial}{\partial r} + X_{f_{\partial M}}$$

となる．ただし $X_{f_{\partial M}}$ は $f_{\partial M}$ と $g_{\partial M}$ に関する勾配ベクトル場である．そこで M 上のベクトル場 $\overline{X}_f$ を

$$\overline{X}_f := \begin{cases} X_f, & \text{on } M \setminus \partial M, \\ X_{f_{\partial M}} & \text{on } \{0\} \times \partial M \end{cases}$$

と定義する．また $\overline{\varphi}_t : M \to M$ を次の式で定まるイソトピーとする．

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{d\overline{\varphi}_t}{dt} & = & -\overline{X}_f \circ \varphi_t, \\ \overline{\varphi}_0 & = & \mathrm{id}_M. \end{array} \right.$$

さて閉多様体の場合, 摂動されたモース関数の不安定多様体は CW 複体の構造を定めた．しかし上の境界付き多様体上のモース関数は $f, f_{\partial M}$ を摂動しても一般に CW 複体の構造を与えるとは限らない．以下その点について説明する．まず B^k を k 次元開球とし, $\overline{B}^k$ を k 次元閉球とする．また $\partial\overline{B}^k$ で $\overline{B}^k$ の境界を表す．次に

$$H^k := \{(x_1, \ldots, x_k) : x_1^2 + \cdots + x_k^2 < 1, x_k \geq 0\}$$

とし, $\partial H^k := \{(x_1, \ldots, x_k) \in H^k : x_k = 0\}$ とする．内部臨界点 $p \in M \setminus \partial M$ に対し, その安定多様体 S_p を

$$S_p := \left\{ x \in M : \lim_{t \to +\infty} \overline{\varphi}_t(x) = p \right\} \subset M \setminus \partial M,$$

と定義する．また同様に内部臨界点 $p \in M \setminus \partial M$ に対し, その不安定多様体 U_p を

$$U_p := \left\{ x \in M : \lim_{t \to -\infty} \overline{\varphi}_t(x) = p \right\} \subset M \setminus \partial M.$$

と定義する．このとき S_p は $B^{n-\mu(p)}$ に微分同相であり, U_p は $B^{\mu(p)}$ に微分同相である．また S_p と U_p は p において横断的に交わり, S_p と U_p にはその交点数が $+1$ となるようにそれぞれ向きを与えておく．次に正の境界臨界点 $\gamma \in \partial M$ に対し, その安定多様体 S_γ を

$$S_\gamma := \left\{ x \in M : \lim_{t \to +\infty} \overline{\varphi}_t(x) = \gamma \right\} \subset M,$$

と定義し, また同様に正の境界臨界点 $\gamma \in \partial M$ に対し, その不安定多様体 U_γ を

$$U_\gamma := \left\{ x \in M : \lim_{t \to -\infty} \overline{\varphi}_t(x) = \gamma \right\} \subset \partial M.$$

と定義する．このとき S_γ は $H^{n-\mu(\gamma)}$ に微分同相であり，U_γ は $B^{\mu(\gamma)}$ に微分同相である．ただしここで $\mu(\gamma)$ は $f_{\partial M} : \partial M \to \mathbb{R}$ のモース指数である．また S_γ と U_γ は γ において横断的に交わり, S_γ と U_γ にはその交点数が $+1$ となるようにそれぞれ向きを与えておく．最後に負の境界臨界点 $\delta \in \partial M$ に対し, その安定多様体 S_δ を

$$S_\delta := \left\{ x \in M : \lim_{t \to +\infty} \overline{\varphi}_t(x) = \delta \right\} \subset \partial M,$$

と定義し, また同様に負の境界臨界点 $\delta \in \partial M$ に対し, その不安定多様体 U_δ を

$$U_\delta := \left\{ x \in M : \lim_{t \to -\infty} \overline{\varphi}_t(x) = \delta \right\} \subset M.$$

と定義する．このとき S_δ は $B^{n-1-\mu(\gamma)}$ に微分同相であり，U_δ は $H^{\mu(\gamma)+1}$ に微分同相である．ただしここでも $\mu(\gamma)$ は $f_{\partial M} : \partial M \to \mathbb{R}$ のモース指数とする．また S_δ と U_δ は δ において横断的に交わり, S_δ と U_δ にはその交点数が $+1$ となるようにそれぞれ向きを与えておく．

さて我々の境界付き多様体上のモース関数の不安定多様体が一般には CW 複体を与えない理由であるが, まず U_δ は開球に微分同相ではない．また U_γ は同じ次元の U_δ に貼り付く可能性がある．これはモース関数を摂動しても解消されない．したがって我々の境界付き多様体上のモース関数の不安定多様体は一般には CW 複体を与えない．しかしこれらの不安定多様体を用いて M に適当なストラティフィケイションを与えることができ, そこから得られるあるチェイン複体のホモロジー群が M のアブソリュートな特異ホモロジー $H_*(M;\mathbb{Z})$ と同型になる．次にそのことを説明する．

正の境界臨界点 $\gamma \in \partial M$ に対し微分同相写像 $i_\gamma : B^{\mu(\gamma)} \to U_\gamma \subset \partial M$ を一つ固定し, これを連続写像 $\bar{i}_\gamma : \overline{B}^{\mu(\gamma)} \to \partial M$ に拡張する. このとき注意であるが $\bar{i}_\gamma$ は $\partial\overline{B}^{\mu(\gamma)}$ 上で単射とは限らない. 次に $\delta_1, \ldots, \delta_N \in \partial M$ を $\mu(\delta_1) = \cdots = \mu(\delta_N) = \mu(\gamma) - 1$ となる負の境界臨界点とし, これもまた同様に微分同相写像 $i_{\delta_j} : H^{\mu(\delta_j)+1} \to U_{\delta_j} \subset M$ $(j = 1, \ldots, N)$ を固定しておく. ここで γ と δ_j を結ぶ勾配ベクトル場の積分曲線の本数を k_j 本とする (もちろん $k_j = 0$ もありうる). $H_1^{\mu(\delta_j)+1}, \ldots, H_{k_j}^{\mu(\delta_j)+1}$ を k_j 個の $H^{\mu(\delta_j)+1}$ のコピーとし, A_{ji} を $\bar{i}_\gamma^{-1}(U_{\delta_j} \cap \partial M) = A_{j1} \sqcup \cdots \sqcup A_{jk_j} \subset \partial\overline{B}^{\mu(\gamma)}$ で定義する. ただし A_{ji} はそれぞれ連結成分とする. そこで $x \in A_{ji} \subset \partial\overline{B}^{\mu(\gamma))}$ と $y \in \partial H_i^{\mu(\delta_j)+1}$ を $\bar{i}_\gamma(x) = i_{\delta_j}(y)$ となるとき同一視し $H_1^{\mu(\delta_j)+1}, \ldots, H_{k_j}^{\mu(\delta_j)+1}$ を $\overline{B}^{\mu(\gamma)}$ に貼りつけ, e_γ を $\overline{B}^{\mu(\gamma)} \cup H_1^{\mu(\delta_j)+1} \cup \cdots \cup H_{k_j}^{\mu(\delta_j)+1}$ の内点集合とする. このとき e_γ は $\mu(\gamma)$ 次元開球と同相である. つぎに写像 $I_\gamma : e_\gamma \to M$ を $B^{\mu(\gamma)}, H_1^{\mu(\delta_1)+1}, \ldots, H_{k_N}^{\mu(\delta_N)+1}$ 上に制限したときそれぞれ $i_\gamma, i_{\delta_1}, \ldots, i_{\delta_N}$ に等しい写像と定義する. このとき注意であるが I_γ は $k_j \geq 2$ のとき $H_1^{\mu(\delta_j)+1} \cup \cdots \cup H_{k_j}^{\mu(\delta_j)+1}$ 上で単射ではない.

これだけの準備の下, 次に M の特異ホモロジーの計算方法を述べる. まず M^k を

$$M^k := \bigcup_{\mu(p) \leq k} U_p \cup \bigcup_{\mu(\gamma) \leq k} U_\gamma \cup \bigcup_{\mu(\delta) \leq k-1} U_\delta$$

と定義する. ただしここでも p は内部臨界点, γ は正の境界臨界点, δ は負の境界臨界点とする. このとき M^k は

$$\bigcup_{\mu(p) \leq k} U_p \cup \bigcup_{\mu(\gamma) \leq k} I_\gamma(e_\gamma)$$

にホモトピックであることに注意する. また連結準同型

$$\delta_k : H_k(M^k, M^{k-1}; \mathbb{Z}) \to H_{k-1}(M^{k-1}, M^{k-2}; \mathbb{Z})$$

は以前と同様に

$$\delta_{k-1} \circ \delta_k = 0$$

を満たす. したがって我々はチェイン複体 $(H_*(M^*, M^{*-1}; \mathbb{Z}), \delta_*)$ を得たが, このチェイン複体のホモロジー群も閉多様体のときと同様に M のアブソリュートな特異ホモロジー $H_*(M; \mathbb{Z})$ と同型になる ([1] 参照).

一方, 自然な同一視

$$H_k(M^k, M^{k-1}; \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{\mu(p)=k} \mathbb{Z}U_p \oplus \bigoplus_{\mu(\gamma)=k} \mathbb{Z}I_\gamma$$

の下では連結準同型は次の様に書き下せる

$$\delta_k U_p = \sum_{\mu(p')=k-1} \sharp(\partial W_p \cap S_{p'}) U_{p'} + \sum_{\mu(\gamma')=k-1} \sharp(\partial W_p \cap S_{\gamma'}) I_{\gamma'},$$
$$\delta_k I_\gamma = \sum_{\mu(\gamma')=k-1} \sharp(\partial W_\gamma \cap S_{\gamma'}) I_{\gamma'} + \sum_{\substack{\mu(\delta)=k-1 \\ \mu(p')=k-1}} \sharp(\partial W_\gamma \cap S_\delta)\sharp(\partial W_\delta \cap S_{p'}) U_{p'}.$$

ただしここでも p, p' は内部臨界点, γ, γ' は正の境界臨界点, δ は負の境界臨界点とする．我々はこれをもとに境界付き多様体のモースホモロジーを次のように定義する．まず f の内部臨界点と正の境界臨界点を生成元とする次数付き加群 $C_k(f)$ を次で定義する．

$$C_k(f) := \bigoplus_{\mu(p)=k} \mathbb{Z}p \oplus \bigoplus_{\mu(\gamma)=k} \mathbb{Z}\gamma.$$

ただし p は f の内部臨界点, γ は正の境界臨界点である．これは p と U_p, γ と I_γ の同一視の下 $H_k(M^k, M^{k-1}; \mathbb{Z})$ と同型である．また $\mathcal{M}(p,p')$, $\mathcal{M}(p,\gamma')$, $\mathcal{M}_N(\gamma,\gamma')$, $\mathcal{M}_N(\gamma,\delta)$, $\mathcal{M}(\delta,p')$ をそれぞれ p と p' を結ぶ (M における) 勾配ベクトル場の積分曲線の集合, p と γ' を結ぶ (M における) 勾配ベクトル場の積分曲線の集合．γ と γ' を結ぶ (∂M における) 勾配ベクトル場の積分曲線の集合, γ と δ を結ぶ (∂M における) 勾配ベクトル場の積分曲線の集合, δ と p' を結ぶ (M における) 勾配ベクトル場の積分曲線の集合とする．そこで準同型写像 $\partial_k : C_k(f) \to C_{k-1}(f)$ を

$$\partial_k p := \sum_{\mu(p')=k-1} \sharp\mathcal{M}(p,p')p' + \sum_{\mu(\gamma')=k-1} \sharp\mathcal{M}(p,\gamma')\gamma',$$
$$\partial_k \gamma := \sum_{\mu(\gamma')=k-1} \sharp\mathcal{M}_N(\gamma,\gamma')\gamma' + \sum_{\substack{\mu(\delta)=k-1 \\ \mu(p')=k-1}} \sharp\mathcal{M}_N(\gamma,\delta)\sharp\mathcal{M}(\delta,p')p'$$

と定義する．この ∂_k は $C_k(f) \cong H_k(M^k, M^{k-1}; \mathbb{Z})$, $\mathcal{M}(*,*') \cong \partial W_* \cap S_{*'}$ の同一視の下 δ_k に一致する．したがって我々はチェイン複体 $(C_*(f), \partial_*)$ を得た．これが我々のモース複体である．またその導入の仕方からこのモース複体のホモロジー群が M のアブソリュートな特異ホモロジーと同型になることも明らかである．

ここで一つ注意．本稿では不安定多様体から得られる CW 複体を用いた特異ホモロジーの計算方法を通じて発見的にモースホモロジーを導入した．したがってその導入の仕方から $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ は明らかであるが, 一方勾配ベクトル場の積分曲線のモジュライ空間のコンパクト化からもこれを証明することができる．その証明方法はフレアー理論において非常に重要であるが, 詳しくは [1] や [2] を参照して頂きたい．

境界付き多様体のモースホモロジーの応用として境界付き多様体のモースの不等式が得られる.

定理 (モースの不等式). 境界付き多様体 M 上の我々のモース関数について

$$\begin{array}{l} \sharp\{\text{ モース指数が } k \text{ の内部臨界点 }\} \\ \quad + \sharp\{\text{ モース指数が } k \text{ の正の境界臨界点 }\} \end{array} \geq \dim H_k(M;\mathbb{Z})$$

が成り立つ.

また境界付き多様体 M とその境界 ∂M の間の相対ホモロジー長完全系列

$$\cdots \to H_k(\partial M;\mathbb{Z}) \to H_k(M;\mathbb{Z}) \to H_k(M,\partial M;\mathbb{Z}) \to \cdots$$

をモースホモロジーの言葉で書き換えることも可能である ([1] 参照). さらに境界付き多様体のモースホモロジーにおいてカップ積を記述することもできる ([2] 参照).

今回フレアー理論への応用は全く述べることができなかったが詳しくは [1] や [2] を参照して頂きたい.

参考文献

[1] M. Akaho, *Morse homology and manifolds with boundary.* Commun. Contemp. Math. 9 (2007), no. 3, 301-334.

[2] M. Akaho, *Cup products on Morse homology of manifolds with boundary.* preprint. (2011).

[3] A. Floer, *Witten's complex and infinite-dimansional Morse theory.* J. Differential Geom. 30 (1989), no. 1, 207-221.

[4] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem.* Noted by L. Siebenmann and J. Sondow Princeton University Press, Princeton, N.J. 1965 v+116 pp.

[5] E. Witten, *Supersymmetry and Morse theory.* J. Differential Geom. 17 (1982), no. 4, 661-692.