射影構造の裏返し変換

大阪市立大学 数学研究所　加藤宏尚*

部分多様体幾何とリー群作用　2011 年 9 月 2 日

概要

射影構造とは捩れのない線形接続のある同値類で，測地線の形を抽出した幾何構造である．本稿では射影カルタン接続のある変換（裏返し変換）について考察する．これは多様体上の平坦な射影構造から，次元の異なる新たな多様体と平坦な射影構造を得る方法を与える．本稿は幾何学シンポジウム（2011 年８月）の予稿に加筆を行ったものである．

1. 射影構造と Cartan 接続

本節では射影構造の定義を確認する．そして射影構造の裏返し変換を論じるために，[5] の方法に基づいて射影構造と Cartan 接続との対応について要約する．Lie 環の分解と射影 Cartan 接続の定義については [1] を参照した.

今 F_{n+1} を $n+1$ 次元の実ベクトル空間とし，$\pi : F_{n+1} - \{0\} \to P_{n+1}$ により実射影空間を表す．実射影変換群 $GL(F_{n+1})/R^{\times}I$ を $P(n+1)$ と書く．直和分解 $F_{n+1} = F_1 \oplus F_n$ に応じて $P(n+1)$ の Lie 環 $\mathfrak{p}(n+1)$ は以下のように 3 つの次数付けられた Lie 環に分解される：$\mathfrak{p}(n+1) = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$．ここで

$$\mathfrak{g}_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \xi & 0 \end{pmatrix} \middle| \xi \in F_n \right\},\ \mathfrak{g}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -\mathrm{tr}A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \middle| A \in \mathfrak{gl}(F_n) \right\},\ \mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| E \in {F_n}^* \right\}$$

である．以後文脈により F_n と $\mathfrak{g}_{-1}$、${F_n}^*$ と $\mathfrak{g}_1$ 等を同一視する．F_1 の基底 $\{v\}$ を固定し，$P(n+1)$ の $\pi(v)$ における等方部分群を $P'(n+1)$ と書く．このとき等方部分群 $P'(n+1)$ の Lie 環 $\mathfrak{p}'(n+1)$ は $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ と等しい．また $P'(n+1)$ の等方表現 $\rho : P'(n+1) \to GL(F_n)$ と包含写像 $\imath : GL(F_n) \hookrightarrow P'(n+1)$ は次で与えられる：

$$\rho(\begin{pmatrix} a & E \\ 0 & A \end{pmatrix}) = \frac{1}{a}A, \quad \imath(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

次に n 次元実多様体 M 上の射影構造を定義する．今 $\pi_L : P_L \to M$ を M の frame 束とし，θ を P_L 上の F_n に値を取る自然な一次微分形式とする．また χ，χ' を P_L 上の捩れのない接続形式とするとき，χ と χ' が射影同値であるとは次をみたすときを言う：ある ${F_n}^*$ に値を取る P_L 上の関数 F が存在して $\chi - \chi' = [\theta, F]$ をみたす．ここで右辺の括弧積は $\mathfrak{g}_{-1}$ と $\mathfrak{g}_1$ の括弧積で計算す

* katohiro@sci.osaka-cu.ac.jp,　日本学術振興会特別研究員 PD

る．χ の射影同値類 $[\chi]$ を射影構造という．M 上の射影構造 $(P_L, [\chi])$ は Cartan 接続を次のようにして誘導する．$GL(F_n)$ から $P'(n+1)$ への自然な包含写像を用い，P_L に同伴するファイバー $P'(n+1)$ のファイバー束 $Q = (P_L \times_{GL(F_n)} P'(n+1))$ を構成し，$h : P_L \to Q$ を自然な埋め込みとする．次に Q 上の $\mathfrak{p}(n+1)$ に値を取る一次微分形式 ω を定義する．$\omega_{-1}, \omega_{\mathfrak{p}'(n+1)}$ により ω の $\mathfrak{g}_{-1}$ 成分，$\mathfrak{p}'(n+1)$ 成分を表すこととする．このとき $X \in T_x P_L$ に対し，

$$\begin{cases} \omega_{-1}(h_* X) := \theta(X) \\ \omega_{\mathfrak{p}'(n+1)}(h_* X) := \chi(X) + J_x(\theta(X)) \end{cases}$$

と置く．ここで J_x は F_n から ${F_n}^*$ への写像で，リッチテンソル S を用いて次で定義される：

$$< \xi, J_x(\xi') > = \frac{1}{n^2-1}(S_{\pi_L(x)}(x\cdot\xi, x\cdot\xi') + nS_{\pi_L(x)}(x\cdot\xi', x\cdot\xi)) \quad (\xi, \xi' \in F_n).$$

一般の接空間の元は $\mathfrak{p}'(n+1)$ の元 A に対する基本ベクトル場 A^* を用いて $h_* X + A^*_{h(x)}$ と書け，$\omega(h_* X + A^*_{h(x)}) := \omega(h_* X) + A$ と定義する．結果として M 上の構造群 $P'(n+1)$ の主ファイバー束 Q と，Q 上の $\mathfrak{p}(n+1)$ に値を取る一次微分形式 ω を得る．この (Q, ω) は M 上の $P(n+1)/P(n+1)'$ 型の Cartan 接続を与える．実際 $u \in P$, $a \in P'(n+1)$, $A \in \mathfrak{p}'(n+1)$ に対して次が成り立つ：

1)$\omega_u : T_u P \to \mathfrak{p}(n+1)$ は線形同型写像を与える．
2)$R_a^* \omega = Ad(a^{-1})\omega$.
3)$\omega(A^*) = A$ （A^*は基本ベクトル場).

特にこの $P(n+1)/P(n+1)'$ 型の Cartan 接続は射影 Cartan 接続と呼ばれる．また $d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$ をみたすとき、Cartan 接続は平坦であると言う。

逆に、M 上の射影 Cartan 接続 (Q, ω) は M 上の線形接続を次のようにして与える（cf. [5], [1]）．$\widetilde{Q} := Q/ker\rho$ と置くと，等方表現 $\rho : P'(n+1) \to GL(F_n)$ は全射なので $\widetilde{Q}$ は M 上の構造群 $GL(F_n)$ の主ファイバー束である．$\rho : Q \to \widetilde{Q}$ を自然な射影としたとき，$\widetilde{Q}$ 上の１次微分形式 θ を次で定義する：$\rho^*\theta = \omega_{-1}$．各 $x \in \widetilde{Q}$ に対して $\theta_x : T_x\widetilde{Q} \to \mathfrak{g}_{-1}$ はファイバー方向の接空間に核を持つ全射を与えるので，x を M の接空間の基底と同一視できる．このようにして $\widetilde{Q}$ は θ を自然な一次微分形式としてもつ接 n 枠束 P_L と同一視できる．包含写像 $\imath : GL(F_n) \to P'(n+1)$ について，$P'(n+1)/\imath(GL(F_n))$ は F_n と微分同相なことからある束射 $h : \widetilde{Q} \to Q$ が存在する．このとき $h^*\omega_0$ は $\widetilde{Q}$ 上の接続形式を与えることが分かる．特に (Q, ω) が正規のとき $h^*\omega_0$ の捩れは消え，$(\widetilde{Q}, [h^*\omega_0])$ は M 上の射影構造を与える．更に射影構造全体と正規射影 Cartan 接続の同型類全体は一対一に対応することが知られている．

最後に M 上の射影構造は局所的にある平坦なアファイン接続と射影同値になるとき平坦であると言われる。平坦な射影構造は平坦な射影 Cartan 接続と対応する。詳しくは [5]、[6] を参照のこと．

2. 射影 Cartan 接続の裏返し変換

n 次元射影空間 P_{n+1} は $n+1$ 次元ベクトル空間 F_{n+1} の n 次元部分空間からなる Grassmann 多様体 $Gr(n+1,n)$ と微分同型であり，$Gr(n+1,n)$ は F_{n+1} の n 次元射影 frame 全体からなる（射影）Stiefel 多様体 $V(n+1,n)$ の底空間である．この素朴な事実を一般化して射影 Cartan 接続の裏返し変換を定式化する．裏返し変換を用いれば，一つの与えられた多様体と平坦な射影構造から新たな多様体と平坦な射影構造を無限に構成することができる．

A/B と A'/B' を等質空間とする．このとき A/B が A'/B' の部分幾何であるとは次が成り立つときを言う: ある Lie 群の準同型 $F: A \to A'$ が存在して $F(B) \subset B'$ をみたし，従って誘導される $\hat{F}: A/B \to A'/B'$ は局所微分同相である．この定義については [2] を引用した．例えば v を Stiefel 多様体 $V(m,n) \subset P_{mn}$ の元としたとき $P_{mn} = P(mn)/P(mn)_v$ と書け，また $V(m,n) = P(m) \times P(n)/P(m) \times P(n)_v$ と書ける．この商空間の表示の下，$V(m,n)$ は P_{mn} の部分幾何である．以後射影空間や Stiefel 多様体と言えばこれらの商空間で表されるものと仮定する．部分幾何に応じて次の定義をする．

定義 1 等質空間 A/B は A'/B' の部分幾何（$F: A \to A'$）であるとし，(Q,ω)，(Q',ω') をそれぞれ A/B 型，A'/B' 型の多様体 M 上の Cartan 接続とする．このとき (Q,ω) が (Q',ω') の部分 Cartan 接続であるとは次をみたすときを言う：ある束準同型 $\tilde{F}: Q \to Q'$ で $F|_B : B \to B'$ と可換であり，かつ $\omega' \circ \tilde{F}_* = dF \circ \omega$ をみたすものが存在する．

命題 2 (Q,ω) を A/B 型の M 上の Cartan 接続であるとし，A/B を A'/B' の部分幾何であるとする．このとき A'/B' 型の M 上の Cartan 接続 (Q',ω') が存在し，(Q,ω) は (Q',ω') の部分 Cartan 接続である． 更に (Q,ω) が平坦のとき，(Q',ω') も平坦である．

この命題で $F: A \to A'$ の微分 dF が単射のとき，(Q,ω) と (Q',ω') の平坦性は同値となる．
次に主定理を述べる．まず以下で用いる記号の説明をする．G を $P(m)$ の Lie 部分群としたとき，$G^* := {}^tG^{-1}$ と置く．v を Stiefel 多様体 $V(m,n)$ の元とし，$< v >$ により v で張られる部分空間を表す．また $v^\perp$ を $V(m,m-n)$ の元で，$< v^\perp >$ が $< v >$ の直交補空間を与えるものとする．このとき $Gr(m,n)$ は商空間 $P(m)/P(m)_{<v>}$ として表せ，$P(m)^*/P(m)_{<v>}{}^* = P(m)/P(m)_{<v^\perp>}$ である．また線形 Lie 環に値を取る一次微分形式 ω に対して，$\omega^* = -{}^t\omega$ とし，Lie 群 $P(n)$ の Maurer-Cartan 形式を Λ_1 で表す．

定理 3 (裏返し変換) G をリー群 $P(m)$ の Lie 部分群とする。v を $V(m,n)$ $(m>n)$ の元とし、$G.<v>$ は $Gr(m,n)$ の（空でない）開部分集合を与えるものとする．また (Q,ω) は多様体 M 上の $G/G_{<v>}$ 型の Cartan 接続とする．このとき次の (1) と (2) は同値である：

(1) $(Q \times P(n), \omega \times \Lambda_1)$ は $G \times P(n)/G \times P(n)_v$ 型の部分射影 Cartan 接続を与える
(2) $(Q \times P(m-n), \omega^* \times \Lambda_1)$ は $G^* \times P(m-n)/G^* \times P(m-n)_{v^\perp}$ 型の部分射影 Cartan 接続を与える．

ここで $G \times P(n)/G \times P(n)_v$ と $G^* \times P(m-n)/G^* \times P(m-n)_{v^\perp}$ は射影空間の部分幾何である．

この定理において，（１）の Cartan 接続の底空間は $Q\times P(n)$ を構造群 $G\times P(n)_v$ で割った商空間である．またこの定理は任意の射影 Cartan 接続に適用できることに注意する。命題より (1) から (2) の変換は射影 Cartan 接続の変換を与える．更に (1) が平坦な射影構造を与えれば，(2) も平坦な射影構造を与える．従ってこの定理において，射影 Cartan 接続の平坦性は保たれる．しかし（まだ未確認だが）正規性は一般に保たれないかもしれない．

定理３が与える変換を射影 Cartan 接続の裏返し変換と呼ぶ．特に平坦なときは、平坦な射影構造の裏返し変換と呼ぶ。以下で定理を図示する：

$$
\begin{tikzcd}
 & P(n) & & G\times P(n)_v & \\
 & & (Q\times P(n),\omega\times\Lambda_1) \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
G_{<v>} & (Q,\omega) \arrow[l] \arrow[d] & & \widetilde{M} \arrow[r] \arrow[d] & P(n) \\
 & M & & M & \\
G^*_{<v^\perp>} & (Q,\omega^*) \arrow[l] \arrow[u] & & \frac{Q\times P(m-n)}{G^*\times P(m-n)_{v^\perp}} \arrow[u] \arrow[r] & P(m-n) \\
 & & (Q\times P(m-n),\omega^*\times\Lambda_1) \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & P(m-n) & & G^*\times P(m-n)_{v^\perp} &
\end{tikzcd}
$$

この図において，内側の６つの頂点は主ファイバー束であり，６角形の各辺が底空間への射影を表す．また $G_{<v>}$ と $G\times P(n)_v$ は Lie 群として同型であり，従って $(Q\times P(n),\omega\times\Lambda_1)$ は対称性のある２重ファイバー束の構造を持つ．幾何構造に関して，$\widetilde{M}$ 上に平坦な射影構造があれば，$Q\times P(m-n)/G^*\times P(m-n)_{v^\perp}$ 上にも平坦な射影構造がある．

今２次元多様体 M 上に平坦な射影カルタン接続 (Q,ω) が与えられているとする。このとき定義より Q の構造群は $P(3)$ である。この射影構造から、図のサイクルを何回か回すと平坦な射影構造をもつ次のような多様体の列が得られる。

$$
\begin{array}{ccccccc}
M \to & \dfrac{Q\times P(2)}{P(3)^*\times P(2)_{v^\perp}} & \to & \dfrac{Q\times P(2)\times P(5)}{P(3)\times P(2)^*\times P(5)_{w^\perp}} & \to & \dfrac{Q\times P(2)\times P(5)\times P(29)}{P(3)^*\times P(2)\times P(5)^*\times P(29)_{x^\perp}} & \to\cdots \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & \dfrac{Q\times P(5)\times P(13)}{P(3)^*\times P(5)^*\times P(13)_{u^\perp}} \to\cdots & & \vdots & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 & & & \vdots & & &
\end{array}
$$

ここで $v\in V(3,1)$, $v^\perp =: w\in V(6,1)$, $w^\perp =: x\in V(30,1)$, ${}^Tw^\perp =: u\in V(15,2)$ である。

3. 平坦な射影構造の裏返し変換

平坦な射影構造を通して，定理 3 についての理解を深めたい．m 次元多様体 M 上の平坦な射影構造は次のような極大アトラス $\{(U_\alpha, \phi_\alpha : U_\alpha \to P_{m+1})\}_{\alpha \in A}$ と一対一に対応する．ここで $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ は M の開被覆であり，$\phi_\alpha : U_\alpha \to P_{m+1}$ は射影空間 P_{m+1} のある開集合の上への微分同相写像である．また各近傍の交わり $U_\alpha \cap U_\beta$ における連結成分上，座標変換 $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ が $P(m+1)$ の元で与えられる．このアトラスの記述を用いて定理 3 による平坦な射影構造の裏返し変換は以下のようにして特徴づけられる．

定理においてモデル空間 $G \times P(n)/G \times P(n)_v$ を連結とし，更に射影空間 P_{mn} の部分幾何とする．また Cartan 接続 $(Q \times P(n), \omega \times \Lambda_1)$ は平坦であるとする．$\pi_{\widetilde{M}} : \widetilde{M} \to M$ と $\pi_{m,n} : V(m,n) \to Gr(m,n)$ で射影を表す．このとき $\widetilde{M}$ 上には平坦な射影構造が存在し，次のような $\widetilde{M}$ のアトラス

$$\{(U_\alpha,\ \psi_\alpha : U_\alpha \to V(m,n))\}_{\alpha \in A}$$

で記述される．ある $V(m,n)$ の開集合 O_α が存在し，$\psi_\alpha : U_\alpha \to O_\alpha$ は微分同相写像である．また 2 つの chart の変換は $G \times P(n)$ の元で与えられる．ψ_α は主ファイバー束上の束準同型としてとれるので微分同相写像 $\bar{\psi_\alpha} : {U_\alpha}' \to {O_\alpha}'$ を誘導する．ここで ${U_\alpha}' = \pi_{\widetilde{M}}(U_\alpha)$, ${O_\alpha}' = \pi_{m,n}(O_\alpha)$ と置いた．すると chart の変換 $\bar{\psi_\beta} \circ \bar{\psi_\alpha} =: \tau(C; \beta, \alpha)$ は G の元で与えられ，M の $(G/G_{<v>} \subset Gr(m,n)$ 型の$)$ アトラス

$$\{({U_\alpha}',\ \bar{\psi_\alpha} : {U_\alpha}' \to Gr(m,n))\}_{\alpha \in A}$$

が得られる．これを $Gr(m,n)$ と $Gr(m, m-n)$ の間の同型写像 $\perp$ を通すことにより M 上に $(G^*/G^*_{<v^\perp>} \subset Gr(m, m-n)$ 型の$)$ アトラス

$$\{({U_\alpha}',\ \bar{\psi_\alpha}^{\perp} : {U_\alpha}' \to Gr(m, m-n))\}_{\alpha \in A}$$

が得られる．ここで $\bar{\psi_\alpha}^{\perp} = \perp \circ \bar{\psi_\alpha} : {U_\alpha}' \to {O_\alpha}'^{\perp}$ で定義する．最後に，各 α に対して $\pi_{m,m-n}^{-1}({O_\alpha}'^{\perp})$ は $V(m, m-n)$ の開集合であり，位相和を取る $\sqcup_{\alpha \in A} \pi_{m,m-n}^{-1}({O_\alpha}'^{\perp})$．この位相空間に次の同値関係が入る：$\pi_{m,m-n}^{-1}({O_\alpha}'^{\perp})$ の元 u と $\pi_{m,m-n}^{-1}({O_\beta}'^{\perp})$ の元 v に対して，u と v が同値であるための条件を

$$(\bar{\psi_\alpha}^{\perp})^{-1} \circ \pi_{m,m-n}(u) = (\bar{\psi_\alpha}^{\perp})^{-1} \circ \pi_{m,m-n}(v) \text{ かつ, } \ v = {}^t\tau(C; \beta, \alpha)^{-1} u$$

で定める．このとき商空間 $\widetilde{M}' = \sqcup_{\alpha \in A} \pi_{m,m-n}^{-1}({O_\alpha}'^{\perp}))/\sim$ は多様体となり，自然に平坦な射影構造を与えるアトラスをもつ．また $\widetilde{M}'$ は，定理において構成された商空間 $Q \times P(m-n)/G^* \times P(m-n)_{v^\perp}$ と等しい．

4. 不変平坦な射影構造の裏返し変換

射影構造の裏返し変換によりどのような多様体が得られるかを考察したい．等質空間上の不変平坦な射影構造を考えることにより，いくつかの例について裏返し変換で得られる多様体の形が具体的に分かる．以下 Λ_1 により線形 Lie 群と線形 Lie 環の恒等表現を表す．

L を実 Lie 群，K をその連結な閉部分群とし，$\mathfrak{l}/\mathfrak{k}$ を L/K の接空間とする．このとき L/K 上の不変平坦な射影構造は次の条件をみたす $\mathfrak{l}$ の表現 $f:\mathfrak{l}\to\mathfrak{gl}(V)$，$V$ の元 v の組 (f,v) と（適切な同値関係の下で）一対一に対応する（cf. [1]、[3]）：$f\otimes\Lambda_1(\mathfrak{l}\oplus\mathfrak{gl}(1))v=V$ をみたし，さらに $\mathfrak{k}=\{X\in\mathfrak{l}\mid f(X)v\in<v>\}$ をみたす．この一つ目の条件は無限小の概均質ベクトル空間の条件と等しい．

この対応と定理を用いることで実リー環とその表現のある種の変換が得られる．それを複素化したものは（複素）概均質ベクトル空間の裏返し変換を微分したものである．ここで G が連結な複素線形代数群，$F:G\to GL(m)$ が G の m 次有理表現のとき，以下の変換は裏返し変換と呼ばれ概均質性を保つ（cf. [4]）： $(m>n)$

$$(G\times GL(n),F\otimes\Lambda_1,V(m)\otimes V(n))\ \leftrightarrow\ (G\times GL(m-n),F^*\otimes\Lambda_1,V(m)^*\otimes V(m-n)).$$

以下では [4] にある概均質ベクトル空間の例を 2 つ取り出し，それらから得られる不変平坦な射影構造を許容する等質空間について考察する．

(1) $GL(2)$ の恒等表現 Λ_1 の 3 次対称積 $(GL(2),3\Lambda_1,V(4))$

このとき $\mathfrak{sl}(2)$ をもつ実 Lie 群が不変平坦な射影構造を許容する．さらに射影構造の裏返し変換を行っていくと　$\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(3)$，$\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(3)\oplus\mathfrak{sl}(11)$，$\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(41)\oplus\mathfrak{sl}(11),\cdots$
が得られる．この場合は裏返し変換で得られる Lie 群は以下のもので尽くされる（cf. [3]）：

$$\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(m_1)\oplus\cdots\oplus\mathfrak{sl}(m_k)\ \ (k\geq 1,m_i\geq 1),$$

で等式 $4+m_1^2+\cdots+m_k^2-k-4m_1m_2\cdots m_k=0$ をみたすもの．

(2) $(SO(n+1)\times GL(1),\Lambda_1\otimes\Lambda_1,V(n+1)\otimes V(1))$

このとき n 次元球面が得られる．2 次元球面 $SO(3)/SO(2)$ をこの表現に対応した射影構造に関して，末尾だけ増やす裏返し変換を行うと次の列が得られる：

$$\frac{\mathfrak{o}(3)}{\mathfrak{o}(2)},\ \ \frac{\mathfrak{o}(3)\oplus\mathfrak{sl}(2)}{\mathfrak{k}_1},\ \ \frac{\mathfrak{o}(3)\oplus\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(5)}{\mathfrak{k}_2},\ \ \frac{\mathfrak{o}(3)\oplus\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(5)\oplus\mathfrak{sl}(29)}{\mathfrak{k}_3},\ \cdots.$$

ここで $\mathfrak{sl}(2)$ の元を $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\alpha$ と置いたとき，各 $\mathfrak{k}_i$ は次のような一次元部分代数である．

$$\mathfrak{k}_1=<\left(\begin{array}{c|c}0&\\\hline&\alpha\end{array}\right),\ \alpha>,\ \ \mathfrak{k}_2=<\left(\begin{array}{c|c}0&\\\hline&\alpha\end{array}\right),\ \alpha,\ \left(\begin{array}{c|c}\alpha&\\\hline&-{}^t ad(\alpha)\end{array}\right)>,$$

$$\mathfrak{k}_3=<\left(\begin{array}{c|c}0&\\\hline&\alpha\end{array}\right),\ \alpha,\ \left(\begin{array}{c|c}\alpha&\\\hline&-{}^t ad(\alpha)\end{array}\right)=\beta,\ \left(\begin{array}{c|c}\beta&\\\hline&-{}^t ad(\beta)\end{array}\right)>.$$

[1] Y. Agaoka: Invariant flat projective structures on homogeneous spaces, Hokkaido Math. J. **11** (1982), 125–172.

[2] W.M.Goldman: Locally homogeneous geometric manifolds, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Hyderabad, India (2010).

[3] H. Kato: Left invariant flat projective structures on Lie groups and prehomogeneous vector spaces, accepted.

[4] M. Sato, T. Kimura: A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants, Nagoya Math. J. **65** (1977), 1–155.

[5] N. Tanaka: Projective connections and projective transformations, Nagoya Math. J. **12** (1957), 1–24.
[6] N. Tanaka: On the equivalence problems associated with a certain class of homogeneous spaces, J. Math. Soc. Japan, **17** (1965), 103–139.