

非等方的平均曲率一定曲面の安定性解析と 物理現象への応用*

小磯深幸[†]

(九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所, JST さきがけ)

Abstract

非等方的平均曲率一定超曲面 (CAMC 超曲面) は, 曲面の各点の向きに依存して決まる非等方的表面エネルギーの, 「囲む体積」を変えない変分に対する臨界点であり, 平均曲率一定曲面の一般化である. CAMC 超曲面は, このような変分に対する非等方的表面エネルギーの第 2 変分が非負の時, 安定であるという. 与えられた境界条件を満たす CAMC 超曲面は, 非等方的平均曲率 Λ , または, 「囲む」体積 V をパラメータとする変分問題の一助変数族の解として特徴付けられる. パラメータ Λ または V に対して解の分岐が起こるための十分条件, 分岐前後の解の安定性を判定する方法を与え, pitchfork 分岐や「対称性の崩壊」現象が生じることを見る.

目次

§1 序

§2 非等方的表面エネルギーと Wulff 図形

§3 第 1 変分公式, 非等方的平均曲率, 非等方的 Gauss 写像

§4 第 2 変分公式と安定性の定義

§5 安定性の判定

§6 解の分岐と安定性

§7 主結果の応用

§7.1 自由境界問題への応用 1 — 支持曲面が互いに平行な二平面の場合 —

§7.2 自由境界問題への応用 2 — 支持曲面が平面の場合 —

*研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2011」(東京理科大学神楽坂 森戸記念館, 2011 年 9 月 2 日(金)-9 月 3 日(土)) 報告集のための原稿. 2011 年 10 月 28 日提出.

[†]koiso@math.kyushu-u.ac.jp 本研究は科研費(課題番号:22654009)の助成を受けたものである。

1 序

曲面の各点の向きに依存して決まる非等方的表面エネルギーの、「囲む体積」を変えない変分に対する臨界点是非等方的平均曲率一定 (constant anisotropic mean curvature, 以下, CAMC と記す) 超曲面となる. これは, 平均曲率一定超曲面 (CMC 超曲面) の一般化である. CAMC 超曲面は, 与えられた境界条件を満たし「囲む体積」を変えない任意の変分に対する非等方的表面エネルギーの第2変分が非負の時, 安定であるといわれる.

さて, 与えられた境界条件を満たす CAMC 超曲面は, 非等方的平均曲率 Λ , または, 「囲む」体積 V をパラメータとする変分問題の一助変数族の解として特徴付けられる. たとえば Λ をパラメータとした時, 一般に, Λ と解の対応は1対1ではない. Λ が増加 (あるいは減少) する時, 対応する解の族が, ある $\Lambda = \Lambda_0$ において分岐するという現象が起こることがある. Λ の代わりに V をパラメータとしてとった場合も同様である.

本稿では, 非等方的表面エネルギーの第2変分に付随する固有値問題が, 重複度1の零固有値を持つ場合について, 解の分岐が起こるための十分条件を与える (定理 6.1). さらに, 分岐前後の解の安定性を判定する方法を与える (定理 6.2, 6.3). そこでは, いわゆる pitchfork 分岐が現れ, エネルギー汎関数やその境界条件の持つ対称性よりも低い対称性しか持たない解が安定であり, 高い対称性を持つ解が不安定になるという, いわゆる「対称性の崩壊」現象が生じるための条件も定式化される. さらに, これらの結果を, 物理現象とも関連の深いいくつかの具体例に対して応用する.

2 非等方的表面エネルギーと Wulff 図形

$S^n = \{\nu \in \mathbf{R}^{n+1} \mid |\nu| = 1\}$ を $n+1$ 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n+1}$ の単位球面とし, $\gamma : S^n \rightarrow \mathbf{R}^+$ を正値 C^∞ 級関数とする. $\mathbf{R}^{n+1}$ にはめ込まれた向き付け可能でコンパクトな超曲面 (以下では簡単に超曲面という. 境界はあってもなくてもよい) $X : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ に対し,

$$\mathcal{F}(X) := \int_{\Sigma} \gamma(\nu) d\Sigma \quad (1)$$

とおく. ここで, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n+1}) : \Sigma \rightarrow S^n$ は X の Gauss 写像 (単位法ベクトル場), $d\Sigma$ は X によって誘導される Σ の (n 次元) 体積要素である.

$\mathbf{R}^{n+1}$ 内の同じ $(n+1)$ 次元体積 V を囲む閉超曲面の中で, $\mathcal{F}$ の最小解 $W(V)$ が (平行移動を除き) ただ一つ存在し, 凸である ([12]). すなわち, $W(V)$ は汎関数 $\mathcal{F}$ に

対する等周問題の解である.

体積 $V_0 := (n+1)^{-1} \int_{S^n} \gamma(\nu) dS^n$ に対するエネルギー最小解 $W(V_0)$ を Wulff 図形と呼び, W で表す. $W(V)$ は W に相似である. 特に $\gamma \equiv 1$ のときは, $\mathcal{F}$ は X の n 次元体積であり, W は単位球面 S^n である.

以下では, Wulff 図形 W は滑らかな狭義凸超曲面であると仮定する (凸性条件). この時, W は, $\chi(\nu) = D\gamma(\nu) + \gamma(\nu)\nu$ により定義される埋め込み $\chi: S^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ の像と一致する.

3 第1変分公式, 非等方的平均曲率, 非等方的 Gauss 写像

はめ込み $X: \Sigma = \Sigma^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ に対し, $\mathcal{F}(X) = \int_{\Sigma} \gamma(\nu) d\Sigma$ であった. $X_\epsilon = X + (\xi + \psi\nu)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ を X のコンパクトな台を持つ変分とする. ここに, $\xi, \psi\nu$ は, それぞれ, 変分ベクトル場の接成分, 法成分である. 「体積関数」 $V(\epsilon)$ を, 次で定義する (cf. [3]):

$$V(\epsilon) = \int_{[0, \epsilon] \times \Sigma} X_\epsilon^* dV.$$

ここで, dV は $\mathbf{R}^{n+1}$ の標準的な体積要素, $X_\epsilon^* dV$ は dV の X_ϵ による引き戻しである. $V(\epsilon)$ は, 曲面 X と X_ϵ の間の領域の代数的体積を表す. $V(\epsilon) \equiv 0$ の時, 変分 X_ϵ は $(n+1)$ 次元体積を保つという.

補題 3.1. はめ込み $X: \Sigma = \Sigma^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ のコンパクトな台を持つ変分 $X_\epsilon = X + (\xi + \psi\nu)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ に対し, $\mathcal{F}$ と V の第1変分は次で与えられる.

$$\partial_\epsilon \mathcal{F}|_{\epsilon=0} := \left. \frac{d\mathcal{F}(X_\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = - \int_{\Sigma} (-\operatorname{div}_{\Sigma} D\gamma + nH\gamma) \psi d\Sigma, \quad (2)$$

$$\partial_\epsilon V|_{\epsilon=0} := \left. \frac{dV(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_{\Sigma} \psi d\Sigma. \quad (3)$$

ここで, H は X の平均曲率であり, $D\gamma$ は $\mathbf{R}^{n+1}$ での平行移動により, X に沿う接ベクトル場とみなしている.

したがって, X が, コンパクトな台を持ち $(n+1)$ 次元体積を保つ任意の変分に対する $\mathcal{F}$ の臨界点であるための必要十分条件は,

$$-\operatorname{div}_{\Sigma} D\gamma + nH\gamma = \text{定数} \quad (4)$$

が成り立つことである. そこで, X の非等方的平均曲率 (anisotropic mean curvature) Λ を次のように定義する (cf. [11],[7]).

$$\Lambda := -\operatorname{div}_{\Sigma} D\gamma + nH\gamma.$$

Λ が定数のとき, X を非等方的平均曲率一定超曲面 (CAMC 超曲面) と呼ぶ. 特に $\gamma \equiv 1$ の時は $\Lambda = nH$ であり, CAMC 超曲面は CMC 超曲面である. 凸性条件により, 一般に, 方程式 “ $\Lambda = \text{定数}$ ” は楕円型となる.

Λ は, X と Wulff 図形 W の曲がり具合を比較する量としてとらえることもできる. 点 $p \in \Sigma$ に対し, W 上の点 $G(p)$ が, $\nu(p)$ が W の $G(p)$ での外向き単位法ベクトルと一致するという条件により一意的に定まる (Figure 1). 写像 $G: \Sigma \rightarrow W$ を X の非等方的 Gauss 写像という. この時,

$$\Lambda = -\text{trace}_{\Sigma}(D^2\gamma + \gamma 1) \circ d\nu = -\text{trace}(dG)$$

が成立する (cf. [7]). よって特に, Wulff 図形の (外向き法ベクトルに対する) 非等方的平均曲率は $-n$ である.

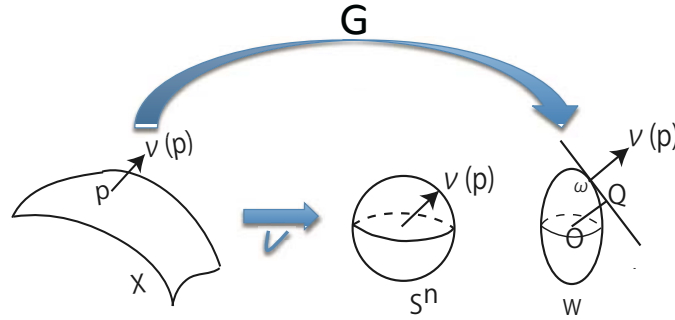


Figure 1: Gauss 写像 ν と非等方的 Gauss 写像 G . $\omega = G(p)$.

例 3.1 (非等方的 Delaunay 曲面 [7]). 簡単のため, $\mathbf{R}^3$ 内の曲面について考える. 非等方的表面エネルギー密度 γ が x^3 軸に関して軸対称ならば, 対応する Wulff 図形も x^3 軸に関して軸対称である. x^3 軸に関して軸対称な CAMC 曲面を非等方的 Delaunay 曲面と呼ぶ. これらはすべて完備であり, 次の 6 つのクラスに分類される (Figure 2).

- (I-1) 平面 ($\Lambda = 0$), (I-2) 非等方的 catenoid ($\Lambda = 0$)
- (II-1) Wulff 図形 (の平行移動と相似) ($\Lambda \neq 0$), (II-2) 円柱 ($\Lambda \neq 0$)
- (II-3) 非等方的 unduloid ($\Lambda \neq 0$): 自己交差を持たない周期的曲面
- (II-4) 非等方的 nodoid ($\Lambda \neq 0$): 自己交差を持つ周期的曲面

4 第2変分公式と安定性の定義

$X: \Sigma^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ は CAMC とする. $X_\epsilon = X + (\xi + \psi\nu)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ は, X のコンパクトな台を持つ変分とする. ここで, $\xi, \psi\nu$ は, それぞれ変分ベクトル場の接成分, 法



Figure 2: 非等方的 Delaunay 曲面. 左から, 非等方的 catenoid, Wulff 図形, 円柱, 非等方的 unduloid, 非等方的 nodoid.

成分である. X_ϵ が $(n+1)$ 次元体積を保つ時, $\mathcal{F}$ の第 2 変分は

$$\partial_{\epsilon\epsilon}^2 \mathcal{F}|_{\epsilon=0} := \left. \frac{d^2 \mathcal{F}(X_\epsilon)}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon=0} = - \int_{\Sigma} \psi L[\psi] d\Sigma \quad (5)$$

となる ([7]). ここで, L は自己共役作用素

$$L[\psi] := \operatorname{div}(A \nabla \psi) + \langle A d\nu, d\nu \rangle \psi, \quad A := (D^2 \gamma + \gamma 1)|_\nu$$

である. すなわち, $\partial_{\epsilon\epsilon}^2 \mathcal{F}|_{\epsilon=0}$ は, X の変分ベクトル場 $\partial X_\epsilon / \partial \epsilon|_{\epsilon=0}$ の法成分にのみ依存する. そこで,

$$I[\psi] = - \int_{\Sigma} \psi L[\psi] d\Sigma \quad (6)$$

とおく.

定義 4.1. $X : \Sigma^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ は CAMC で, Σ はコンパクトとする. X の境界を固定し $(n+1)$ 次元体積を保つ任意の変分 X_ϵ に対して $\mathcal{F}$ の第 2 変分 $\partial_{\epsilon\epsilon}^2 \mathcal{F}|_{\epsilon=0}$ が非負のとき, X は安定であるという.

定義 4.2. $X : \Sigma^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ は CAMC で, Σ は完備とする. X の任意の相対コンパクト領域 Ω に対して $X|_\Omega$ が安定であるとき, X は安定であるという.

第 1, 第 2 変分公式を用いて次が示せる.

補題 4.1. $X : \Sigma^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ は CAMC で, Σ はコンパクトとする. X が安定であることと,

$$\int_{\Sigma} \psi d\Sigma = 0 \quad (7)$$

を満たすすべての $\psi \in C_0^\infty(\Sigma)$ に対して $I[\psi] \geq 0$ が成り立つことは同値である.

これが成り立つことは, 条件 (7) が, 対応する変分が $(n+1)$ 次元体積を保つという条件に対応し, $I[\psi]$ が $\mathcal{F}$ の第 2 変分に対応することから自然であろう.

5 安定性の判定

$X : \Sigma^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ は非等方的平均曲率一定 $= \Lambda$ で, Σ はコンパクトとする. 非等方的エネルギー汎関数 $\mathcal{F}$ の第2変分公式 (5) に鑑み, 次の固有値問題を考える.

$$L[\psi] = -\lambda\psi, \quad \psi \in C_0^\infty(\Sigma). \quad (8)$$

(8) の固有値はすべて実数であり, 加算無限個の単調非減少列を成す. それらを, $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ と表す.

$$E := \{e \in C_0^\infty(\Sigma) \mid L[e] = 0\}$$

とおく. 負の固有値の個数 (重複度も数える) を X の Morse 指数といい, $\text{Ind}(X)$ で表す. $\text{Ind}(X)$ は, 境界を固定し, 汎関数 $\mathcal{F} + \Lambda V$ を減少させる変分ベクトル場の成す空間の次元である. したがって, (8) の固有値だけから X の安定性を判定することはできない. しかしながら, 下に述べるような判定法が知られている.

以下では, Σ^n から $\mathbf{R}^{n+1}$ へのはめ込みの一助変数族 $\{X_t\}_t$ ($X_0 = X$) に対し,

$\Lambda(t) := X_t$ の非等方的平均曲率, $V(t) := X_t$ に対する体積関数 (cf. §3),

$L_t := X_t$ に付随する自己共役作用素 (cf. §3)

とおく.

定理 5.1 (安定性の判定. Maddocks, Vogel, Koiso[6]). X は CAMC とする.

(I) $\lambda_1 \geq 0$ ならば, X は安定である.

(II) $\lambda_1 < 0 \leq \lambda_2$ とする. X の境界を保つ変分 X_t で, $\Lambda'(0) = \text{定数} \neq 0$ なるものが存在する時,

(i) $\Lambda'(0)V'(0) \geq 0$ ならば, X は安定である.

(ii) $\Lambda'(0)V'(0) < 0$ ならば, X は不安定である.

このような変分が存在しないならば, X は不安定である.

(III) $\lambda_2 < 0$ ならば, X は不安定である.

6 解の分岐と安定性

固有値問題 (8) が重複度1の零固有値を持つ場合には, 解の分岐の存在についての次の結果が成り立つ.

定理 6.1 (分岐の存在と一意性). $X_t = X + \varphi(t)\nu : \Sigma^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$, ($t \in I = (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbf{R}$), は CAMC $C^{3+\alpha}$ 級 ($0 < \alpha < 1$) はめ込みの一助変数族で, t について微分可能, $X = X_0$, $X|_{\partial\Sigma} = X_t|_{\partial\Sigma}$ ($\forall t \in I$) なるものとする. 次の (i), (ii) を仮定する.

(i) $\Lambda'(0) \neq 0$.

(ii) $E = \{ae; a \in \mathbf{R}\}, \quad \exists e \in (C_0^{2+\alpha}(\Sigma) - \{0\})$.

この時, $\int_{\Sigma} e d\Sigma = 0$ である. また, L_t の単純実固有値 $\mu(t)$ で, $\mu(0) = 0$ であり t について微分可能なものが 0 の近くで一意的に存在する. そこで,

(iii) $\mu'(0) \neq 0$

と仮定する. E の $C_0^{3+\alpha}(\Sigma)$ での直交補空間を $E^{\perp}$ とする. 开区間 $\hat{I}$ ($0 \in \hat{I} \subset \mathbf{R}$) と C^1 級関数 $\zeta: \hat{I} \rightarrow E^{\perp}$, $\hat{\Lambda}: \hat{I} \rightarrow \mathbf{R}$ で以下を満たすものが存在する. $\zeta(0) = 0$ であり, $Y(\sigma) := X + (\sigma e + \sigma \zeta(\sigma))\nu$ は非等方的平均曲率一定 $= \hat{\Lambda}(\sigma)$. さらに, X の近傍で, X と同じ境界値を持つ CAMC はめ込みは, $\{X_t; t \in I\}$ と $\{Y(\sigma); \sigma \in \hat{I}\}$ のみである.

注意 6.1. X の変分 $Y(\sigma)$ の変分ベクトル場は e で, $\int_{\Sigma} e d\Sigma = 0$ が成り立つ. これより, X_t が対称性を持つ時, $Y(\sigma)$ は X_t と同じ対称性を持たない可能性が高いと推察される.

注意 6.2. 定理 6.1 の仮定 (ii) は, 固有値問題 (8) の零固有値の重複度が 1 であることを意味する. しかしながら, 零固有値の重複度が 2 以上の場合でも, 対称性の高い解のみに制限することにより, 定理 6.1 が適用できる場合がある.

定理 6.1 と同様の結果であるが, 平均曲率一定曲面に対し, 定理 6.1 の非等方的平均曲率の代わりに体積を用いたものが, Patnaik([9]) によって得られている. これらの結果と Crandall-Rabinowitz[5] を用いることにより, pitchfork 分岐の存在についての次の結果が得られる.

定理 6.2 (分岐解の安定性と pitchfork 分岐 I). $X_t = X + \varphi(t)\nu: \Sigma^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$, ($t \in I = (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbf{R}$), は CAMC $C^{3+\alpha}$ 級はめ込みの一助変数族で, t について微分可能, $X = X_0$, $X|_{\partial\Sigma} = X_t|_{\partial\Sigma}$ ($\forall t \in I$) なるものとする. 次の (i), (ii), (iii) を仮定する.

(i) $V'(0) \neq 0$ かつ $\Lambda'(0) \neq 0$.

(ii) $E = \{ae; a \in \mathbf{R}\}, \quad \exists e \in (C_0^{2+\alpha}(\Sigma) - \{0\})$.

(iii) $\lambda_2(X_0) = 0$, かつ $\frac{d}{dt}\lambda_2(X_t)|_{t=0} < 0$. (resp. $\frac{d}{dt}\lambda_2(X_t)|_{t=0} > 0$.)

E の $C_0^{3+\alpha}(\Sigma)$ での直交補空間を $E^{\perp}$ とする. 开区間 $\hat{I}$ ($0 \in \hat{I} \subset \mathbf{R}$) と C^1 級関数 $\zeta: \hat{I} \rightarrow E^{\perp}$, $\hat{\Lambda}: \hat{I} \rightarrow \mathbf{R}$ で以下を満たすものが存在する. $\zeta(0) = 0$ であり, $Y(\sigma) := X + (\sigma e + \sigma \zeta(\sigma))\nu$ は非等方的平均曲率一定 $= \hat{\Lambda}(\sigma)$. さらに, X の近傍で, X と同じ境界値を持つ CAMC はめ込みは, $\{X_t; t \in I\}$ と $\{Y(\sigma); \sigma \in \hat{I}\}$ のみである. $\hat{\Lambda}(\sigma) > \Lambda(0)$ ($\sigma \neq 0$) (resp. $\hat{\Lambda}(\sigma) < \Lambda(0)$ ($\sigma \neq 0$)) ならば, $Y(\sigma)$ は安定である. $\hat{\Lambda}(\sigma) < \Lambda(0)$ ($\sigma \neq 0$) (resp. $\hat{\Lambda}(\sigma) > \Lambda(0)$ ($\sigma \neq 0$)) ならば, $Y(\sigma)$ は不安定である.

注意 6.3. 注意 6.1 と同様に, X_t が対称性を持つ時, $Y(\sigma)$ は X_t と同じ対称性を持たない可能性が高い. 対称性の高い安定解が, 対称性の低い安定解と対称性の高い不安定解に分岐するという興味深い現象が成り立つための条件が, 定理 6.2 により得られた.

パラメータとして, 非等方的平均曲率の代わりに体積関数を採用した場合の pitchfork 分岐についての結果も得られる:

定理 6.3 (分岐解の安定性と pitchfork 分岐 II). $X_t = X + \varphi(t)\nu : \Sigma^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$, ($t \in I = (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbf{R}$), は CAMC $C^{3+\alpha}$ 級はめ込みの一助変数族で, t について微分可能, $X = X_0$, $X|_{\partial\Sigma} = X_t|_{\partial\Sigma}$ ($\forall t \in I$) なるものとする. 次の (i), (ii), (iii) を仮定する.

(i) $V'(0) \neq 0$ かつ $\Lambda'(0) \neq 0$.

(ii) $E = \{ae; a \in \mathbf{R}\}$, $\exists e \in (C_0^{2+\alpha}(\Sigma) - \{0\})$.

(iii) $\lambda_2(X_0) = 0$, かつ $\frac{d}{dt}\lambda_2(X_t)|_{t=0} < 0$. (resp. $\frac{d}{dt}\lambda_2(X_t)|_{t=0} > 0$.)

E の $C_0^{3+\alpha}(\Sigma)$ での直交補空間を $E^\perp$ とする. 開区間 $\hat{I}$ ($0 \in \hat{I} \subset \mathbf{R}$) と C^1 級関数 $\zeta : \hat{I} \rightarrow E^\perp$, $\hat{V} : \hat{I} \rightarrow \mathbf{R}$ で以下を満たすものが存在する. $\zeta(0) = 0$ であり, $Y(\sigma) := X + (\sigma e + \sigma \zeta(\sigma))\nu$ は非等方的平均曲率一定で, 体積関数 $\hat{V}$. さらに, X の近傍で, X と同じ境界値を持つ CAMC はめ込みは, $\{X_t; t \in I\}$ と $\{Y(\sigma); \sigma \in \hat{I}\}$ のみである. $\hat{V}(\sigma) > V(0)$ ($\sigma \neq 0$) (resp. $\hat{V}(\sigma) < V(0)$ ($\sigma \neq 0$)) ならば, $Y(\sigma)$ は安定である. $\hat{V}(\sigma) < V(0)$ ($\sigma \neq 0$) (resp. $\hat{V}(\sigma) > V(0)$ ($\sigma \neq 0$)) ならば, $Y(\sigma)$ は不安定である.

注意 6.4. 注意 6.3 と同様に, X_t が対称性を持つ時, $Y(\sigma)$ は X_t と同じ対称性を持たない可能性が高い.

7 主結果の応用

ここでは, 自由境界問題への応用について述べる. まず, 次のことを注意する. 前節までは, 主として超曲面の境界を固定する変分を考えてきた. しかしながら, $\mathbf{R}^{n+1}$ 内の滑らかで自己交差を持たない完備超曲面 (連結成分が複数あっても構わない) S 上に自由境界を持つコンパクトな超曲面に対する変分問題に対しても, §5, §6 の結果に対応する結果が成立することが示せる.

以下, 簡単のため, 平均曲率一定曲面 (即ち, $n = 2$ で $\gamma \equiv 1$ の場合) について述べる.

7.1 自由境界問題への応用 1 — 支持曲面が互いに平行な二平面の場合 —

$\mathbf{R}^3$ 内の平行な二平面 Π_0, Π_1 が囲む閉領域を Ω ($\partial\Omega = \Pi := \Pi_0 \cup \Pi_1$) とする. Π 上に自由境界を持ち Ω に含まれる向き付け可能で連結なコンパクト曲面全体 $\mathcal{S} := \{X : (\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow (\Omega, \Pi) \mid \Sigma \text{ は向き付け可能で連結な 2次元コンパクト可微分多様体, } \Sigma \text{ の境界はあってもなくてもよい, } X \text{ は埋め込み, } \}$ を考える (Figure 3). $\mathcal{S}$ において, 3次元体積を保つ変分に対する面積の変分問題を考える. 臨界点は, その境界において Π に直交する平均曲率一定曲面であることが示せる. また, このような曲面で自己交差を持たないものは, Alexandrov の鏡映法を用いることにより, 回転面であることが示せる. X が臨界点である時, X が安定であるとは, $\mathcal{S}$ において, 3次元体積を保つ任意の変分に対する面積の第二変分が非負である時をいう.

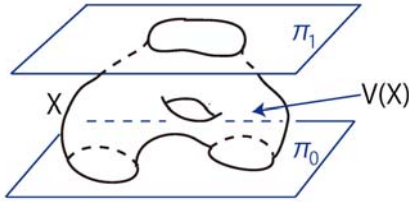


Figure 3: 平行な二平面上に自由境界を持つ曲面.

この問題に対する安定解は, 球面, 半球面, 短い円柱のみであることが知られている. ここで, 「短い円柱」とは, Π_0, Π_1 の距離を h とする時, 半径 r が $h \leq \pi r$ を満たす円柱のことである. この結果は, [2], [13] ([14] に [13] の訂正がある) により証明された. 定理 6.2 を, $\mathcal{S}$ に含まれる円柱族と unduloid の半周期に応用することにより, この結果の別証明が得られる. 証明の概要は以下のとおりである.

$X_t : (\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow (\Omega, \Pi)$ を, 半径 $r_t := h(1-t)/\pi > 0$ の円柱とし, $X_t(\Sigma) \cup \Pi$ が囲む領域の 3次元体積を $V(t)$, X_t の (外向き単位法ベクトルに対する) 平均曲率を $H(t)$, X_t に付随する固有値問題

$$L_t[\psi] = -\lambda\psi \text{ in } \Sigma, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n_t} = 0 \text{ on } \partial\Sigma \quad (9)$$

(n_t は X_t の境界に沿う外向き単位法ベクトル) の固有値を

$$\lambda_1(t) < \lambda_2(t) \leq \lambda_3(t) \leq \dots \quad (10)$$

とすると,

- (i) $V'(0) < 0$ かつ $H'(0) < 0$
- (ii) $E = \{ae; a \in \mathbf{R}\}, \quad \exists e \in (C^\infty(\Sigma) - \{0\})$

(iii) $\lambda_2(0) = 0$ かつ $\frac{d}{dt}\lambda_2(t)|_{t=0} < 0$ が成り立つ.

この時, X_0 からの解の分岐 $Y(\sigma)$ ($Y(0) = X_0$) が存在するが, 各 $Y(\sigma)$ ($\sigma \neq 0$) は unduloid の半周期であり, その平均曲率 $\hat{H}(\sigma)$ は $\hat{H}(\sigma) < H(0)$ ($\sigma \neq 0$) を満たすことが ($Y(\sigma)$ の母線の, 楕円の焦点の軌跡としての構成を用いることにより) 示され, したがって, 定理 6.2 により $Y(\sigma)$ は不安定であることがわかる. 実際は, より強く, 円柱に近い unduloid に対しては, 付随する固有値問題の第二固有値が非負であることが示せる. また, 任意の unduloid の半周期は円柱に近い unduloid からの滑らかな変形により得られ, 固有値が 0 をまたがないことが, 定理 6.1 を用いることにより示せる. したがって, unduloid の任意の半周期について, 付随する固有値問題の第二固有値が非負となり, これより, 不安定であることがわかる (cf. 定理 5.1).

なお, この問題の高次元版が [10] で, 非等方版が [8], [1] で研究されている. これらの場合には, unduloid 型曲面の半周期が安定解として現れる場合がある.

7.2 自由境界問題への応用 2 — 支持曲面が平面の場合 —

次のような実験観察結果が知られているようである. 平面上に半円柱状に液体を垂らす. 液体が蒸発してその体積が減少する時, 液体の形状は常に相似形を成すとは限らず, ある程度体積が小さくなって以降は波うち, やがてはいくつかの半球状の液滴に分かれてしまう (Figure 4 (左)). このことは, 以下のように説明することができる.

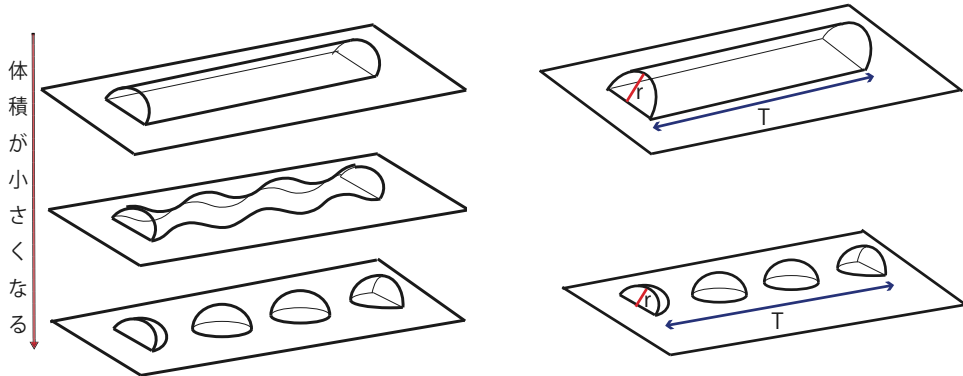


Figure 4: (左) 平面上に自由境界を持つ周期的曲面. (右) 平面上に自由境界を持つ平均曲率一定曲面.

平面 Π と Π 上の直線 ℓ を与える. Π と, 境界で直交する半径 r の半円柱 $C(r)$ (Figure 4 (右) 上図) を考える. ただし $C(r)$ の母線は ℓ に平行とする. $C(r)$ を, Π に自由境界

を持ち、 ℓ 方向に周期 T の曲面に対する、「体積を保つ変分に対する面積の臨界点」と見なす。この時、 $C(r)$ が安定であるのは、

$$T \leq 2\pi r$$

である時、かつその時に限る。また、 $T = 2\pi r_0$ なる $C(r_0)$ については、面積の第二変分に付随する固有値問題の第二固有値が 0 であり、ここから解の分岐が生じることがわかる。しかし分岐した解 (unduloid) の体積は $C(r_0)$ の体積よりも大きいことがわかり、したがって、Figure 4 (左) の波うつ曲面は、平均曲率一定ですらないことがわかる。II と境界で直交する半球面 (Figure 4 (左) または (右) の下図) は安定である。

参考文献

- [1] J. Arroyo, M. Koiso and B. Palmer, *Stability of non liquid bridges*, preprint.
- [2] M. Athanassenas, *A variational problem for constant mean curvature surfaces with free boundary*, J. Reine Angew. Math. **377** (1987), 97–107.
- [3] J. L. Barbosa, M. Do Carmo, and J. Eschenburg, *Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds*, Math. Zeit. **197** (1988), 123–138.
- [4] M. G. Crandall and P. H. Rabinowitz, *Bifurcation from simple eigenvalues*, J. Func. Analysis **54** (1971), 321–340.
- [5] M. G. Crandall and P. H. Rabinowitz, *Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues, and linearized stability*, Arch. Rat. Mech. Anal. **52** (1973), 161–180.
- [6] M. Koiso, *Deformation and stability of surfaces with constant mean curvature*, Tohoku Math. J. (2) **54** (2002), 145–159.
- [7] M. Koiso and B. Palmer, *Geometry and stability of surfaces with constant anisotropic mean curvature*, Indiana Univ. Math. J. **54** (2005), 1817–1852.
- [8] M. Koiso and B. Palmer, *Stability of anisotropic capillary surfaces between two parallel planes*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations **25** (2006), 275–298.

- [9] U. Patnaik, *Volume constrained Douglas problem and the stability of liquid bridges between two coaxial tubes*, Dissertation, University of Toledo, USA, 1994.
- [10] R. Pedrosa and M. Ritoré, *Isoperimetric domains in the Riemannian product of a circle with a simply connected space form and applications to free boundary problems*, Indiana Univ. Math. J. **48** (1999), 1357-1394.
- [11] R. C. Reilly, *The relative differential geometry of nonparametric hypersurfaces*, Duke Math. J. **43** (1976), 705–721.
- [12] J. E. Taylor, *Crystalline variational problems*, Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1978), 568–588.
- [13] T. I. Vogel, *Stability of a liquid drop trapped between two parallel planes*, SIAM J. Appl. Math. **47** (1987), 516–525.
- [14] T. I. Vogel, *Stability of a liquid drop trapped between two parallel planes II, General contact angles*, SIAM J. Appl. Math. **49** (1989), 1009–1028.