

球面の余接束内の特殊 Lagrange 部分多様体*

酒井 高司

首都大学東京理工学研究科

Introduction

Calabi-Yau 多様体において複素体積形式の実部として与えられるキャリブレーションによりキャリブレートされる部分多様体を特殊 Lagrange 部分多様体と呼ぶ．特殊 Lagrange 部分多様体はキャリブレート部分多様体であるため，ホモロジー類内での体積最小性という顕著な性質を持つ．また，理論物理との関係が指摘され，近年盛んに研究が行われている．特に，特殊 Lagrange ファイブレーションはミラー対称性に関する SYZ 予想において重要な役割を果たすと考えられている． $\mathbb{C}^n$ 内の特殊 Lagrange 部分多様体に関しては，Harvey-Lawson [3], Joyce [7] をはじめ多くの研究者らにより，今日ではある程度豊富な研究成果が得られている．

一方で，平坦でない Calabi-Yau 多様体の具体的な構成も知られている．たとえば，Stenzel [10] は階数 1 のコンパクト対称空間 U/K の余接束 $T^*(U/K)$ 上に完備な Ricci 平坦 Kähler 計量を構成している． $T^*(U/K)$ には K が余等質性 1 で作用するが，Stenzel 計量はこの K 作用で不変である．Stenzel 計量のもつこの対称性を用いて， $T^*(U/K)$ 内の特殊 Lagrange 部分多様体を構成することを考える．本稿では特に球面 S^n の余接束 T^*S^n 内において $G = SO(p) \times SO(q)$ ($p + q = n + 1$) の作用および階数 2 の実 Grassmann 多様体のイソトロピー群 G の作用で不変な特殊 Lagrange 部分多様体を具体的に構成する．まず，運動量写像 μ を用いて T^*S^n 内の G 不変な余等質性 1 の Lagrange 部分多様体を構成する．このような Lagrange 部分多様体は $\mathfrak{g}^*$ の中心のある元 c の μ による逆像 $\mu^{-1}(c)$ に含まれる．さらに，これらの Lagrange 部分多様体が特殊 Lagrange 部分多様体になるための条件は $\mu^{-1}(c)$ への G 作用の軌道空間 $\mu^{-1}(c)/G$ 上の常微分方程式として与えられる．この常微分方程式の解を解析することにより，特殊 Lagrange 部分多様体の特異点および無限遠点に近づいたときの漸近挙動を調べることができる．一般に Calabi-Yau 多様体において $\text{Re}(e^{\sqrt{-1}\theta}\Omega)$ がキャリブレーションになり， θ を位相という． $\mathbb{C}^n$ の場合，位相の違いは $U(n)$ の等長的な作用により移り合ってしまうため本質的には現れないが， T^*S^n など非平坦な Calabi-Yau 多様体においてはキャリブレーションの位相の違いが重要になる．特に G が abelian である場合，各 θ に対して T^*S^n に特殊 Lagrange 部分多様体による foliation が構成される．ただし，このとき特異点をもつ leaf が現れる．Anciaux [1], Ionel-Min-Oo [6], 金光 [8] もこの種の対称性をもつ T^*S^n 内の特殊 Lagrange 部分多様体を構成してい

*本研究は科学研究費 若手研究 (B) 23740057 の助成を受けたものである．

る．また最近，Haskins-Kapouleas [4] は $SO(p) \times SO(q)$ ($p + q = n$) で不変な $\mathbb{C}^n$ 内の特殊 Lagrange 錐について研究を行っている．

T^*S^n 内の特殊 Lagrange 部分多様体を構成するもう一つの方法として，Karigiannis-Min-Oo [9] による S^n 内の austere 部分多様体の余法束として与える方法がある．これは Haverly-Lawson の余法束の手法の類似になる．論文 [5] において既約 Riemann 対称空間の線形イソトロピー表現の軌道の中で球面内の austere 部分多様体になるものを分類した．これらの austere 軌道の余法束として T^*S^n 内の特殊 Lagrange 部分多様体を得ることができる．なお，本研究は橋本要（大阪市立大学）との共同研究に基づく．

1 球面の余接束と複素錐上の Ricci 平坦 Kähler 計量

Stenzel [10] は階数 1 のコンパクト対称空間 U/K の余接束 $T^*(U/K)$ に余等質性 1 の作用があることを利用して， $T^*(U/K)$ 上に完備な Ricci 平坦 Kähler 計量を構成した．特に，球面 $S^n \cong U/K = SO(n+1)/SO(n)$ の場合に T^*S^n 上の Stenzel 計量は次のように与えられる．球面 S^n の任意の単位余接ベクトルは $SO(n+1)$ の作用で互いに移り合うので， T^*S^n には $SO(n+1)$ が余等質性 1 で作用する． T^*S^n は $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の複素二次超曲面

$$Q^n = \left\{ (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n z_i^2 = 1 \right\} \cong U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$$

と微分同型になる． Q^n には $\mathbb{C}^{n+1}$ の複素超曲面として複素構造 J が入る．この複素構造に関して，次で定める ω_{Stz} は $Q^n \cong T^*S^n$ 上の完備な Ricci 平坦 Kähler 計量を与える．

$$\omega_{\text{Stz}} = \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} u(r^2)$$

ここで， $r^2 = \|z\|^2$ であり， u は常微分方程式

$$\frac{d}{dt}(U'(t))^n = nc(\sinh t)^{n-1} \quad (c > 0) \quad (1.1)$$

を満たす U によって $U(t) = u(\cosh(t))$ と表される関数である．さらに， Q^n 上に

$$\Omega \wedge d(z_0^2 + z_1^2 + \dots + z_n^2) = dz_0 \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$$

によって正則 $(n, 0)$ 形式 Ω を定義すると，ある定数 λ が存在して

$$\omega_{\text{Stz}}^n = \lambda \Omega \wedge \bar{\Omega}$$

となる．ここで， ω_{Stz} と Ω は共に $SO(n+1)$ の作用で不変であることを注意する．したがって， $(Q^n \cong T^*S^n, J, \omega_{\text{Stz}}, \Omega)$ は $SO(n+1)$ 不変な余等質性 1 の Calabi-Yau 多様体である．

また， $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の複素錐 Q_0^n を

$$Q_0^n = \left\{ (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n z_i^2 = 0 \right\}$$

によって定める． Q_0^n は $\mathbb{C}^{n+1}$ の原点において唯一の特異点をもつ． $r \rightarrow \infty$ としたとき， $\mathbb{C}^{n+1}$ において Q^n は Q_0^n に漸近する．この複素錐 Q_0^n 上に Stenzel 計量の極限として得られる Ricci 平坦 Kähler 計量を構成する． $\tau \rightarrow \infty$ としたとき (1.1) は

$$\frac{d}{dt}(F'(t))^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} n c e^{t(n-1)} \quad (c > 0)$$

に近づく．この解を F として， $F(t) = f(\frac{1}{2}e^t)$ と定めることにより次の命題を得る．

命題 1.1 $f(t) = c t^{\frac{n-1}{n}}$ ($c > 0$) として， $\omega_{\text{cone}} = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}f(r^2)$ と定めると， ω_{cone} は複素錐 Q_0^n 上の Ricci 平坦な Kähler 計量を与える．

2 余等質性 1 の特殊 Lagrange 部分多様体

(M, ω) をシンプレクティック多様体とする． M に Lie 群 G が Hamilton 作用で作用しているとし，その運動量写像を $\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ と表す． $\mathfrak{g}^*$ の中心を $Z(\mathfrak{g}^*) = \{X \in \mathfrak{g}^* \mid \text{Ad}^*(g)X = X \ (\forall g \in G)\}$ によって定義する． μ による $c \in \mathfrak{g}^*$ の逆像 $\mu^{-1}(c)$ が G 不変であるための必要十分条件は $c \in Z(\mathfrak{g}^*)$ となることである．

命題 2.1 L は M の連結なイソトロピック部分多様体で G 不変であるとする．このとき， L は $\mathfrak{g}^*$ の中心のある元 $c \in Z(\mathfrak{g}^*)$ の逆像 $\mu^{-1}(c)$ に含まれる．

命題 2.2 L は M の G 不変で連結な部分多様体であり， L への G の作用は余等質性 1 であるとする．このとき， L がイソトロピックであるための必要十分条件は $\mathfrak{g}^*$ の中心のある元 $c \in Z(\mathfrak{g}^*)$ が存在して L が $\mu^{-1}(c)$ に含まれることである．

上の 2 つの命題により，運動量写像を用いる方法によって， $T^*S^n \cong Q^n$ 内の余等質性 1 の特殊 Lagrange 部分多様体を構成することができる． G を $SO(n+1)$ の連結 Lie 部分群としたとき， G の Q^n への作用の運動量写像 $\mu: Q^n \rightarrow \mathfrak{g}^*$ は次で与えられる．

$$(\mu(z))(A) = u'(r^2)\langle \sqrt{-1}z, \tilde{A}_z \rangle \quad (z \in Q^n, A \in \mathfrak{g})$$

ここで， $\tilde{A}$ は $A \in \mathfrak{g}$ による Q^n 上の基本ベクトル場を表し， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{C}^{n+1}$ の標準的な実内積を表す．今 $c \in Z(\mathfrak{g}^*)$ に対して $\mu^{-1}(c)$ への G 作用の主軌道が $(n-1)$ 次元であるとする． σ を $\mu^{-1}(c)$ への G 作用の軌道空間 $\mu^{-1}(c)/G$ 内の正則曲線とする．ただし， σ は軌道空間 $\mu^{-1}(c)/G$ において特異軌道に対応する点は通らないとする．このとき， σ を通る G 軌道 $L = G \cdot \sigma$ は $\mu^{-1}(c)$ に含まれる余等質性 1 の部分多様体であるから，命題 2.2 より Q^n 内の Lagrange 部分多様体になる．さらに，この L が特殊 Lagrange 部分多様体になるための必要十分条件は $\text{Im}(e^{\sqrt{-1}\theta}\Omega|_L) \equiv 0$ である．この条件は， σ の 1 階の常微分方程式になる．

ここでは， $SO(n+1)$ の部分群 G で $\mu^{-1}(c)$ へ作用させたとき $(n-1)$ 次元の軌道が現れるものとして

$$(1) \ G = \left(\begin{array}{c|c} SO(p) & O \\ \hline O & SO(q) \end{array} \right) \cong SO(p) \times SO(q) \quad (p+q=n+1, 1 \leq p \leq q \leq n)$$

$$(2) \text{ 階数 } 2 \text{ の実 Grassmann 多様体 } \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}) \cong SO(n+2)/SO(2) \times SO(n) \text{ の線形イソトロピー群}$$

の二つを考える．

2.1 $G = SO(p) \times SO(q)$ の作用で不変な特殊 Lagrange 部分多様体

命題 2.1 より, Q^n 内の G の作用で不変な Lagrange 部分多様体は $\mathfrak{g}^*$ の中心のある元の μ による逆像に含まれることがわかる. $p = 2$ の場合は $SO(2)$ が可換であるから, $\mathfrak{g}^*$ は非自明な中心を持つ. また, $p = 1$ の場合は G を T^*S^n の零切断 S^n に作用させたときの軌道が主曲率 1 個の等質超曲面となるため, G 作用の軌道空間が他の場合と異なる. $3 \leq p \leq q$ のとき $Z(\mathfrak{g}^*) = 0$ であり, G 不変な特殊 Lagrange 部分多様体は次で与えられる.

定理 2.3 $3 \leq p \leq q$ として, $G = SO(p) \times SO(q)$ とする. G の Q^n への作用の運動量写像を $\mu : Q^n \rightarrow \mathfrak{g}^*$ と表す. このとき, G の $\mu^{-1}(0)$ への作用の軌道空間は次でパラメトライズされる.

$$\Sigma = \left\{ (\overset{1}{\cos} \tau, 0, \dots, 0, \overset{p+1}{\sin} \tau, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \begin{array}{l} \tau = t + \sqrt{-1}\xi_1 \\ 0 \leq t \leq \pi/2, \xi_1 \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \subset Q^n$$

τ を複素平面内の曲線として, Σ 内の曲線 σ を

$$\sigma(s) = (\cos \tau(s), 0, \dots, 0, \sin \tau(s), 0, \dots, 0)$$

によって定めると, $L = G \cdot \sigma$ は Q^n の ω_{Stz} に関して余等質性 1 の Lagrange 部分多様体になる. ただし, 曲線 τ が $(\pi/2)\mathbb{Z}$ を通るとき, L はその点において特異点をもつ. さらに, τ が

$$\text{Im} \left(e^{\sqrt{-1}\theta} \int_0^{\tau(s)} (\cos w)^{p-1} (\sin w)^{q-1} dw \right) = \text{const.} \quad (2.1)$$

をみたすときに限り, L は Q^n 内の位相 θ の特殊 Lagrange 部分多様体になる.

(2.1) の解を解析することにより, 定理 2.3 で構成された特殊 Lagrange 部分多様体について次のような性質を観察することができる.

- (2.1) の滑らかな解は Q^n に埋め込まれた滑らかな特殊 Lagrange 部分多様体 $L \cong \mathbb{R} \times S^{p-1} \times S^{q-1}$ を与える.
- L の 2 つのエンドは Q_0^n 内の特殊 Lagrange 錐に漸近する. ここで, Q_0^n 内の特殊 Lagrange 錐は $S^{p-1} \times S^{q-1} \subset T^1S^n$ 上の錐として得られる.
- τ が 0 (または $\pi/2$) を通るとき, 対応する特殊 Lagrange 部分多様体はその点において退化する. このとき, 焦点集合 S^{p-1} (または S^{q-1}) が特異集合になる.
- (2.1) の解は 0 と $\pi/2$ において分岐している. これに対応して, q 個の特殊 Lagrange 部分多様体と p 個の特殊 Lagrange 部分多様体がそれぞれ焦点集合 S^{p-1} と S^{q-1} において交叉している.
- 滑らかな特殊 Lagrange 部分多様体は変形でき, 特異点をもつ特殊 Lagrange 部分多様体に退化する.

命題 2.4 G が abelian の場合, $Z(\mathfrak{g}^*) = \mathfrak{g}^*$ となり, θ を固定したとき, $T^*S^n \cong Q^n$ は G で不変な余等質性 1 の特殊 Lagrange 部分多様体によって foliate される.

たとえば $n = 6, p = 3, q = 4$ の場合 , (2.1) の解曲線は次のようになる .

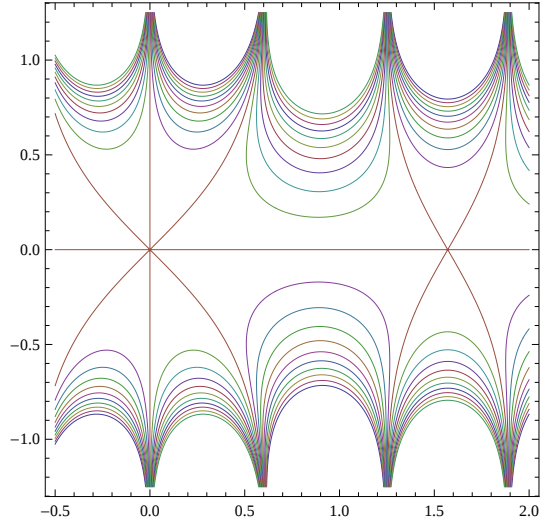


図 1: $\theta = 0$

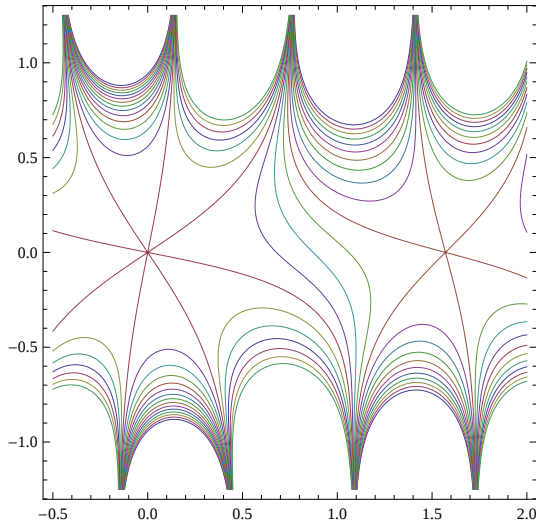


図 2: $\theta = \pi/4$

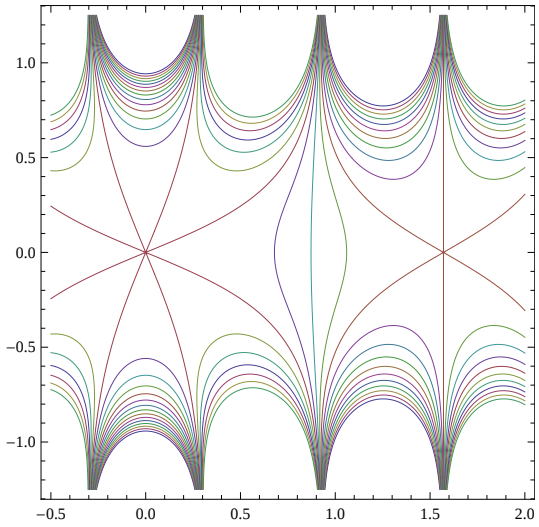


図 3: $\theta = \pi/2$

2.2 階数 2 の実 Grassmann 多様体の線形イソトロピー表現で不変な特殊 Lagrange 部分多様体

$\mathbb{R}^{n+2}$ 内の向き付けられた 2 次元部分空間全体のなす Grassmann 多様体を

$$\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}) \cong SO(n+2)/SO(2) \times SO(n)$$

と表す． $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ は階数 2 のコンパクト型対称空間であり， $SO(n+2)$ の Lie 環 $\mathfrak{so}(n+2)$ を

$$\mathfrak{so}(n+2) = \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{p}$$

と標準分解することができる．ここで，

$$\mathfrak{p} = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} O & X \\ \hline -{}^tX & O \end{array} \right] \mid X \in M_{2,n}(\mathbb{R}) \right\}$$

であり， $M_{2,n}(\mathbb{R})$ は $2 \times n$ の実行列全体の集合を表す．以後， $\mathfrak{p}$ と $M_{2,n}(\mathbb{R})$ を

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &\cong M_{2,n}(\mathbb{R}) \\ \left[\begin{array}{cc} O & X \\ -{}^tX & O \end{array} \right] &\longleftrightarrow X \end{aligned}$$

によって同一視する． $g = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \in SO(2) \times SO(n)$ と表したとき， $G = SO(2) \times SO(n)$ の線形イソトロピー表現は $\mathfrak{p}$ への表現として

$$\text{Ad} \left(\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \right) \left[\begin{array}{cc} O & X \\ -{}^tX & O \end{array} \right] = \begin{bmatrix} O & AXB^{-1} \\ -B{}^tXA^{-1} & O \end{bmatrix}$$

と表される．したがって，これは G の $M_{2,n}(\mathbb{R})$ への表現

$$\text{Ad}(g)X = AXB^{-1} \quad (X \in M_{2,n}(\mathbb{R}))$$

と同値になる．この表現は直交表現であるから， $\mathfrak{p}$ 内の単位超球面 S^{2n-1} に作用し，その主軌道は主曲率 4 個の等質超曲面になる．

$\mathfrak{p}$ の複素化 $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} = M_{2,n}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{2n}$ 内の複素二次超曲面 Q^{2n-1} にも自然に G の作用が誘導される．このとき， $\mu^{-1}(0)$ への G の作用の主軌道は $2(n-1)$ 次元であり，軌道空間は次でパラメトライズされる．

$$\Sigma = \left\{ \left[\begin{array}{cccccc} \cos \tau & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sin \tau & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \mid \begin{array}{l} \tau = t + \sqrt{-1}\xi_1 \\ 0 \leq t \leq \pi/4, \xi_1 \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \subset Q^{2n-1}$$

定理 2.5 τ を複素平面 (t, ξ_1) 内の正則曲線とし，

$$\sigma(s) = \begin{bmatrix} \cos \tau(s) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sin \tau(s) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

によって $\Sigma \subset Q^{2n-1}$ 内の曲線 σ を定める．このとき， $L = G \cdot \sigma$ は Q^{2n-1} 内の余等質性 1 の Lagrange 部分多様体になる．さらに， τ が

$$\text{Im} \left(e^{\sqrt{-1}\theta} (\sin 2\tau(s))^{n-1} \right) = \text{const.}$$

をみたすときに限り $L = G \cdot \sigma$ は Q^{2n-1} 内の位相 θ の特殊 Lagrange 部分多様体になる．

3 余法束として得られる特殊 Lagrange 部分多様体

一般に多様体 M の余接束 T^*M には自然なシンプレクティック形式 ω_0 が定まり, M の部分多様体の余法束は Lagrange 部分多様体になる. Harvey-Lawson は $\mathbb{R}^n$ の部分多様体の余法束が $T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{C}^n$ の特殊 Lagrange 部分多様体になるのはいつかという問題を考え, austere 部分多様体の概念に到達した.

定義 3.1 M を Riemann 多様体, X を M の部分多様体とする. X の各点の各法ベクトル ξ に対して X の形作用素 A_ξ の固有値全体のなす集合が -1 倍に関して不変であり, -1 倍で対応する固有値の重複度が等しいとき, X を austere 部分多様体という.

定義から明らかに austere 部分多様体は極小部分多様体である. 特に, X が 2 次元の場合, X が austere 部分多様体であることと極小曲面であることは同値である.

定理 3.2 (Harvey-Lawson [3]) $\mathbb{R}^n$ の部分多様体 X の余法束 $L = N^*X$ が $T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{C}^n$ の特殊 Lagrange 部分多様体になるための必要十分条件は X が $\mathbb{R}^n$ の austere 部分多様体であることである.

次に, X が S^n の部分多様体であるとする. 余法束 $L = N^*X$ は T^*S^n の標準的なシンプレクティック構造 ω_0 に関して Lagrange 部分多様体になる. さらに, 次の定理が示される.

定理 3.3 (Karigiannis-Min-Oo [9]) S^n の部分多様体 X の余法束 $L = N^*X$ は T^*S^n の Stenzel 計量 ω_{Stz} に関する Lagrange 部分多様体になる. さらに, L が T^*S^n の特殊 Lagrange 部分多様体になるための必要十分条件は X が S^n の austere 部分多様体であることである.

論文 [5] において弱鏡映部分多様体の概念を導入し, 既約 Riemann 対称空間の線形イソトロピー表現の軌道の中で球面内の弱鏡映部分多様体になるものと austere 部分多様体になるものを分類した. これらの austere 軌道の余法束として T^*S^n 内の特殊 Lagrange 部分多様体を得られる.

参考文献

- [1] H. Anciaux, *Special Lagrangian submanifolds in the complex sphere*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **16** (2007), 215–227.
- [2] K. Hashimoto and T. Sakai, *Cohomogeneity one special Lagrangian submanifolds in the cotangent bundle of the sphere*, to appear in Tohoku Mathematical Journal.
- [3] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr., *Calibrated geometries*, Acta Math., **148** (1982), 47–157.
- [4] M. Haskins and N. Kapouleas, *Twisted products and $SO(p) \times SO(q)$ -invariant special Lagrangian cones*, arXiv:1005.1419.

- [5] O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, *Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds*, J. Math. Soc. Japan. **61** (2009), 437–481.
- [6] M. Ionel and M. Min-Oo, *Cohomogeneity one special Lagrangian 3-folds in the deformed conifold and the resolved conifolds*, Illinois J. Math. **52** (2008), 839–865.
- [7] D. D. Joyce, *Special Lagrangian m -folds in $\mathbb{C}^m$ with symmetries*, Duke Math. J. **115** (2002), 1–51.
- [8] K. Kanemitsu, *Construction of special Lagrangian submanifolds in the cotangent bundle of the n -dimensional sphere*, master thesis, The University of Tokyo, 2006.
- [9] S. Karigiannis and M. Min-Oo, *Calibrated subbundles in noncompact manifolds of special holonomy*, Ann. Global Anal. Geom. **28** (2005), 371–394.
- [10] M. Stenzel, *Ricci-flat metrics on the complexification of a compact rank one symmetric space*, Manuscripta Math. **80** (1993), no. 2, 151–163.

〒 192-0397

東京都八王子市南大沢 1-1

首都大学東京大学院理工学研究科

数理情報科学専攻

酒井 高司

e-mail : sakai-t@tmu.ac.jp