

A generalization of Cartan decomposition for spherical 4-symmetric spaces ^{*}

笹木 集夢 (東海大学理学部数学科) [†]

概要

本記録集では、複素等質空間の中で spherical かつ 4-対称空間とよばれるクラスに対するカルタン分解の一般化を具体的に記述することを目的とする．また本結果を用いて、spherical な 4-対称空間は可視的作用をもつことを示す．

1 導入

本記録集では、連結な複素単純リー群 $G_{\mathbb{C}}$ とその連結な複素閉部分群 $H_{\mathbb{C}}$ の組として次の 3 つを扱う．

Case	$G_{\mathbb{C}}$	$H_{\mathbb{C}}$
1	$SL(2n+1, \mathbb{C})$	$Sp(n, \mathbb{C})$
2	$Sp(n+1, \mathbb{C})$	$SO(2, \mathbb{C}) \times Sp(n, \mathbb{C})$
3	$SO(2n+1, \mathbb{C})$	$GL(n, \mathbb{C})$

上の 3 つに対して、

$$G_{\mathbb{C}} = G_u A H_{\mathbb{C}}. \quad (1.1)$$

を満たす $G_{\mathbb{C}}$ の部分集合 A の具体的記述について考える．

リーマン対称空間に対する上記の問題は、古典的なカルタン分解に他ならない．また、一般の対称空間に対しても同様にカルタン分解が得られることが知られている (cf. [2]).

我々が扱う複素等質空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ は対称空間ではない．一方で、 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ は spherical という性質を持つ．つまり、 $G_{\mathbb{C}}$ のボレル部分群が $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ 内に (ザリスキ位相に関して) 開軌道をもつことが知られている (cf. [9]). 複素線型リー群の複素等質空間への作用による軌道は有限個であるから、開軌道は存在すればただ 1 つであり、よって開軌道は $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ 内で稠密である．この事実により、 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ が spherical であるとき、その上の正則関数全体のなす空間 $\mathcal{O}(G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}})$ が $G_{\mathbb{C}}$ の表現として重複なく既約分解される．逆に、準アフィン複素等質空間に対しては、上の命題の逆も正しい ([15]). $\mathcal{O}(G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}})$ が $G_{\mathbb{C}}$ の表現として重複なく既約分解されるとき、これを無重複表現とよぶ．

^{*}研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2011」(東京理科大学森戸記念館第 1 フォーラム：2011 年 9 月 2 日-3 日)における記録集．

[†]E-mail: atsumu@tokai-u.jp

本研究は科研費 (22740029) の助成を受けたものである．

小林俊行氏は、連結な複素多様体 D を底空間とする、リー群 L で同変な正則ベクトル束 $\mathcal{V} \rightarrow D$ の切断 $\mathcal{O}(D, \mathcal{V})$ が無重複表現となるための十分条件を底空間 D における‘可視的作用’によって与えた¹(cf. [4, 5]). ここで、 D における L の正則な作用が可視的であるとは、 D 内のスライス S と D 上の反正則微分同相 σ が、次の条件を満たすときをいう：

$$D = L \cdot S, \quad (\text{V.1})$$

$$\sigma|_S = \text{id}_S, \quad (\text{S.1})$$

$$\sigma(x) \in L \cdot x \quad (\forall x \in D). \quad (\text{S.2})$$

例えば、1次元トーラス $\mathbb{T}$ は $\mathbb{C}$ に通常複素数の積として正則に作用するが、この作用は $S = \mathbb{R}$, $\sigma(z) = \bar{z}$ によって可視的に作用することが分かる。また、特殊直交群 $SO(2)$ の複素上半平面 $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ への1次分数変換としての作用も可視的である。実際に $S = \sqrt{-1}\mathbb{R}_+$, $\sigma(z) = -\bar{z}$ とすると (V.1)–(S.2) を満たす。

一方で、正則ベクトル束に実現される無重複表現にはその底空間に美しい幾何構造が存在していると予想される。本記録集では、可視的作用の立場から非対称な複素等質空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ の幾何構造をスライスの観点から調べることを目的とする。

本記録集の主結果は次の通りである。

定理 1.1. 連結な複素単純リー群とその連結な複素閉部分群の組 $(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}})$ を Cases 1–3 のいずれかとする。 $G_{\mathbb{C}}$ の部分集合 A を次を満たすように定める：

$$A \simeq \begin{cases} \mathbb{R} \cdot \underbrace{\mathbb{T} \cdots \mathbb{T}}_{n-1} \cdot \mathbb{R}^n & (\text{Case 1}) \\ \mathbb{R} \cdot \mathbb{R} & (\text{Case 2}) \\ \mathbb{R} \cdot \underbrace{\mathbb{T} \cdots \mathbb{T}}_{[\frac{n-1}{2}]} \cdot \mathbb{R}^{[\frac{n}{2}]} & (\text{Case 3}) \end{cases}. \quad (1.2)$$

ただし、 $m \in \mathbb{R}$ に対し $[m] \in \mathbb{Z}$ は m を超えない最大の整数を表す。このとき、カルタン分解の一般化 $G_{\mathbb{C}} = G_u A H_{\mathbb{C}}$ が成り立つ。

注意 1.2. 定理 1.1 の (1.2) にある $\mathbb{T}$ は、 $G_{\mathbb{C}}$ の部分群として実現される $SO(2)$ のことを示す。 A はもはや可換ではなく群構造すらもたない。これは、対称空間の場合と異なる点である。

注意 1.3. 定理 1.1 を満たす A は代数多様体であり²、その次元は等質空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ 内の G_u -主軌道の余次元に一致する。

定理 1.1 による A の具体的記述によって、次の定理が得られる。

定理 1.4. 連結な複素単純リー群とその連結な複素閉部分群の組 $(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}})$ を Cases 1–3 のいずれかとする。このとき、 $G_{\mathbb{C}}$ のコンパクトな実型 G_u の非対称な複素等質空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ への作用は強可視的である。

¹我々の設定では、自明直線束 $\mathcal{V} := G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C} \rightarrow G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ に対応する。特に、 $\mathcal{O}(G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}, \mathcal{V}) \simeq \mathcal{O}(G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}})$ 。

² A は可微分多様体であると予想している。

2 4-対称空間

2.1 リー群の実現

本記録集の目的は、定理 1.1 を満たす A を具体的に与えることにある。定理 1.1 の結果自身はリー群の実現に依らないことに注意する。本節では、特殊直交群 $SO(n, \mathbb{C})$ とシンプレクティック群 $Sp(n, \mathbb{C})$ を行列群として実現することを解説する。ここでは、通常の実現とは異なる方法を採用することで、 A をより対角行列に近い形で実現することを視野に入れている。

まず、次の行列を用意する：クロネッカーの $\delta_{i,j}$ を用いて n 次正方行列 I_n^A を

$$I_n^A := (\delta_{i, n-j+1}) = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

で定義する。つまり、反対角線に 1 が並ぶ行列である。これは、対称行列であることに注意する： ${}^t I_n^A = I_n^A$ 。これを用いて、 n 次正方行列 X に対し、

$$X^T := I_n^X {}^t X I_n^A$$

と定義する。これは、反対角線に関する転置行列を表す。さらに、 $2n$ 次正方行列 J_n^A を次で定義する：

$$J_n^A := \begin{pmatrix} & -I_n^A \\ I_n^A & \end{pmatrix}.$$

この行列は交代行列である： ${}^t J_n^A + J_n^A = O$ 。

次に、一般線型群の閉部分群として次を定義する：

$$SO(n, \mathbb{C}) := \{g \in SL(n, \mathbb{C}) : {}^t g I_n^A g = I_n^A\}, \quad (2.1)$$

$$Sp(n, \mathbb{C}) := \{g \in SL(2n, \mathbb{C}) : {}^t g J_n^A g = J_n^A\}. \quad (2.2)$$

上で定義した複素リー群のリー環は次で与えられる：

$$\mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) : {}^t X I_n^A + I_n^A X = O\}, \quad (2.3)$$

$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{C}) : {}^t X J_n^A + J_n^A X = O\}. \quad (2.4)$$

上で定義したリー群およびリー環が特殊直交リー環、シンプレクティックリー環と同型であることについて言及する。リー環 $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}''$ を

$$\mathfrak{g}' := \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) : {}^t X + X = O\},$$

$$\mathfrak{g}'' := \{X \in \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{C}) : {}^t X J_n + J_n X = O\}$$

とする³。ただし、

$$J_n := \begin{pmatrix} & -I_n \\ I_n & \end{pmatrix}.$$

³この 2 つのリー環は、リー環の専門書でよく用いられている特殊直交リー環、シンプレクティックリー環の定義である。

補題 2.1. リー環 $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ と $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ はそれぞれ (2.3) と (2.4) で与えられたものとする。このとき、

(1) 複素リー環の同型 $\text{Ad}(T_1^{-1}) : \mathfrak{g}' \xrightarrow{\sim} \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ を与える正則行列 T_1 が存在する。

(2) 複素リー環の同型 $\text{Ad}(T_2^{-1}) : \mathfrak{g}'' \xrightarrow{\sim} \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ を与える正則行列 T_2 が存在する。

Sketch of Proof. T_1 は、 $n = 2m + 1$ のとき

$$T_1 := \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{1}{\sqrt{2}} I_m & & \frac{1}{\sqrt{2}} I_m^A \\ \hline & 1 & \\ \hline -\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} I_m^A & & \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} I_m \end{array} \right),$$

$n = 2m$ のとき

$$T_1 := \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{2}} I_m & \frac{1}{\sqrt{2}} I_m^A \\ -\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} I_m^A & \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} I_m \end{array} \right)$$

とする。このとき、 ${}^t T_1 T_1 = T_1 {}^t T_1 = I_n^A$ が成り立つ。ここで、 $X \in \mathfrak{g}'$ のとき ${}^t X + X = O$ から

$$\begin{aligned} {}^t (T_1^{-1} X T_1) I_n^A + I_n^A (T_1^{-1} X T_1) &= ({}^t T_1 {}^t X {}^t T_1^{-1}) ({}^t T_1 T_1) + ({}^t T_1 T_1) (T_1^{-1} X T_1) \\ &= {}^t T_1 {}^t X T_1 + {}^t T_1 X T_1 \\ &= {}^t T_1 ({}^t X + X) T_1 = O. \end{aligned}$$

よって、 $T_1^{-1} X T_1 \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ となる。 $\text{Ad}(T_1)^{-1}$ がリー環の同型を与えることは直接確かめられる。

また、

$$T_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ -I_n^A & I_n^A \end{pmatrix}$$

とすると、 ${}^t T_2 J_n T_2 = T_2 J_n {}^t T_2 = J_n^A$ が成り立つことより、 $\mathfrak{g}'' \simeq \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ も上と同様に確かめられる。□

補題 2.1 によって、特殊直交群およびシンプレクティック群を (2.1), (2.2) で定義されたものとする。この実現によって、 $Sp(n, \mathbb{C})$ を $SL(2n+1, \mathbb{C})$ に

$$g \mapsto \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & g \end{array} \right)$$

によって実現することで部分群と見なす。また、 $Sp(n+1, \mathbb{C})$ の部分群 $SO(2, \mathbb{C}) \times Sp(n, \mathbb{C})$ は

$$\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, g \right) \mapsto \left(\begin{array}{c|c|c} a & & \\ \hline & g & \\ \hline & & a^{-1} \end{array} \right)$$

を通して, さらに $SO(2n+1, \mathbb{C})$ の部分群 $GL(n, \mathbb{C})$ は

$$g \mapsto \left(\begin{array}{c|c|c} g & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & & (g^{-1})^T \end{array} \right)$$

として実現する.

2.2 n -対称空間

次に, 我々が扱う $(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}})$ が 4-対称空間であることを見よう.

まず, n -対称空間の定義をリー群の言葉で述べる. n -対称空間は対称空間の概念を一般化したものであり, 以下の定義において $n = 2$ の場合が通常対称空間であることは明らかであろう.

定義 2.2. リー群 G とその閉部分群 H に対し, 等質空間 G/H が n -対称空間であるとは, G 上の位数 n の自己同型 θ が存在し, $G_0^\theta \subset H \subset G^\theta$ を満たすことをいう. ここで, G_0^θ は θ の固定部分群 G^θ の単位元成分を表す.

n -対称空間に関するいくつかの例を挙げる.

例 2.3. G' をリー群とし, $G = G' \times \cdots \times G'$ を G' の n 個の直積とする. G 上の自己同型 θ を $\theta(g_1, g_2, \dots, g_n) := (g_2, g_3, \dots, g_1)$ とすると, $H := \text{diag}(G) \simeq G'$ は $H = G^\theta$ を満たす. よって, G/H は n -対称空間である.

例 2.4. G' をリー群とし, $G = G' \times G'$ とする. G' 上の対合的自己同型 τ に対し, $\theta(g_1, g_2) := (\tau(g_2), g_1)$ とおくと, θ は位数 4 の自己同型であり, $H := G^\theta$ とおくと G/H は 4-対称空間である.

我々が扱う等質空間は spherical な 4-対称空間であるが, spherical な複素等質空間の中で 3-対称空間であるものも存在する.

例 2.5. $(SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C}))/SL(2, \mathbb{C})$ が 3-対称空間であることは例 2.3 から分かる. これが spherical であることは [1] で述べられている.

また, 既約かつ spherical な 3-対称空間の例として, $Spin(8, \mathbb{C})/G_2(\mathbb{C})$ が挙げられる. $\mathfrak{g} = \mathfrak{spin}(8, \mathbb{C}) \simeq \mathfrak{so}(8, \mathbb{C})$ のディンキン図形から, $\text{Aut } \mathfrak{g} / \text{Int } \mathfrak{g} \simeq \mathbb{Z}_3$ であることが分かる. $\mathfrak{so}(8, \mathbb{C})$ 上の位数 3 の外部自己同型を $Spin(8, \mathbb{C})$ に持ち上げたものを θ とすると, θ の固定部分群が $G_2(\mathbb{C})$ となる. なお, $Spin(8, \mathbb{C})/G_2(\mathbb{C})$ は $SO(8, \mathbb{C})/G_2(\mathbb{C})$ の被覆空間であり, $SO(8, \mathbb{C})/G_2(\mathbb{C})$ も spherical であるが, 3-対称空間ではない.

既約なリーマン等質空間の場合に 4-対称空間は Jiménez [3] によって分類された. 以下の命題は [3] の分類から分かる.

命題 2.6. 連結な複素単純リー群 $G_{\mathbb{C}}$ とその連結な複素閉部分群 $H_{\mathbb{C}}$ の組 $(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}})$ は Cases 1–3 のいずれかとする (第 1 章参照). このとき, $H_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}}^\theta$ を満たす $G_{\mathbb{C}}$ 上の位数 4 の正則自己同型 θ が存在する. 特に, $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ は 4-対称空間である.

Proof. 本記録集ではカルタン分解の一般化を目標としているので、(2.1) や (2.2) による実現に対して具体的に θ を記述する． $j = 1, 2, 3$ に対し、 $\tilde{I}_j$ を次で定義する：

$$\tilde{I}_1 := \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & J_n^A \end{array} \right), \quad \tilde{I}_2 := \left(\begin{array}{c|c|c} & & 1 \\ \hline & J_n^A & \\ \hline 1 & & \end{array} \right), \quad \tilde{I}_3 := \left(\begin{array}{c|c|c} & & -I_n^A \\ \hline & 1 & \\ \hline I_n^A & & \end{array} \right).$$

$(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}})$ が Case j のときに $\theta(g) := \tilde{I}_j^{-1} t_g^{-1} \tilde{I}_j$ とすると、 θ は位数 4 の自己同型で $H_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}}^{\theta}$ であることが確かめられる。□

2.3 4-対称空間のファイバー束の構造

次に、命題 2.6 で選んだ θ に対して、 θ^2 は $G_{\mathbb{C}}$ 上の対合的自己同型であるから、 $K_{\mathbb{C}} := (G_{\mathbb{C}}^{\theta^2})_0$ とおくと $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ は対称空間となる．さらに、 θ を $K_{\mathbb{C}}$ に制限したものは再び $K_{\mathbb{C}}$ 上の自己同型を誘導しかつ対合的である． $K_{\mathbb{C}}^{\theta} = H_{\mathbb{C}}$ となるので、 $K_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ も対称空間となる．以上より、4-対称空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ は上記の性質を満たすファイバー束の構造をもつ：

$$\begin{array}{ccccc} K_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}} & \rightarrow & G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}} & \rightarrow & G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}} \\ \text{ファイバー} & & \text{全空間} & & \text{底空間} \\ \text{対称空間} & & \text{4-対称空間} & & \text{対称空間} \end{array}$$

下表 1 に各 $(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}})$ に対して $K_{\mathbb{C}}$ を挙げる．

Case	$G_{\mathbb{C}}$	$H_{\mathbb{C}}$	$K_{\mathbb{C}}$
1	$SL(2n+1, \mathbb{C})$	$Sp(n, \mathbb{C})$	$GL(2n, \mathbb{C})$
2	$Sp(n+1, \mathbb{C})$	$SO(2, \mathbb{C}) \times Sp(n, \mathbb{C})$	$Sp(1, \mathbb{C}) \times Sp(n, \mathbb{C})$
3	$SO(2n+1, \mathbb{C})$	$GL(n, \mathbb{C})$	$SO(2n, \mathbb{C})$

表 1: ファイバー束の構造 $K_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}} \rightarrow G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}} \rightarrow G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$

3 定理 1.1 の証明の方針

本章では、定理 1.1 におけるカルタン分解の一般化を得るための方針について解説する．記号は前章までに準備したものを引き続き用いる．

4-対称空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ はファイバー束の構造をもち、底空間 $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ およびファイバー $K_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ ともに対称空間であったことを思い出そう．対称空間に対するカルタン分解は一般的に与えられている (cf. [2])．これらの分解を“編み上げる”ことによって定理 1.1 を証明する．この手法は編み上げの手法 (herringbone stitch) とよばれる．A 型の旗多様体に対するカルタン分解の一般化を研究する際に小林俊行氏が提唱した手法である ([6] 参照)．

Step 1 (底空間に対するカルタン分解)．対称空間 $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ に対して、 $G_{\mathbb{C}} = G_u A_1 K_{\mathbb{C}}$ を満たす可換群 $A_1 \simeq \mathbb{R}^{\text{rank}_{\mathbb{R}} G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}}$ を構成する．

Step 2 (ファイバーに対するカルタン分解). 対称空間 $K_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ に対して, $K_{\mathbb{C}} = K_u A_2 H_{\mathbb{C}}$ を満たす可換群 A_2 を構成する. ただし, K_u は $K_{\mathbb{C}}$ の極大コンパクト部分群を表す.

上の2つの steps より, $G_{\mathbb{C}} = G_u A_1 K_{\mathbb{C}} = G_u A_1 (K_u A_2 H_{\mathbb{C}})$ を得る. しかし, K_u は A_1 や A_2 と可換ではないため, 新たに K_u の分解を考える必要がある.

Step 3. $H_{\mathbb{C}}$ の極大コンパクト部分群 H_u を選び, M_1 を K_u における A_1 の中心化群 $Z_{K_u}(A_1)$, M_2 を H_u における A_2 の中心化群 $Z_{H_u}(A_2)$ とする. M_1, M_2 はいずれもコンパクト群である. そこで, $K_u = M_1 A_3 M_2$ を満たす A_3 を具体的に記述する.

以上の steps より,

$$\begin{aligned}
G_{\mathbb{C}} &= G_u A_1 K_{\mathbb{C}} & (\because \text{Step 1}) \\
&= G_u A_1 (K_u A_2 H_{\mathbb{C}}) & (\because \text{Step 2}) \\
&= G_u A_1 (M_1 A_3 M_2) A_2 H_{\mathbb{C}} & (\because \text{Step 3}) \\
&= G_u M_1 (A_1 A_3 A_2) M_2 H_{\mathbb{C}} & (\because A_1 M_1 = M_1 A_1, A_2 M_2 = M_2 A_2) \\
&= G_u (A_1 A_3 A_2) H_{\mathbb{C}}.
\end{aligned}$$

以上より,

$$A := A_1 A_3 A_2 \tag{3.1}$$

が定理 1.1 を満たすものである.

上記で用いた群を編み上げる様子を図式 2 でまとめた.

$$\begin{array}{ccccc}
H & & \supset & & H_u \\
& \frown & & \smile & \\
& & K_{\mathbb{C}} & & M_2 \\
& \wr & & \wr & \wr \\
G_{\mathbb{C}} & & & & K_u \\
\wr & & & & \wr \\
G_u & & \supset & & M_1
\end{array}$$

図式 2: $G_u \backslash G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ に対する編み上げの手法

4 定理 1.1 の証明のための準備

本章では, 第 3 章で述べた証明の方針に従い, 対称空間に対するカルタン分解について (第 4.1 節), また単位球面における作用について (第 4.2 節) 解説する. 第 5 章では, 本章の準備をもって定理 1.1 の証明を行う.

4.1 対称空間に対するカルタン分解

この節では、連結な実簡約リー群のカルタン分解について [2] の内容をまとめておく。

この節に限り、 G を連結な実簡約リー群とし、 H を G の連結な対称部分群、 τ を $G_0^* \subset H \subset G^\tau$ を満たす G 上の対合的自己同型とする。 K を極大コンパクト部分群とし、 G 上の対合的自己同型 θ を $K = G^\theta$ かつ $\theta\tau = \tau\theta$ を満たすものとする。

$\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ をそれぞれ G, H, K のリー環とする。 対合 τ, θ に対し、その微分も同じ記号を用いる。 このとき、 $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{g}^{\theta\tau}$ は $\mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ とは異なる $\mathfrak{g}$ の対称部分環である。 ここで、 $\tau|_{\mathfrak{g}_0}$ は $\mathfrak{g}_0$ 上のカルタン対合となり、 $\mathfrak{g}_0$ の対応するカルタン分解を $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0^\tau + \mathfrak{g}_0^{-\tau}$ で表す。 このとき、

$$\mathfrak{g}_0^{-\tau} = \mathfrak{g}^{-\tau, -\theta} = \{X \in \mathfrak{g} : (-\tau)X = (-\theta)X = X\}.$$

$\mathfrak{a}_0$ を $\mathfrak{g}_0^{-\tau}$ の極大可換部分環とし、 $A = \exp \mathfrak{a}_0$ とする。

補題 4.1 ([2]). $G = KAH$.

可換群 A の次元を対称空間 G/H の実階数といい $\text{rank}_{\mathbb{R}} G/H$ と表す。 G, H がともに複素リー群のとき、実階数は対称空間の階数 $\text{rank } G/H$ と一致することが知られている。

4.2 $U(n-1) \backslash U(n) / SU(2)^{[\frac{n}{2}]} \times U(\varepsilon)$

本節では、連結なコンパクトリー群の3つ組

$$(L, L_1, L_2) := (U(n), 1 \times U(n-1), SU(2)^{[\frac{n}{2}]} \times U(\varepsilon)) \quad (4.1)$$

に対して、 $L = L_1 C L_2$ を満たす C を決定する。 ただし、 ε は n が奇数のときに1、偶数のときは0とする。 また、 L_2 は L に次の意味で実現されているとする：

$$L_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & & & b_1 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & a_n & & b_n \\ & & & (\alpha) & \\ & & c_n & & d_n \\ & \ddots & & & \ddots \\ c_1 & & & & d_1 \end{pmatrix} : \begin{matrix} j = 1, 2, \dots, n, \\ \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix} \in SU(2), \\ \alpha \in U(1) \end{matrix} \right\}.$$

また、 (α) は n が奇数のときにのみ適用する。

(L, L_1) および (L, L_2) はともに対称対ではない。 しかし、 $\text{rank } L/L_1 = 1$ である。 特に、 L/L_1 は $\mathbb{C}^n$ 内の単位球面に微分同相である。 このことを利用して、まず L_2 の単位球面における作用を考える。

$e_1, \dots, e_n$ を $\mathbb{C}^n$ の標準正規直交基底とする。 L_2 を $\mathbb{C}^n$ に以下によって作用させる：

$$(g_1, \dots, g_{[\frac{n}{2}]}, (\alpha)) \cdot {}^t(v_1, \dots, v_n) := \begin{pmatrix} g_1 {}^t(v_1, v_n) \\ g_2 {}^t(v_2, v_{n-1}) \\ \vdots \\ g_{[\frac{n}{2}]} {}^t(v_{[\frac{n}{2}]}, v_{n-[\frac{n}{2}]+1}) \\ (\alpha v_{[\frac{n}{2}]+1}) \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

(4.2) によって, L_2 は単位球面 $S^{2n-1} = \{v \in \mathbb{C}^n : \|v\| = 1\}$ に作用する.

いま, S^{2n-1} の $[\frac{n-1}{2}]$ 次元部分多様体 T_0 を次で定義する:

$$T_0 := \left\{ \sum_{j=1}^{[\frac{n+1}{2}]} r_j e_j \in S^{2n-1} : r_1, \dots, r_{[\frac{n+1}{2}]} \in \mathbb{R} \right\} \simeq S^{[\frac{n-1}{2}]}.$$

補題 4.2. $S^{2n-1} = L_2 \cdot T_0$.

Sketch of Proof. $\mathbb{C}^2$ は $SU(2)$ の作用によって $\mathbb{C}^2 = SU(2) \cdot \mathbb{R}e_1$ と分解される. また, $\mathbb{C}$ は $U(1) = \mathbb{T}$ の作用によって $\mathbb{C} = U(1) \cdot \mathbb{R}$ と分解される. このことより, $\mathbb{C}^n$ は (4.2) によって $\mathbb{C}^n = L_2 \cdot (\mathbb{R}e_1 + \dots + \mathbb{R}e_{[\frac{n+1}{2}]})$ と分解される. $(\mathbb{R}e_1 + \dots + \mathbb{R}e_{[\frac{n+1}{2}]}) \cap S^{2n-1} = T_0$ から結論を得る. $\square$

次に, $j = 1, 2, \dots, [\frac{n-1}{2}]$ に対して B_j を次で定義する:

$$B_j := \exp \mathbb{R}(E_{2j,2j-1} - E_{2j-1,2j}) \simeq SO(2). \quad (4.3)$$

さらに, L の部分集合 B を

$$B := B_{[\frac{n-1}{2}]} B_{[\frac{n-3}{2}]} \cdots B_2 B_1 \quad (4.4)$$

と定める.

補題 4.3. 微分同相 $\psi : L/L_1 \rightarrow S^{2n-1}$, $gL_1 \mapsto ge_1$ によって BL_1/L_1 は T_0 と微分同相である.

注意 4.4. $B_j B_{j+1} \neq B_{j+1} B_j$ より, B は群ではない.

補題 4.2 と 4.3 により, $L/L_1 = L_2 \cdot BL_1/L_1$ と分解される. これにより,

$$L = L_2 B L_1.$$

さらに, L の群演算によって, 上の分解は

$$L = L_1 B^{-1} L_2$$

と同値である. ここで, B の定義 ((4.4) 参照) から

$$B^{-1} = B_1 B_2 \cdots B_{[\frac{n-3}{2}]} B_{[\frac{n-1}{2}]}$$

と表される. 以上より, 次の命題が示された.

命題 4.5. $L = L_1 B^{-1} L_2$.

5 定理 1.1 の証明

本章では, 前章までの準備の下に, 定理 1.1 の証明を与える.

5.1 Step 1

本節では, $(G_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}})$ に対するカルタン分解を与える (第3章参照). $K_{\mathbb{C}}$ は 4-対称空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ を実現する $G_{\mathbb{C}}$ 上の自己同型 θ に対し, $K_{\mathbb{C}} = (G_{\mathbb{C}}^{\theta^2})_0$ で与えられる対称部分群であった (命題 2.6 参照). 補題 4.1 によって,

$$G_{\mathbb{C}} = G_u A_1 H_{\mathbb{C}} \quad (5.1)$$

を満たす $A_1 = \exp \mathfrak{a}_1$ は $\dim A = 1$ を満たす可換群である.

表 1 (第 2.3 節参照) によって, 次の補題を得る. この補題は, 我々が扱う 4-対称空間の特徴といえる.

補題 5.1. $\text{rank}_{\mathbb{R}} G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}} = 1$.

補題 5.1 によって, $\dim A = 1$ となる. 実際に, $\mathfrak{a}_1$ は各 $(G_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}})$ に対して次を選ぶことができる.

Case	$(G_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}})$	$\mathfrak{a}_1$
1	$(SL(2n+1, \mathbb{C}), GL(2n, \mathbb{C}))$	$\mathbb{R}(E_{1,2} + E_{2,1})$
2	$(Sp(n+1, \mathbb{C}), Sp(1, \mathbb{C}) \times Sp(n, \mathbb{C}))$	$\mathbb{R}(E_{1,2} + E_{2,1} - E_{2n+1,2n+2} - E_{2n+2,2n+1})$
3	$(SO(2n+1, \mathbb{C}), SO(2n, \mathbb{C}))$	$\mathbb{R}(E_{1,n+1} + E_{n+1,1} - E_{n+1,2n+1} - E_{2n+1,n+1})$

表 3: $A_1 = \exp \mathbb{R}\mathfrak{a}_1$

5.2 Step 2

次に, $(K_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}})$ に対するカルタン分解を与える. $H_{\mathbb{C}} = K_{\mathbb{C}}^{\theta}$ より (第 2.3 節参照) より, $(K_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}})$ は対称対であるから, 再び補題 4.1 より

$$K_{\mathbb{C}} = K_u A_2 H_{\mathbb{C}} \quad (5.2)$$

を満たす可換群 $A_2 = \exp \mathfrak{a}_2 \simeq \mathbb{R}^{\text{rank}_{\mathbb{R}} K_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}}$ が存在する. 特に, $\mathfrak{a}_2$ は表 4 のように選ぶことができる. ただし, 表 4 の X_j, Y, Z_j は

$$\begin{aligned} X_j &:= E_{j+1,j+1} - E_{2n+2-j,2n+2-j}, \\ Y &:= E_{1,2n+2} + E_{2n+2,1}, \\ Z_j &:= E_{j, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + j} + E_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + j, j} - E_{2n+2-j, \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor - j} - E_{\lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor - j, 2n+2-j} \end{aligned}$$

で定義する.

5.3 Step 3

この節では, $M_1 := Z_{K_u}(A_1), M_2 := Z_{H_u}(A_2)$ として両側剰余空間 $K_u = M_1 A_3 M_2$ を満たす A_3 を構成しよう.

まず, 次の補題を用意する.

Case	$(K_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}})$	$\mathfrak{a}_2$	$\text{rank}_{\mathbb{R}} K_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$
1	$(GL(2n, \mathbb{C}), Sp(n, \mathbb{C}))$	$\mathbb{R}X_1 + \cdots + \mathbb{R}X_n$	n
2	$(Sp(1, \mathbb{C}) \times Sp(n, \mathbb{C}), SO(2, \mathbb{C}) \times Sp(n, \mathbb{C}))$	$\mathbb{R}Y$	1
3	$(SO(2n, \mathbb{C}), GL(n, \mathbb{C}))$	$\mathbb{R}Z_1 + \cdots + \mathbb{R}Z_{[\frac{n}{2}]}$	$[\frac{n}{2}]$

表 4: $A_2 = \exp \mathbb{R}\mathfrak{a}_2$

補題 5.2. コンパクト等質空間 K_u/M_1 は単位球面に微分同相である.

Proof. 各 4-対称対 $(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}})$ に対し, 中心化群 M_1 と M_2 は表 5 で与えられる. ただし, Case 3 にある ε は n が奇数のときに 1, 偶数のときは 0 とする.

Case	K_u	M_1	M_2
1	$U(2n)$	$U(2n-1)$	$SU(2)^n$
2	$Sp(1) \times Sp(n)$	$SU(2) \times Sp(n-1)$	$Sp(n)$
3	$SO(2n)$	$SO(2n-1)$	$SU(2)^{[\frac{n}{2}]} \times U(\varepsilon)$

表 5: 中心化群 M_1, M_2

この表 5 によって補題は明らかである. □

中心化群 M_2 は表 5 の右側で与えられる. 補題 5.2 および表 5 によって, 命題 4.5 の結果を適用することができる. 以下, 各 case ごとに A_3 を構成しよう.

命題 5.3. $K_u = M_1 A_3 M_2$ を満たす A_3 は

$$A_3 = \begin{cases} 1 \times (B_1 B_2 \cdots B_{n-1}) & \text{(Case 1)} \\ \{I_{2n+2}\} & \text{(Case 2)} \\ \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} g & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & & (g^{-1})^T \end{array} \right) : g \in B_1 B_2 \cdots B_{[\frac{n-1}{2}]} \right\} & \text{(Case 3)} \end{cases} \quad (5.3)$$

ただし, 各 $B_j \simeq SO(2)$ は (4.3) で定義したコンパクトリー群である (第 4.2 節参照).

この補題の証明は各 (K_u, M_1, M_2) について与える.

Proof in Case 1. $(K_u, M_1, M_2) = (1 \times U(2n), I_2 \times U(2n-1), 1 \times SU(2)^n)$ のとき, 次の自然な同一視を得る ((L, L_1, L_2) は (4.1) 参照).

$$M_1 \backslash K_u / M_2 \simeq (1 \times U(2n-1)) \backslash U(2n) / SU(2)^n = L_1 \backslash L / L_2. \quad (5.4)$$

命題 4.5 より, (4.4) で定義した $B = B_{n-1} B_{n-2} \cdots B_2 B_1$ を用いて $L = L_1 B^{-1} L_2$ が成り立つ. 全単射 (5.4) によって, $A_3 = 1 \times B^{-1}$ とすれば $K_u = M_1 A_3 M_2$ が成り立つ. □

Proof in Case 2. $(K_u, M_1, M_2) = (Sp(1) \times Sp(n), Sp(1) \times Sp(n-1), Sp(n))$ のとき, 次の積写像 $f : M_1 \times M_2 \rightarrow K_u$, $((g_1, g_2), h) \mapsto (g_1, g_2 h)$ は全射である. 実際に, 任意の $(g, h) \in K_u$ に対して $f((g, I_{2n-2}), h) = (g, h)$ となる. ゆえに, $K_u = M_1 M_2$ と表される. $\square$

Proof in Case 3. $(K_u, M_1, M_2) = (SO(2n), SO(2n-1), SU(2)^{[\frac{n}{2}]} \times U(\varepsilon))$ とする. K_u の閉部分群 $L = U(n)$ を次の包含写像

$$\iota : U(n) \hookrightarrow SO(2n), \quad g \mapsto \begin{pmatrix} g & & \\ & 1 & \\ & & (g^{-1})^T \end{pmatrix}$$

によって実現する. このとき, 包含写像 ι は M_2 -同変で自然に微分同相 $\iota : L/L_1 = U(n)/U(n-1) \simeq K_u/M_1 = SO(2n)/SO(2n-1)$ を誘導する. よって, (L, L_1, L_2) に対する命題 4.5 を用いると, $K_u = M_1 \iota(B) M_2$ を得る. 特に, $\iota(B) = A_3$ は (5.3) で与えられる. $\square$

以上より, (3.1) で与えた $A = A_1 A_3 A_2$ は $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ に対するカルタン分解 (1.1) を与える. これにより, 定理 1.1 は証明された.

6 定理 1.4 の証明

第 5 章で与えた $A = A_1 A_3 A_2$ を用いて, spherical な 4 対称空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ における G_u の作用が強可視的であることを証明することができる (定義は第 1 章参照).

Proof of 定理 1.4. (V.1)–(S.2) を満たす S および σ が存在することを示す.

まず, $S \subset G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ を次で定める:

$$S := AH_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}. \quad (6.1)$$

このとき, 定理 1.1 から $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}} = G_u \cdot S$ が成り立つ. よって, この S は (V.1) を満たす.

次に, 各 $(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}})$ に対して $G_{\mathbb{C}}$ 上の反正則対合的自己同型 σ を

$$\sigma(g) := \bar{g} \quad (6.2)$$

で定義する. このとき, $H_{\mathbb{C}}$ は σ -安定であり, よって $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ 上の反正則微分同相を誘導する (同じ記号 σ を用いる):

$$\sigma(gH_{\mathbb{C}}) = \bar{g}H_{\mathbb{C}} \quad (g \in G_{\mathbb{C}}).$$

A_1, A_2, A_3 の構成 (表 3, 4 および (5.3)) により, $\sigma|_A = \text{id}_A$ である. よって, $\sigma|_S = \text{id}_S$ となる. これで, (S.1) が確認できた.

最後に, 任意の $x \in G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ に対して $\sigma(x) \in G_u \cdot x$ であることを示そう. (V.1) に沿って $x = g \cdot s \in (g \in G_u, s \in S)$ と表すことができる. このとき,

$$\sigma(x) = \sigma(g)\sigma(s) = \sigma(g)s = \sigma(g)g^{-1} \cdot (g \cdot s) = \sigma(g)g^{-1} \cdot x. \quad (6.3)$$

σ は $G_{\mathbb{C}}$ のコンパクトな実型 G_u を保つので, $\sigma(g)g^{-1} \in G_u$. よって, (6.3) から $\sigma(x) = \sigma(g)g^{-1} \cdot x \in G_u \cdot x$. したがって, (S.2) が示された.

以上より, spherical な 4-対称空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ における G_u の作用は強可視的であることが証明された. $\square$

参考文献

- [1] M. Brion, Classification des espaces homogènes sphériques, *Compositio Math.* **63** (1987), 189–208.
- [2] M. Flensted-Jensen, Spherical functions of a real semisimple Lie group. A method of reduction to the complex case, *J. Funct. Anal.* **30** (1978), 106–146.
- [3] J. Jiménez, Riemannian 4-symmetric spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **306** (1988), 715–734.
- [4] T. Kobayashi, Geometry of multiplicity-free representations of $GL(n)$, visible actions on flag varieties, and triunity, *Acta. Appl. Math.* **81** (2004), 129–146.
- [5] T. Kobayashi, Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **41** (2005), 497–549, special issue commemorating the fortieth anniversary of the founding of RIMS.
- [6] T. Kobayashi, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $(U(n_1) \times U(n_2) \times U(n_3)) \backslash U(n) / (U(p) \times U(q))$, *J. Math. Soc. Japan* **59** (2007), 669–691.
- [7] T. Kobayashi, Visible actions on symmetric spaces, *Transform. Groups* **12** (2007), 671–694.
- [8] T. Kobayashi, Propagation of multiplicity-free property for holomorphic vector bundles, *preprint*, arXiv: math.RT/0607004.
- [9] M. Krämer, Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen, *Composito Math.* **38** (1979), 129–153.
- [10] A. Sasaki, Visible actions on irreducible multiplicity-free spaces, *Int. Math. Res. Not.* **18** (2009) 3445–3466.
- [11] A. Sasaki, A characterization of non-tube type Hermitian symmetric spaces by visible actions, *Geom. Dedicata* **145** (2010), 151–158.
- [12] A. Sasaki, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $SU(2n+1) \backslash SL(2n+1, \mathbb{C}) / Sp(n, \mathbb{C})$, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **17** (2010), 201–215.
- [13] A. Sasaki, Visible actions on reducible multiplicity-free spaces, *Int. Math. Res. Not.* (2011), 885–929.

- [14] A. Sasaki, Visible actions on the non-symmetric homogeneous space $SO(8, \mathbb{C})/G_2(\mathbb{C})$, *Adv. Pure Appl. Math.* **2** (2011), 437–450.
- [15] É. Vinberg, B. Kimelfeld, Homogeneous domains on flag manifolds and spherical subgroups of semisimple Lie groups, *Funct. Anal. Appl.* **12** (1978), 168–174.