ツイスターリフトが調和切断となる自己双対アインシュタイン多様体内の種数0の曲面について

長谷川和志 (金沢大学人間社会研究域)

1　序.

偶数次元の球面内の極小曲面の研究にはツイスター空間への写像（ツイスターリフト）は重要な役割をもつ．例えば，Calabi は [5] において，球面内の充満な種数 0 の極小曲面は超極小であること，すなわち，水平なツイスターリフトを持つことを示した．また，Bryant は [6] において，任意の向き付けられたコンパクトな曲面が S^4 への超極小はめ込みを許容することを示した．現在では，ツイスターリフトやそれを用いた曲面の研究は極小曲面に限らず，また, 外空間が複素射影空間や他の空間の場合にも研究が行われている．特に，外空間が 4 次元の場合に多くの研究がある．

また，Friedrich は [10] において，[6] の結果をふまえ，一般の向き付けられた 4 次元リーマン多様体内の向き付けられた曲面に対して，超極小曲面より一般な概念となるツイスター正則な曲面とよばれるものを定義した．その後，このような曲面に対しても，多くの研究が行われている．

筆者は，[11]，[12]，[13] において，ツイスターリフトが調和切断となる曲面について研究を行った．外空間が自己双対アインシュタイン多様体の場合は，ツイスター正則な曲面のツイスターリフトは調和切断となっている．つまり，この場合，ツイスターリフトが調和切断となる曲面は，ツイスター正則な曲面の一般化と考えることもできる．また，[7] や [18] においては，このような曲面が可積分系の観点から研究されている．

本稿では，外空間が自己双対アインシュタイン多様体の場合に，ツイスターリフトが調和切断となる種数 0 の曲面について得られた結果を報告する．

2　ツイスター空間とツイスターリフト.

まず，ツイスター空間等の定義を述べる．$(\tilde{M},\tilde{g})$ を向き付けられた 4 次元リーマン多様体とし，$\tilde{M}$ 上の反自己双対な 2 次微分形式のベクトル束を $\Lambda^2_-(\tilde{M})$ とする．

その単位球面束 $\mathcal{Z}$ は $\tilde{M}$ のツイスター空間とよばれる．以下，一般に，$U(E)$ はリーマンベクトル束 E の単位球面束を表すこととする．$\Lambda^2_-(\tilde{M}) \cong Q \subset \mathrm{End}T\tilde{M}$ と同一視すると，$U(Q)(\cong \mathcal{Z})$ の各 $x \in \tilde{M}$ のファイバーは，$x \in \tilde{M}$ において計量を保つ $\phi \in \mathrm{End}(T_x\tilde{M})$ で，$\phi^2 = -\mathrm{id}$, $d\mathrm{Vol}_x = -\Omega_\phi \wedge \Omega_\phi$ を満たすものの全体となる ($\Omega_\phi := \tilde{g}(\phi(\ \cdot\ ),\ \cdot\ )$)．ツイスター空間 $\mathcal{Z}$ には，この同一視のもと，以下のように概複素構造 $J^{\mathcal{Z}}$ が定義される．$\tilde{M}$ の Levi-Civita 接続から誘導される $Q(\cong \Lambda^2_-(\tilde{M}))$ の接続の接続写像 K と射影 $p : \mathcal{Z} \to \tilde{M}$ から，$\mathcal{Z}$ の接束 $T\mathcal{Z}$ の分解 $T\mathcal{Z} = T^h\mathcal{Z} \oplus T^v\mathcal{Z}$ が得られる．ここで，$T^h\mathcal{Z} = \ker K, T^v\mathcal{Z} = \ker p_*$ である．$J^{\mathcal{Z}}$ を，各 $\phi \in \mathcal{Z}$ において，$X \in T^h_\phi\mathcal{Z}$ に対して，$J^{\mathcal{Z}}(X) = (\phi(p_*(X)))^h_\phi$，$X \in T^v_\phi\mathcal{Z}$ に対して，$J^{\mathcal{Z}}(X) = J^v(X)$ と定義する．ここで，Y^h は $Y \in T\tilde{M}$ の水平リフトで，J^v は各 fiber($\cong S^2$) の標準的な複素構造である．この $J^{\mathcal{Z}}$ の積分可能性は，$\tilde{g}$ の共形構造と関連している．ワイルの共形曲率テンソル W は，$\tilde{g}$ を用いて，2 次微分形式のベクトル束 $\Lambda^2(\tilde{M})$ の変換とみれる (これも W であらわす)．W の自己双対成分および反自己双対成分をそれぞれ W^+, W^- とするとき，$W^- = 0$ (resp. $W^+ = 0$) をみたすならば，$\tilde{g}$ は自己双対 (resp. 反自己双対) とよばれる (この (反) 自己双対性は共形不変な性質なので，正確には, 共形類 $[\tilde{g}]$ が (反) 自己双対というべきである). よく知られている様に，$J^{\mathcal{Z}}$ が積分可能であることと $\tilde{g}$ が自己双対であることは必要十分である ([2]).

注 1. 本稿では，自己双対アインシュタイン多様体 $\tilde{M}$ 内の曲面を考える．筆者の知る限り，現在でも自己双対アインシュタイン多様体の分類はされていないと思われるが，コンパクトでスカラー曲率が非負なのもは決定されている ([3]).

次に，ツイスターリフトの定義を述べる．$(\tilde{M}, \tilde{g})$ を向き付けられた 4 次元リーマン多様体とし，(M, g) を向き付けられた曲面とする．$f : (M, g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ を等長はめ込みとする．各 $x \in M$ において，$\tilde{M}$ の向きに適合した $T_{f(x)}\tilde{M}$ の正規直交基底 e_1, e_2, e_3, e_4 で，$e_1, e_2 \in T_xM$ は M の向きに適合し，かつ $e_3, e_4 \in T^\perp_xM$ であるものを取り，$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ をその双対基底とする．$\Lambda^2_-(\tilde{M})$ の f による引き戻し束 $f^\#\Lambda^2_-(\tilde{M})$ の単位球面束の切断 $\tilde{J}$ を

$$\tilde{J}(x) = \omega_1 \wedge \omega_2 - \omega_3 \wedge \omega_4$$

と定める．この $\tilde{J} \in \Gamma(U(f^\#\Lambda^2_-(\tilde{M})))$ を M のツイスターリフトという．ツイスターリフト $\tilde{J}$ が水平写像，すなわち，$\tilde{\nabla}\tilde{J} = 0$ であるとき，曲面 M は超極小とよばれる. ここで, $\tilde{\nabla}$ は $\tilde{M}$ のレビ･チビタ接続から $f^\#(\Lambda^2_-(\tilde{M}))$ に誘導される接続を表す. また，J を M の複素構造としたとき，$(f_\# \circ \tilde{J})_* \circ J = J^{\mathcal{Z}} \circ (f_\# \circ \tilde{J})_*$ を満たすならば，曲面はツイスター正則とよばれる．ここで，$f_\# : f^\#\Lambda^2_-(\tilde{M}) \to \Lambda^2_-(\tilde{M})$ は束写像を表す. $J^\perp$ を上で述べたような e_3, e_4 に対して，$J^\perp(e_3) = -e_4, J^\perp(e_4) = e_3$ と定める．α を曲面の第二基本形式とし，β を X，$Y \in TM$ に対して

$$\beta(X, Y) = \alpha(X, JY) - J^\perp\alpha(X, Y) + J^\perp\alpha(JX, JY) + \alpha(JX, Y)$$

と定める．このとき，曲面 M がツイスター正則であることと $\beta = 0$ を満たすことは同値である．なお，M が超極小であることは

$$\alpha(X, JY) - J^{\perp}\alpha(X, Y) = 0$$

を満たすことと同値なので，極小かつツイスター正則であること超極小であることは同値であることも分かる．

3　ツイスターリフトが調和切断となる曲面.

(N, h) をコンパクトな n 次元リーマン多様体，E を h^E をファイバー計量とする (N, h) 上のリーマンベクトル束とする．∇^E を h^E と適合した接続とし，∇^E の接続写像を $K^E : TE \to E$ とする．E 上の計量 G を, $\eta \in TE$ に対して，

$$G(\eta, \eta) = h(p_*(\eta), p_*(\eta)) + h^E(K^E(\eta), K^E(\eta))$$

と定める．ここで，$p : E \to N$ は射影である．この G は E の標準計量とよばれる (特に，$E = TN$ のときは佐々木計量と呼ばれている)．単位球面束 $U(E)$ に G の誘導計量を与える．$U(E)$ の切断全体の集合を $\Gamma(U(E))$ と表す．$\xi \in \Gamma(U(E))$ の上記の計量に関するエネルギー $\mathcal{E}(\xi)$ は

$$\mathcal{E}(\xi) = \frac{n}{2}\mathrm{Vol}(M) + \frac{1}{2}\int_M \|\nabla^E \xi\|^2 dv_g$$

で与えられる．切断 $\xi \in \Gamma(U(E))$ が任意の滑らかな変分 $\xi_t \in \Gamma(U(E))$ $(\xi_0 = \xi)$ に対して

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(\xi_t)\Big|_{t=0} = 0$$

を満たすとき $\xi \in \Gamma(U(E))$ は調和切断 (harmonic section) と呼ばれる (特に，$E = TN$ のとき, 調和ベクトル場とよばれ，奇数次元単位球面の Hopf ベクトル場はその典型例である).

補題 2.　切断 $\xi \in \Gamma(U(E))$ が調和切断であることの必要十分条件は $\triangle^E \xi = \|\nabla^E \xi\|^2 \xi$ を満たすことである. ここで，$\triangle^E$ は ∇^E の疎ラプラシアンである．

次に，記号をいくつか用意しておく．$\delta\beta$ を，$X \in TM$ に対して，

$$(\delta\beta)(X) = -\sum_{i=1}^{2}(\nabla'_{u_i}\beta)(u_i, X)$$

と定める．ここで，u_1, u_2 は M の正規直交枠，$\nabla'\beta$ は β の共変微分を表す. また，H を曲面の平均曲率ベクトル場，$\nabla^{\perp}$ を法接続とする．補題 2 等を用いて，[12] において，次を示した．

定理 3. 自己双対アインシュタイン多様体内のコンパクトな曲面 M について，次の 3 条件は互いに同値である：
(1) M のツイスターリフト $\tilde{J}$ が調和切断,
(2) 任意の $X \in TM$ に対して $\nabla^{\perp}_{JX}H = J^{\perp}\nabla^{\perp}_{X}H$ が成立,
(3) $\delta\beta = 0$ が成立.

したがって，特に，$\tilde{M}$ が自己双対アインシュタイン多様体のとき，$\nabla^{\perp}H = 0$ を満たす曲面やツイスター正則な曲面のツイスターリフトは調和切断である．

4 種数が 0 の場合.

τ を自己双対アインシュタイン多様体 $\tilde{M}$ のスカラー曲率, $\chi(T^{\perp}M)$ を法束のオイラー数とする．[13] で，次を示した.

定理 4. M を自己双対アインシュタイン多様体 $\tilde{M}$ 内の向き付けられたコンパクトな曲面とする. M の種数が 0 かつツイスターリフト $\tilde{J}$ が調和切断ならば,
(1) $\chi(T^{\perp}M) > 2 - \frac{\tau}{24\pi}\mathrm{Vol}(M)$ のとき，M は超極小ではない極小曲面.
(2) $\chi(T^{\perp}M) = 2 - \frac{\tau}{24\pi}\mathrm{Vol}(M)$ のとき，M は超極小曲面.
(3) $\chi(T^{\perp}M) < 2 - \frac{\tau}{24\pi}\mathrm{Vol}(M)$ のとき，M は超極小曲面ではないツイスター正則な曲面.

証明: (x, y) を M の等温座標系とし，$z := x + \sqrt{-1}y$ とおく．また，$\partial_z := \frac{\partial}{\partial z}$, $\partial_{\bar{z}} := \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ とおく．まず，$\tilde{J}$ が調和切断より，

$$[\tilde{J}, \tilde{\nabla}_{\partial_z}\tilde{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}\tilde{J} + \tilde{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}\tilde{\nabla}_{\partial_z}\tilde{J}] = 0$$

が成立することがわかる．一方，$\tilde{M}$ が自己双対アインシュタイン多様体であることから

$$[\tilde{J}, \tilde{\nabla}_{\partial_z}\tilde{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}\tilde{J} - \tilde{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}\tilde{\nabla}_{\partial_z}\tilde{J}] = 0$$

となる．よって，

$$[\tilde{J}, \tilde{\nabla}_{\partial_z}\tilde{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}\tilde{J}] = [\tilde{J}, \tilde{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}\tilde{\nabla}_{\partial_z}\tilde{J}] = 0$$

が得られる．主張の証明は，正則 2 次微分を定義し，種数が 0 であることからそれが消えることでなされる．ここで，

$$q := \mathrm{tr}(\tilde{\nabla}_{\partial_z}\tilde{J})^2 dz^2$$

とする．これが，上式を用いて，正則であることが示せる．実際，

$$\partial_{\bar{z}}\mathrm{tr}(\tilde{\nabla}_{\partial_z}\tilde{J})^2 = 2\mathrm{tr}(\tilde{\nabla}_{\partial_z}\tilde{J})(\tilde{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}\tilde{\nabla}_{\partial_z}\tilde{J})$$

であり，一方，

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\tilde{\nabla}_{\partial_z}\tilde{J})(\tilde{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}\tilde{\nabla}_{\partial_z}\tilde{J}) &= \mathrm{tr}(-\tilde{J})(\tilde{\nabla}_{\partial_z}\tilde{J})(\tilde{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}\tilde{\nabla}_{\partial_z}\tilde{J})(\tilde{J}) \\ &= \mathrm{tr}(\tilde{\nabla}_{\partial_z}\tilde{J})(\tilde{J})^2(\tilde{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}\tilde{\nabla}_{\partial_z}\tilde{J}) \\ &= -\mathrm{tr}(\tilde{\nabla}_{\partial_z}\tilde{J})(\tilde{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}\tilde{\nabla}_{\partial_z}\tilde{J})\end{aligned}$$

となる．ゆえに，$\partial_{\bar{z}}\mathrm{tr}(\tilde{\nabla}_{\partial_z}\tilde{J})^2 = 2\mathrm{tr}(\tilde{\nabla}_{\partial_z}\tilde{J})(\tilde{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}\tilde{\nabla}_{\partial_z}\tilde{J}) = 0$ が成立する．よって，q は正則であり，M の種数は 0 なので，$q = 0$ となる．$q = 0$ より，M の各点 x において，$H_x = 0$ または $\beta_x = 0$ となる．さらに，$\tilde{J}$ が調和切断のとき，M 上で $H = 0$ であるか，または $\{x \in M \mid H_x = 0\}$ は内点をもたないので，$H = 0$ または $\beta = 0$ となることが分かる．残るは，法束のオイラー数に応じて，主張が得られることを見ることになる．まず，一般に，

$$\|\beta\|^2 = 16\left(\frac{\tau}{12} + \|H\|^2 - \mathcal{K} + \mathcal{K}^{\perp}\right)$$

が成立することに注意する ([11] 等).

$$A := \chi(T^{\perp}M) - 2 + \frac{\tau}{24\pi}\mathrm{Vol}(M)$$

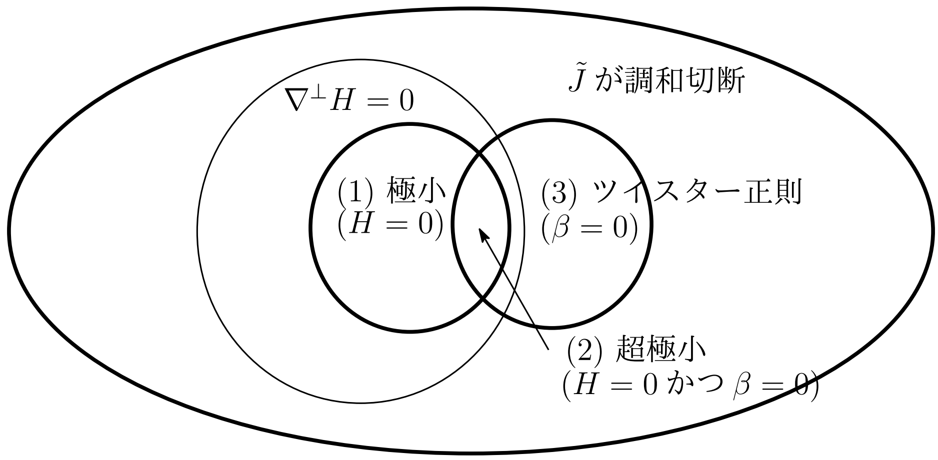
とおく．このとき，

$$\int_M \|\beta\|^2 dV\mathrm{ol} = 32\pi \int (A + \frac{1}{2\pi}\int_M \|H\|^2) d\mathrm{Vol}$$

が成立する．例えば，(2) の場合，$A = 0$ であるので, $H = 0$ かつ $\beta = 0$，すなわち M は超極小である．他の場合も，$H = 0$ または $\beta = 0$ であることから，結果を得ることができる．

証明終

この定理の状況を，おおよそ図で表すと以下のようになる．



注 5.　種数 1 の曲面で，ツイスターリフトが調和切断であり，平均曲率が平行ではなくツイスター正則でもないものが存在する ([8]).

特に，$\tilde{M}$ が超ケーラー多様体の場合，以下を得る.

系 6. M を超ケーラー多様体 $\tilde{M}$ 内の向き付けられたコンパクトな曲面とする. M の種数が 0 かつツイスターリフト $\tilde{J}$ が調和切断ならば,
(1) $\chi(T^{\perp}M) \geq 4$ のとき，M は超極小ではない極小曲面.
(2) $\chi(T^{\perp}M) = 2$ のとき，M は超極小曲面.
(3) $\chi(T^{\perp}M) \leq 0$ のとき，M は超極小曲面ではないツイスター正則な曲面.

注 7.　$\tilde{M}$ が超ケーラー多様体のとき，$\chi(T^{\perp}M)$ は偶数である.

定理 3 より, $\nabla^{\perp}H = 0$ を満たすとき，ツイスターリフトは調和切断となる．したがって，定理 4 より，次を得る.

系 8. ([17] 等) M を 4 次元実空間形内の向き付けられたコンパクトな曲面とする．このとき，M の種数が 0 で $\nabla^{\perp}H = 0$ ならば，M は全臍的か S^4 内の超極小曲面である.

また，$\tilde{J}$ が調和写像ならば，調和切断となるので，次も得られる.

系 9. ([8], [9]) M を複素 2 次元複素空間形内の，向き付けられたコンパクトな種数 0 の Lagrangian 曲面とする．$\tilde{J}$ が調和写像ならば，M はツイスター正則な曲面である.

5　$\tilde{M} = \mathbf{R}^4$ の場合についての考察.

$\tilde{M} = \mathbf{R}^4$ の場合に関する考察をしておく．Hopf による，$\mathbf{R}^3$ 内の種数 0 の平均曲率一定曲面は全臍的なものに限るという結果はよく知られている．また，[17] では，平均曲率一定の条件を平均曲率ベクトル場が法接続に関して平行であるという条件に置き換え，種数 0 の $\mathbf{R}^4$ 内の曲面に関して同様な結果を得ている (系 8 はその拡張となっている)．主定理である定理 4 では，ツイスターリフトが調和切断であるという仮定の下で主張を得ているが，定理 3 によれば，その仮定は平均曲率ベクトル場が (2) 式を満たすことと同値であり，平行性よりも弱い仮定である.

$G_o^{4,2}$ をユークリッド空間 $\mathbf{R}^4$ 内の向き付られた 2 次元部分空間全体の成すグラスマン多様体とする．$\mathbf{R}^4$ の自己双対および反自己双対 2 次形式の成す空間はともに 3 次元であり，その中の単位球面をそれぞれ S^2_+, S^2_- とすると，同型 $G_o^{4,2} \cong S^2_+ \times S^2_-$ が成立する．一方で，$\mathbf{R}^4$ のツイスター空間 $\mathcal{Z}$ は $\mathbf{R}^4 \times S^2_-$ である．$p_\pm : G_o^{4,2}(\cong S^2_+ \times S^2_-) \to S^2_\pm$，$\hat{p} : \mathcal{Z}(= \mathbf{R}^4 \times S^2_-) \to S^2_-$ をともに射影とし，$\varphi : M \to G_o^{4,2}$ を M のガウス写像とすると，

$$(\hat{p} \circ f_\# \circ \tilde{J} =)\hat{p} \circ \tilde{J} = p_- \circ \varphi$$

が成立する．

$$\begin{tikzcd}
& G_o^{4,2} \arrow[dr, "p_-"] & \\
M \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\tilde{J}"'] & \mathbf{R}^4 & S^2_- \\
& \mathcal{Z} \arrow[ur, "\hat{p}"'] &
\end{tikzcd}$$

これより，M のツイスターリフトが調和切断であることと，$p_- \circ \varphi$ が調和写像であること，すなわち，ガウス写像の "S^2_--成分" が調和写像であることが同値となることが分かる．[19] によれば，ガウス写像が調和写像であることと，平均曲率ベクトル場が法接続に関して平行であることが同値なので，[17] における結果は，"ガウス写像が調和写像となる $\mathbf{R}^4$ 内の種数 0 の曲面は全臍的である" と言い換えることができる．つまり，$\tilde{M} = \mathbf{R}^4$ の場合には，主定理により，ガウス写像の調和性を "半分" 緩めることで，種数 0 の曲面は，全臍的なものからツイスター正則なものに増えることが分かる．なお，$\mathbf{R}^4$ 内の種数 0 のツイスター正則な曲面は，少なくとも可算無限個存在する．このことは，以下のように分かる．まず，S^4 のツイスター空間は $\mathbf{C}P^3$ であることに注意する．各非負整数 l につき，

$$t : S^2 \to \mathbf{C}P^3$$

を $S^2 \cong \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ のもとで，

$$t(z) = [1 : (1 - \frac{l}{2})z^l : z : \frac{l}{2}z^{l-1}]$$

と定義すると．$p \circ t$ は S^4 内の超極小はめ込みとなる ([10])．ここで，$p : \mathbf{C}P^3 \to S^4$ はツイスター空間から底空間への束射影．ツイスター正則性は，外空間の共形変換で不変なので，これらの超極小曲面を立体射影で $\mathbf{R}^4$ に写せば，それらはツイスター正則曲面である (当然，極小性は保たれない)．また，上の l が異なれば，得られる曲面は合同ではないので，$\mathbf{R}^4$ 内の可算無限個のツイスター正則な曲面が得られる．

6　補足.

最後に，本研究の一般化や関連する話題について，列挙しておく.

(1)　四元数正則幾何学：四元数正則幾何学の理論では，$\mathbf{R}^4$ 内の曲面の研究において，$\mathbf{R}^4 \cong \mathbf{H}$ とみて，$\mathbf{H}$ の四元数構造を使い，“左 (右) 法ベクトル場” を定義し，議論を進めている ([4], [16] 等)．この左法ベクトル場は，ツイスターリフトと同一視ができる．前節の $\hat{p} \circ \tilde{J}$ がその対応物である．すなわち，4 次元多様体内の曲面に対するツイスターリフトを用いた研究は，この理論の一つの一般化とみることができる．また，この四元数正則幾何学の理論の一部は，高次元化も試みられている ([20]).

(2)　四元数ケーラー多様体内の (概) 複素部分多様体：外の空間が四元数ケーラー多様体の場合にも，ツイスター空間が定義できる．この中で部分多様体を考えると，ツイスターリフトに相当するものが定義できる場合がある．これは，[1] 等では，natural lift とよび研究されている.

(3)　擬リーマン版：[15] では，指数 2 の 4 次元擬リーマン多様体内のローレンツ曲面を研究している．向き付けられた指数 2 の 4 次元擬リーマン多様体上の $*$-作用素は，2 次微分形式に対しては，$*^2 = \mathrm{id}$ を満たす．したがって，ツイスター空間に相当する空間もほぼ同様に定義できリフレクター空間と呼ばれている．このような擬リーマン多様体内のローレンツ曲面に対しては，ツイスターリフトに相当するリフレクターリフトとよばれているものも定義できる．さらに，超極小曲面等の諸概念も正定値の場合と同様に定義できるが，正定値の場合に対応するものがないような例もあり，この設定での研究も興味深いと筆者は考えている ([14]).

参考文献

[1] D. Alekseevsky and S. Marchiafava, A twistor construction of Kahler submanifolds of a quaternionic Kahler manifold, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 184 (2005), 53-74.

[2] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin and I. M. Singer, Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry, Proc. R. Soc. London Ser. A 362 (1978), 425-461.

[3] A. L. Besse, Einstein manifolds, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, Berlin, 1987

[4] F. Burstall, D. Ferus, K. Leschke, F. Pedit and U. Pinkall, Conformal geometry of surfaces in S^4 and quaternions, Lecture Notes in Mathematics, 1772. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[5] E. Calabi, Minimal immersions of surfaces in Euclidean spheres, J. Differential Geometry 1 (1967), 111–125.

[6] R. L. Bryant, Conformal and minimal immersions of compact surfaces into 4-sphere, J. Diff. Geom. 17 (1982), 455-473.

[7] F. Burstall and I. Khemar, Twistors, 4-symmetric spaces and integrable systems, Math Ann. 344 (2009), 451-461.

[8] I. Castro and F. Urbano, Lagrangian surfaces in the complex Euclidean plane with conformal Maslov form, Tohoku Math. J. (2) 45 (1993), 565-582.

[9] I. Castro and F. Urbano, Twistor holomorphic Lagrangian surfaces in the complex projective and hyperbolic planes, Ann. Global Anal. Geom. 13 (1995), 59-67.

[10] T. Friedrich, On surfaces in four-spaces, Ann. Glob. Anal. Geom., 2 (1984), 275-287.

[11] K. Hasegawa, On surfaces whose twistor lifts are harmonic sections, J. Geom. Phys. 57 (2007), 1549-1566

[12] K. Hasegawa, Stability of twistor lifts for surfaces in four-dimensional manifolds as harmonic sections, J. Geom. Phys. 59 (2009), 1326-1338.

[13] K. Hasegawa, Surfaces in four-dimensional hyperkähler manifolds whose twistor lifts are harmonic sections, Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011), 309-317.

[14] K. Hasegawa, A Lorentzian surface in a four-dimensional manifold of neutral signature and its reflector lift, Journal of Geometry and Symmetry in Physics, 26 (2012), 71-83.

[15] G. Jensen and M. Rigoli, Neutral surfaces in neutral four-spaces. Matematiche (Catania) 45 (1990), 407-443.

[16] K. Moriya, Super-conformal surfaces associated with null complex holomorphic curves, Bull. Lond. Math. Soc. 41 (2009), 327-331.

[17] D. Hoffman, Surfaces in constant curvature manifolds with parallel mean curvature vector field, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972), 247-250.

[18] I. Khemar, Geometric interpretation of second elliptic integrable system, Differ. Geom. Appl., Differ. Geom. Appl. 28 (2010), 40-64

[19] E. Ruh and J. Vilms, The tension field of the Gauss map, Trans. Amer. Math. Soc. 149 (1970) 569-573.

[20] 塚田和美, 四元数射影空間の全複素部分多様体に関する四元数微分幾何，研究集会「部分多様体とリー群作用 2011」報告集, 74-83.