

リー群上の左不変計量と対応する部分多様体について*

橋永貴弘^{† ‡} (広島大学大学院理学研究科 D2)

概要

リー群上の左不変計量のなす空間を考えることで、左不変計量に対応する部分多様体が定義される。本稿の背景にある問題意識は、“良い”左不変計量に対して、それらに対応する部分多様体の(部分多様体としての)性質で特徴付けることはできるか? というものである。本稿では、低次元単連結可解リー群上の solvsoliton に対応する部分多様体について調べ、得られた結果について紹介する。

1 導入

リー群上の左不変計量は、Einstein 計量やその一般化である Ricci soliton などの興味深いリーマン計量の具体例を供給してきた。このことから上記のような左不変リーマン構造を許容するリー群は興味深い研究対象であろう。他方、リー群上の左不変計量のモジュライ空間を考えることで、左不変計量に対応する部分多様体が定義される。我々は、上記のような左不変計量の性質に対応する部分多様体の観点から捉えることができるかどうか? という問題に興味を持っている。

はじめに左不変計量に対応する部分多様体について紹介する。 n 次元リー群上の左不変計量のなす空間を $\widetilde{\mathfrak{m}}$ で表す。 $\widetilde{\mathfrak{m}}$ は自然にそのリー代数 $\mathfrak{g}$ 上の内積のなす空間と同一視され、 $GL_n(\mathbb{R})/O(n)$ という等質空間表示を持つ:

$$\widetilde{\mathfrak{m}} = \{\mathfrak{g} \text{ 上の内積} \} \cong GL_n(\mathbb{R})/O(n)$$

また、 $GL_n(\mathbb{R})/O(n)$ には自然な $GL_n(\mathbb{R})$ -不変な計量が入り、これによって非コンパクト対称空間となる。この内積のなす空間 $\widetilde{\mathfrak{m}}$ に“スカラー倍を除いて等長的”という同値関係をいれることで、左不変計量(内積)に対応する部分多様体が定義される。

定義 1.1. リー代数 $\mathfrak{g}$ 上の 2 つの内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ と $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ がスカラー倍を除いて等長的であるとは、 $\mathfrak{g}$ の自己同型写像 $\varphi \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ と $c > 0$ が存在して、任意の $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して $\langle X, Y \rangle_1 = c \langle \varphi X, \varphi Y \rangle_2$ を満たすときをいう。

この同値関係による同値類を $[\cdot]$ で表す。また、 $\mathbb{R}^\times$ を $\mathfrak{g}$ 上の 0 でないスカラー写像のなす群とする。

*部分多様体幾何とリー群作用 2012 (於 東京理科大学, 9 月 3 日 ~ 4 日) 記録集原稿。

[†]E-mail : hashinaga@hiroshima-u.ac.jp.

[‡]本研究は特別研究員奨励費(課題番号: 23・5284)の助成を受けたものである。

命題 1.2 (Kodama-Takahara-Tamaru [6]). リー代数 $\mathfrak{g}$ を n 次元とする. このとき, $\mathfrak{g}$ 上の各内積 $\langle, \rangle$ の同値類 $[\langle, \rangle]$ は, $GL_n(\mathbb{R})/O(n)$ 内の $\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g})$ 等質な部分多様体となる:

$$[\langle, \rangle] = \mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g}) \cdot \langle, \rangle \subset GL_n(\mathbb{R})/O(n).$$

定義 1.3. リー代数 $\mathfrak{g}$ 上の各内積 $\langle, \rangle$ に対して, その同値類 $[\langle, \rangle]$ を 対応する部分多様体と呼ぶ.

注意 1.4. 内積 $\langle, \rangle_1$ と $\langle, \rangle_2$ がスカラー倍を除いて等長的ならば, 対応する単連結リー群に, $\langle, \rangle_1, \langle, \rangle_2$ それぞれに対応する左不変計量を入れた空間は, リーマン多様体としてスカラー倍を除いて等長的である.

左不変計量が Einstein あるいは Ricci soliton であることはスカラー倍を除いて等長的という同値関係で不変であることから, 対応する部分多様体の性質と見なすことができる. このことから次の問題に興味を持っている.

問題 1.5. 左不変計量の性質を対応する部分多様体の性質で特徴付けることはできるか?

本稿では, 可解 (冪零) リー代数上の solvsoliton (nilsoliton) に対応する部分多様体の性質, 特に極小性について得られた結果を紹介する.

2 $\widetilde{\mathfrak{m}}$ の計量について

$GL_n(\mathbb{R})/O(n)$ 上の自然な $GL_n(\mathbb{R})$ -不変なリーマン計量について簡単に述べる. 一般に等質空間 G/K が reductive であるとき, つまり $\mathfrak{g}$ の Ad_K -不変な部分空間 $\mathfrak{m}$ で $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ を満たすものが存在するとき, G/K 上の G -不変なリーマン計量と $\mathfrak{m}$ 上の Ad_K -不変な内積は一対一に対応することが知られている. $GL_n(\mathbb{R})/O(n)$ は $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{o}(n) \oplus \text{sym}(n)$, ただし

$$\text{sym}(n) := \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid X = {}^t X\}$$

により, reductive である. また, この $\text{sym}(n)$ 上の内積を

$$\langle X, Y \rangle := \text{tr}(XY) \quad (X, Y \in \text{sym}(n))$$

で定めると, これは $\text{Ad}_{O(n)}$ -不変な内積となる. この内積に対応する $GL_n(\mathbb{R})$ -不変な計量を自然な $GL_n(\mathbb{R})$ -不変な計量と呼ぶ. 本稿では, $GL_n(\mathbb{R})/O(n)$ のリーマン計量はこの自然な $GL_n(\mathbb{R})$ -不変な計量のみを考えるものとする.

3 solvsoliton

本稿では, 次で定義される可解リー代数上の solvsoliton を考える.

定義 3.1. 可解リー代数 $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle, \rangle$ はその Ricci 作用素 $\text{Ric}_{\langle, \rangle}$ が次を満たすとき solvsoliton という: ある $c \in \mathbb{R}$ と, $D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$ が存在して

$$\text{Ric}_{\langle, \rangle} = cI + D. \quad (1)$$

ただし I は恒等写像, $\text{Der}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の微分代数である. また, 冪零リー代数上の内積が (1) を満たすとき nilsoliton という.

左不変計量 (内積) が solvsoliton であるという性質はスカラー倍を除いて等長的という同値関係で不変である. したがって, solvsoliton は対応する部分多様体の性質とみなすことができることに注意しておく. ここでは知られているいくつかの結果を紹介する. まず solvsoliton と Ricci soliton の関係について簡単に紹介する. G 上の左不変計量 g は, その Ricci テンソル ric_g が次を満たすとき左不変 Ricci soliton であるという: ある $c \in \mathbb{R}$ と完備なベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(G)$ が存在して,

$$\text{ric}_g = cg + L_X g.$$

ここで L_X はリー微分である.

命題 3.2 (Lauret [12]). G を単連結可解リー群, g をその上の左不変計量とする. また, $\mathfrak{g}$ を G のリー代数, $\langle, \rangle$ を g と同一視される $\mathfrak{g}$ 上の内積とする. このとき次が成り立つ:

1. $\langle, \rangle$ が solvsoliton ならば g は左不変 Ricci soliton.
2. $\mathfrak{g}$ が完全可解のとき, 逆が成り立つ: g が左不変 Ricci soliton ならば $\langle, \rangle$ は solvsoliton.

ここで可解リー代数 $\mathfrak{g}$ が完全可解であるとは, 任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して, ad_X の固有値がすべて実数であるときをいう.

命題 3.3 (Lauret [12]). スカラー倍および等長的を除くと solvsoliton は高々 1 つである.

このことから solvsoliton に対応する部分多様体も当然, 高々 1 つである.

また, 分類問題に関して, 4 次元以下の可解リー代数上の solvsoliton や, 7 次元以下の冪零リー代数上の nilsoliton については解決している ([12], [15], [1]). 特に 6 次元以下のすべての冪零リー代数は nilsoliton を許容することが知られている.

ここでは 4 次元の分類結果を紹介する.

命題 3.4 ([12], [15]). solvsoliton (nilsoliton) を許容する 4 次元可解 (冪零) リー代数は, 以下のいずれかと同型である:

Name	Nonzero commutation relations	
$\mathfrak{n}_4$	$[e_0, e_1] = e_2, [e_0, e_2] = e_3$	Nilpotent
$\mathfrak{r}_{4,\mu,\lambda}$	$[e_0, e_1] = e_1, [e_0, e_2] = \mu e_2, [e_0, e_3] = \lambda e_3$ $(-1 < \mu \leq \lambda) \text{ or } (-1 = \mu \leq \lambda < 0)$	Solvable
$\mathfrak{r}'_{4,\mu,\lambda}$	$[e_0, e_1] = \mu e_1, [e_0, e_2] = \lambda e_2 - e_3, [e_0, e_3] = e_2 + \lambda e_3$ $(0 < \mu)$	Solvable
$\mathfrak{s}_4$	$[e_0, e_1] = e_1, [e_0, e_2] = -e_2, [e_1, e_2] = e_3$	Solvable
$\mathfrak{s}_{4,\lambda}$	$[e_0, e_1] = \lambda e_1, [e_0, e_2] = (1 - \lambda)e_2, [e_0, e_3] = e_3,$ $[e_1, e_2] = e_3 \quad (\frac{1}{2} \leq \lambda)$	Solvable
$\mathfrak{s}'_{4,\lambda}$	$[e_0, e_1] = \lambda e_1 - e_2, [e_0, e_2] = e_1 + \lambda e_2, [e_0, e_3] = 2\lambda e_3,$ $[e_1, e_2] = e_3 \quad (0 < \lambda)$	Solvable
$\mathbb{R} \times \mathfrak{h}_3$	$[e_1, e_2] = e_3$	Nilpotent
$\mathbb{R} \times \mathfrak{r}_{3,\lambda}$	$[e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = \lambda e_3 \quad (-1 \leq \lambda \leq 1)$	Solvable
$\mathbb{R} \times \mathfrak{r}'_{3,\lambda}$	$[e_1, e_2] = \lambda e_2 - e_3, [e_1, e_3] = e_2 + \lambda e_3 \quad (\lambda > 0)$	Solvable
$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}H^2} \times \mathfrak{g}_{\mathbb{R}H^2}$	$[e_0, e_1] = e_1, [e_2, e_3] = e_3$	Solvable

4 solvsoliton と対応する部分多様体の極小性

ここでは solvsoliton と対応する部分多様体の極小性に関して、得られた結果を紹介する。

4.1 3 次元の場合

3 次元可解 (冪零) リー代数の場合、内積が solvsoliton (nilsoliton) であることと、対応する等質部分多様体が極小であることが同値である。

定理 4.1 (H.-Tamaru [2]). $\mathfrak{g}$ を 3 次元可解リー代数とする。このとき、 $\mathfrak{g}$ 上の内積が solvsoliton であることと、対応する部分多様体 $\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g}) \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle$ が極小部分多様体であることは同値となる。

各 3 次元可解リー代数に対して、その上のすべての内積に対応する部分多様体を調べることで定理 4.1 を証明した。全ての可換でない 3 次元可解 (冪零) リー代数は以下のいずれかと同型であることが知られている。

Name	Nonzero commutation relations	
$\mathfrak{h}_3$	$[e_2, e_3] = e_1$	Nilpotent
$\mathfrak{r}_3$	$[e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = e_2 + e_3$	Solvable
$\mathfrak{r}_{3,\lambda}$	$[e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = \lambda e_3 \quad (-1 \leq \lambda \leq 1)$	Solvable
$\mathfrak{r}'_{3,\lambda}$	$[e_1, e_2] = \lambda e_2 - e_3, [e_1, e_3] = e_2 + \lambda e_3 \quad (\lambda > 0)$	Solvable

上表の各リー代数に対して、solvsoliton (nilsoliton) の存在・非存在、および対応する $\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g})$ 等質部分多様体 (以下軌道と記す) について補足する。

- $\mathfrak{h}_3$ および $\mathfrak{r}_{3,1}$ 上の内積はスカラー倍および等長を除くとただ 1 つである ([9])。それらはそれぞれ nilsoliton および Einstein (自明な solvsoliton) であり、対応する軌道はどちらも $\text{GL}_3(\mathbb{R})/\text{O}(3)$ 全体である。
- $\mathfrak{r}_3$ は、solvsoliton を許容しない。対応する軌道はすべて合同であり、かつそれらは極小でない。
- $\mathfrak{r}_{3,\lambda}(\lambda \neq 1)$ は、solvsoliton を許容する。対応する軌道は、すべて超曲面であり、かつ solvsoliton に対応する軌道のみ極小である。
- $\mathfrak{r}'_{3,\lambda}$ (をリー代数に持つ単連結可解リー群) は、Einstein 計量を許容する。対応する軌道は、Einstein 計量に対応する軌道のみ特異 (余次元 2) かつ極小な軌道である (その他の軌道は超曲面)。

我々は Milnor 型定理 ([3]) を用いて、3 次元単連結可解リー群上の solvsoliton を分類している ([2])。尚、この分類結果は Lauret ([12]) によりすでに得られていたが、我々の手法はより直接的である。

4.2 高次元の例

次の二つの $n(> 3)$ 次元可解リー代数の場合の結果を紹介する.

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_{\mathbb{R}H^2} \oplus \mathbb{R}^{n-2} &:= \text{span}_{\mathbb{R}}\{e_1, \dots, e_n \mid [e_1, e_2] = e_2\}, \\ \mathfrak{g}_{\mathbb{R}H^{n-1}} \oplus \mathbb{R} &:= \text{span}_{\mathbb{R}}\{e_1, \dots, e_n \mid [e_1, e_i] = e_i \ (i = 3, \dots, n)\}.\end{aligned}$$

Milnor 型定理を用いることで, これらのリー代数は solvsoliton を許容することが確認できる. また, 次が成り立つ:

定理 4.2. $n(> 3)$ 次元リー代数 $\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}H^2} \oplus \mathbb{R}^{n-2}$ または $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}H^{n-1}} \oplus \mathbb{R}$ と同型のとき, $\mathfrak{g}$ 上の内積が solvsoliton であることと, 次が同値: 対応する部分多様体 $\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g}) \cdot \langle, \rangle$ が, $\text{GL}_n(\mathbb{R})/\text{O}(n)$ 内の極小部分多様体である.

また, 対応する部分多様体は以下の通り:

- $n = 3$ (つまり $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}H^2} \oplus \mathbb{R}$) のとき, すべての軌道は超曲面であり, solvsoliton に対応する軌道のみ極小な軌道である.
- $n \neq 3$ のとき, $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}H^2} \oplus \mathbb{R}^{n-2}$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}H^{n-1}} \oplus \mathbb{R}$ とともに solvsoliton に対応する軌道のみ特異かつ極小な軌道である (その他の軌道は超曲面).

4.3 4 次元の場合

4 次元の場合に得られた結果を紹介する. 結果として, 冪零の場合は 3 次元のときと同様の結果が得られた. 一方, 可解の場合は solvsoliton と極小部分多様体に対応しない例が存在する.

命題 3.4 の表の 2 つの冪零リー代数に対して, その上のすべての内積に対応する軌道を調べることで次を得た:

定理 4.3. $\mathfrak{g}$ を 4 次元冪零リー代数とする. このとき $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle, \rangle$ が nilsoliton であることと, 次が同値: 対応する部分多様体 $\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g}) \cdot \langle, \rangle$ が, $\text{GL}_4(\mathbb{R})/\text{O}(4)$ 内の極小部分多様体である.

すべての 4 次元冪零リー代数は nilsoliton を許容することが知られている. また, 対応する軌道に関しては以下の通りである:

- $\mathfrak{n}_4$ の場合, 対応する軌道はすべて余次元 2 の軌道であり, nilsoliton に対応する軌道のみ極小である.
- $\mathbb{R} \times \mathfrak{h}_3$ の場合, nilsoliton に対応する軌道は $\text{GL}_4(\mathbb{R})/\text{O}(4)$ 全体である.

一方, 4 次元可解リー代数上の solvsoliton はその対応する部分多様体の極小性によって完全に特徴付けることはできない.

命題 4.4. $\mathfrak{s}_4$ 上の内積に関して次が成り立つ:

1. solvsoliton だが, 対応する部分多様体が極小でないものが存在する.

2. 対応する部分多様体が極小であるが, solvsoliton ではないものが存在する.

実際, 命題 3.4 の表内の基底 $\{e_0, \dots, e_3\}$ に対して,

- $\{\frac{\sqrt{3}}{2}e_0, e_1, e_2, e_3\}$ を正規直交基底とする内積は solvsoliton だが, この solvsoliton に対応する部分多様体は極小部分多様体ではない.
- $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ を正規直交基底とする内積に対応する部分多様体は極小部分多様体であるが, これは solvsoliton に対応する部分多様体ではない.

しかしながら, 4 次元可解リー代数の場合 solvsoliton とその対応する部分多様体の極小性との間に全く関係がないというわけではない. 実際, あるクラスに限定すれば solvsoliton に対応する部分多様体は極小である.

命題 4.5. $\mathfrak{g}$ を 4 次元可解リー代数, $\mathfrak{n}$ を $\mathfrak{g}$ の極大冪零イデアルとする. $\mathfrak{n}$ が可換のとき, つまり $\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{r}_{4,\mu,\lambda}, \mathfrak{r}'_{4,\mu,\lambda}, \mathbb{R} \times \mathfrak{r}_{3,\lambda}, \mathbb{R} \times \mathfrak{r}'_{3,\lambda}, \mathfrak{g}_{\mathbb{R}H^2} \times \mathfrak{g}_{\mathbb{R}H^2}$ のいずれかと同型のとき, 次が成り立つ: $\langle, \rangle$ が $\mathfrak{g}$ 上の solvsoliton ならば 対応する部分多様体 $[\langle, \rangle]$ は極小部分多様体である.

参考文献

- [1] Fernandez-Culma, E. A.; Classification of 7-dimensional einstein nilradicals. *Transform. Groups* **17** (2012), no. 3, 639–656.
- [2] Hashinaga, T., Tamaru, H.: Three-dimensional solvsolitons and the minimality of the corresponding submanifolds, in preparation.
- [3] Hashinaga, T., Tamaru, H., and Terada, K.: Milnor-type theorems for left-invariant Riemannian metrics on Lie groups, preprint.
- [4] Jablonski, M.: Concerning the existence of Einstein and Ricci soliton metrics on solvable Lie groups, *Geom. Topol.* **15** (2011), no. 2, 735–764.
- [5] Jablonski, M.: Homogeneous Ricci solitons, preprint, arXiv:1109.6556.
- [6] Kodama, H., Takahara, A., and Tamaru, H.: The space of left-invariant metrics on a Lie group up to isometry and scaling, *Manuscripta Math* **135** (2011), no. 1–2, 229–243.
- [7] Lauret, J.: Ricci soliton homogeneous nilmanifolds, *Math. Ann.* **319** (2001), no. 4, 715–733.
- [8] Lauret, J.: Finding Einstein solvmanifolds by a variational method, *Math. Z.* **241** (2002), no. 1, 83–99.
- [9] Lauret, J.: Degenerations of Lie algebras and geometry of Lie groups, *Differential Geom. Appl.* **18** (2003), no. 2, 177–194.

- [10] Lauret, J.: Einstein solvmanifolds and nilsolitons. *New developments in Lie theory and geometry*, 1-35, Contemp. Math., **491**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
- [11] Lauret, J.: Einstein solvmanifolds are standard. *Ann. of Math. (2)* **172** (2010), no. 3, 1859–1877.
- [12] Lauret, J.: Ricci soliton solvmanifolds, *J. Reine Angew. Math.* **650** (2011), 1–21.
- [13] Lauret, L. and Will, C.: Einstein solvmanifolds: existence and non-existence questions, *Math. Ann.* **350** (2011), no. 1, 199–225.
- [14] Will, C.: Rank-one Einstein solvmanifolds of dimension 7, *Differential Geom. Appl.* **19** (2003), no. 3, 307–318.
- [15] Will, C.: The space of solvsolitons in low dimensions, *Ann. Global Anal. Geom.* **40** (2011), no. 3, 291–309.